دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی عمران

کمانش مکانیکی و حرارتی و ارتعاش آزاد ورق‌های ضخیم ناهمسان در ضخامت بر روی بستر ارتجاعی به کمک تئوری برشی اصلاح شده

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی عمران- سازه

مصطفی محبی کیابانی

استاد راهنما

دکتر مجتبی ازهری

استاد مشاور

دکتر بیژن برومند

۱۳۹۳

عنوان **صفحه**

چکیده ۱

فصل اول : مقدمه و کلیات

۱-۱- مقدمه ۲
۱-۲- کمانش ورق ۴
۱-۳- تاریخچه کمانش ورق ۵
۱-۴- انواع کمانش ۷
۱-۵- روش‌های تحلیل کمانش ورق ۸
۱-۶- بستر ارتجاعی ۹
۱-۷- مطالعات پیشین ۱۰
۱-۷-۱-کمانش مکانیکی ۱۰
۱-۷-۲-کمانش حرارتی ۱۱
۱-۷-۳- ارتعاش آزاد ۱۲
۱-۸- هدف و تشریح مساله ۱۲
۱-۹- محتوای فصل‌های بعدی ۱۳

فصل دوم : آشنایی با مواد ناهمسان در ضخامت و مدل‌های بستر ارتجاعی

۲-۱- مقدمه ۱۴
۲-۲- مواد مرکب ۱۵
۲-۳- تعریف مواد ناهمسان در ضخامت ۱۶
۲-۴- روش‌های ساخت و تولید ۱۷
۲-۵- کاربردهای مواد ناهمسان در ضخامت ۱۷
۲-۶- مدل سازی ورق‌های ناهمسان در ضخامت ۱۸
۲-۷- مدل سازی ورق‌های ساندویچی ناهمسان در ضخامت ۱۹
۲-۸- بستر ارتجاعی ۲۱
۲-۸-۱- بستر ارتجاعی وینکلر ۲۲
۲-۹- مدل‌های اصلاح شده بستر ارتجاعی وینکلر ۲۲
۲-۹-۱- مدل بسترارتجاعی برودیچ ۲۳
۲-۹-۲- مدل بستر ارتجاعی هتنی ۲۳
۲-۹-۳- مدل بستر ارتجاعی پاسترناک ۲۴

فصل سوم : تئوری‌های حاکم بر تحلیل ورق

۳-۱- مقدمه ۲۵
۳-۲- تئوری‌های تک لایه‌ای معادل ۲۶
۳-۳- تئوری‌های لایه مجزا ۲۶
۳-۴- تئوری‌های زیگزاگ ۲۶
۳-۵-مهمترین تئوری‌های تک لایه‌ای معادل ۲۷
۳-۵-۱- تئوری کلاسیک ورق ۲۷
۳-۵-۲- تئوری برشی مرتبه اول ۲۸
۳-۵-۳- تئوری برشی مرتبه سوم ۲۹
۳-۵-۴- تئوری تغییر شکل برشی اصلاح شده ۳۲

فصل چهارم : روش‌های حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر ورق

۴-۱- مقدمه ۳۵
۴-۲- روش انرژی و روش‌های تغییراتی ۳۵
۴-۳- روش‌های حل عددی ۳۷
۴-۴- روش اجزا محدود ۳۷
۴-۵- روش نوار محدود ۳۷
۴-۵-۱- توابع شکل جهت طولی ۳۸
۴-۵-۲- توابع شکل جهت عرضی ۳۸
۴-۵-۳- فرمول بندی برای ورق نازک ۳۹
۴-۵-۴- فرمول بندی برای ورق ضخیم ۴۱
۴-۵-۵- فرمول بندی برای تئوری تغییر شکل برشی اصلاح شده ۴۱
۴-۵-۶- تعیین ماتریس سختی هندسی ورق ۴۳
۴-۵-۷- بستر ارتجاعی ۴۴
۴-۵-۸- ارتعاش آزاد ۴۶
۴-۵-۹- معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت ۴۶
۴-۵-۱۰- روش حل ۴۶

فصل پنجم : کمانش مکانیکی و ارتعاش آزاد ورق‌های ضخیم FGM

۵-۱- مقدمه ۴۸
۵-۲- معرفی داده‌های ورودی و خروجی ۴۸
۵-۳- بررسی اثر تعداد نوارها ۴۹

۵-۴- بررسی صحت برنامه ۵۰
۵-۵- مقایسه درجات آزادی ۵۱
۵-۶- کمانش ورق ساندویچی ناهمسان در ضخامت ۵۱
۵-۶-۱- اثر نسبت لایه‌ای ۵۲
۵-۶-۲- اثر شرایط تکیه‌گاهی ۵۳
۵-۶-۳- اثر ضخامت ورق ۵۳
۵-۷- کمانش ورق ناهمسان در ضخامت ۵۴
۵-۷-۱- اثر ضخامت ورق و بستر ارتجاعی ۵۵
۵-۷-۲- اثر ابعاد ورق و بستر ارتجاعی ۵۶
۵-۷-۳- شرایط تکیه‌گاهی ۵۷
۵-۸ -کمانش دو طرفه ۵۸
۵-۸-۱- اثر ضخامت ۶۰
۵-۸-۲- اثر ابعاد ورق ۶۱
۵-۸-۳- اثر شرایط تکیه‌گاهی برای ورق‌های ساندویچی ۶۲
۵-۸-۴- اثر شرایط تکیه‌گاهی ۶۴
۵-۸-۵- اثر ضخامت ورق ۶۴
۵-۸-۶- اثر ابعاد ورق ۶۶

فصل ششم : کمانش حرارتی

۶-۱- مقدمه ۶۸
۶-۲- روش حل ۶۸
۶-۳- آنالیز پیش از کمانش ۶۹
۶-۴- تغییرات یکنواخت دما ۷۰
۶-۵- تغییرات خطی دما ۷۰
۶-۶- تغییرات غیرخطی دما ۷۱
۶-۷- معرفی داده‌های ورودی و خروجی ۷۳
۶-۸- توزیع یکنواخت درجه حرارت ۷۳
۶-۹- توزیع خطی درجه حرارت ۷۵
۶-۹-۱- اثر بستر ۷۵
۶-۹-۲- اثر ابعاد ورق ۷۵
۶-۹-۳- اثر ضخامت ۷۶
۶-۱۰- توزیع غیر خطی درجه حرارت ۷۶

۶-۱۰-۱- اثر بستر ۷۶
۶-۱۰-۲- اثر ابعاد ورق ۷۷
۶-۱۱- مقایسه سه حالت توزیع درجه حرارت ۷۷
۶-۱۱-۱- اثر ابعاد ورق ۷۷
۶-۱۱-۲- اثر بستر ۷۹
۶-۱۱-۳- اثر بستر وینکلر ۸۰
۶-۱۱-۴- اثر بستر پاستراناک ۸۰
۶-۱۱-۵ - اثر شرایط مرزی ۸۲
۶-۱۲- ورق ساندویچی ناهمسان در ضخامت ۸۲
۶-۱۲-۱- توزیع یکنواخت دما ۸۳
۶-۱۲-۲- توزیع خطی دما ۸۴
۶-۱۲-۳- اثر شاخص توانی ۸۴

فصل هفتم : نتایج و پیشنهادات

۷-۱- مقدمه ۸۷
۷-۲- نتایج ۸۸
۷-۳- پیشنهادات ۸۸
پیوست ۱ ..... ۸۹
مراجع ۹۰

چکیده

در سال‌های اخیر با پیشرفت علم وفن آوری و همچنین رشد و توسعه توربین‌ها، موتورهای پر قدرت و سایر صنایع که در معرض حرارت بالا قرار دارند؛ نظیر صنعت هوافضا، استفاده از ورق‌های FGM به عنوان اعضایی به منظور کاهش تنش‌های حرارتی اجتناب ناپذیر است. FGM ها موادی هستند که اغلب از ترکیب سرامیک و فلز ساخته می‌شوند. سرامیک ورق را در برابر حرارت، واکنش‌های شیمیایی وغیره محافظت می‌کند و فلز شکل‌پذیری و مقاومت مکانیکی ورق را افزایش می‌دهد. در این ورق‌ها خواص مصالح پیوسته و به تدریج در ضخامت تغییر می‌کند. این تغییرات با استفاده از یک رابطه توانی بیان می‌شود. ضریب پواسون به منظور سهولت مقداری ثابت فرض شده است.

در مطالعه حاضر کمانش مکانیکی و حرارتی و ارتعاش آزاد ورق‌های ضخیم ناهمسان در ضخامت بر روی بستر ارتجاعی ارائه شده است. به منظور مدل کردن بستر ارتجاعی از مدل بستر وینکلر و مدل اصلاح شده بستر ارتجاعی پاسترناک استفاده شده است. تئوری تغییر شکل برشی اصلاح شده مورد استفاده قرار گرفته است. در این تئوری جابجایی خارج صفحه w شامل دو جزء خمشی w_b و برشی w_s است و اثر دوران مقاطع عمود بر میان- صفحه (ψ_x و ψ_y) در قسمت برشی جابجایی قائم(w_s) دیده شده است. هم‌چنین تابع توزیع کرنش برشی نیز از نوع هایپربولیک اختیار شده است. با استفاده از روش نوار محدود کلاسیک و به کارگیری روش انرژی، مساله ورق FGM بر روی بستر ارتجاعی مورد تحلیل قرار گرفت. در نهایت مساله کمانش ورق به یک مساله مقادیر ویژه تبدیل خواهد شد. با ارضای شرایط مرزی و حل مساله مقدار ویژه بار بحرانی ورق به دست خواهد آمد.

نتایج برای شرایط مرزی مختلف در قالب نمودارها و جداول ارائه و با مراجع معتبر مقایسه شده است. در ادامه اثر عوامل مختلف مانند، نسبت عرض به ضخامت، شاخص توانی، بسترارتجاعی، نسبت ابعاد، نسبت لایه‌ای و غیره مورد بررسی قرار گرفته است. مقایسه نتایج با مطالعات معتبر قبلی نشان از مطلوب بودن روش به کار گرفته شده دارد.

واژگان کلیدی : تئوری تغییر شکل برشی اصلاح شده ، ورق ضخیم، روش نوار محدود، کمانش حرارتی و مکانیکی، ارتعاش آزاد

فصل اول
مقدمه و کلیات

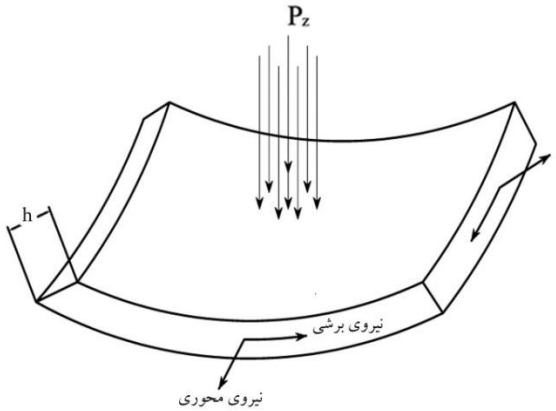
۱-۱ مقدمه

ورق‌ها اجزای سازه‌ای مسطح دو بعدی هستند که در آن‌ها بعد ضخامت نسبت به سایر ابعاد بسیار کوچکتر است. این اجزا کاربرد وسیعی در زمینه‌های گوناگون صنعت ومهندسی از قبیل صنایع هوا فضا، دریا، مهندسی عمران، مکانیک وغیره دارند. به این دلیل که رفتار ورق‌ها در انتقال بار تا حدود زیادی به تیرها شباهت دارد، رفتار ورق‌ها را می‌توان با توجه به رفتار تیرها پیش‌بینی کرد. لذا در حل مسائل ورق می‌توان از مدل‌های دو بعدی استفاده کرد. کاربرد گسترده ورق‌ها به عنوان اعضای سازه‌ای، نظیر دال‌ها، فونداسیون‌ها، عرشه پل‌ها و دیوارهای حائل موجب شده تا تلاش‌های زیادی برای بررسی رفتار آن‌ها تحت شرایط مختلف بارگذاری وتکیه‌گاهی صورت گیرد.

حل کاملا دقیق مسائل ورق نیازمند در نظر گرفتن مدل سه بعدی است. از آنجا که حل چنین مسائلی به علت پیچیدگی‌های ریاضی، دشوار و هم‌چنین از لحاظ زمانی مقرون به صرفه نیست؛ به همین دلیل در نظر گرفتن پارامتری برای ساده‌سازی رفتار ورق و دسته‌بندی رفتارها بر اساس آن پارامتر لازم به نظر می‌رسد. یکی از مهمترین این پارامترها نسبت ضخامت ورق به عرض آن است. از این حیث ورق‌ها به چهار دسته تقسیم می‌شوند.

۱. پوسته‌ها $\left(\frac{h}{l} \le \frac{1}{50}\right)$

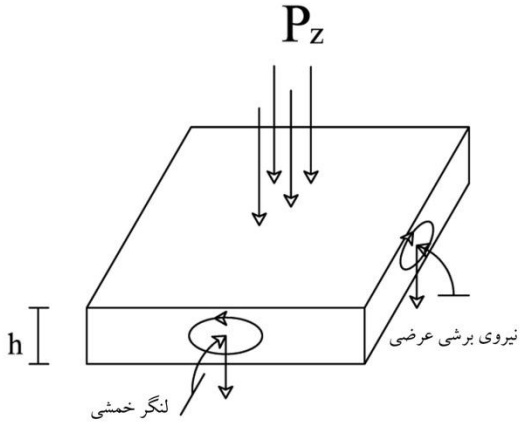
پوسته‌ها ورق‌های بسیار نازکی هستند که بارهای اعمال شده را تنها ازطریق نیروهای محوری و برش‌های درون صفحه منتقل می‌کنند. به علت نازکی بسیار زیاد از عملکرد خمشی این گروه از ورق‌ها صرف نظر می‌شود. به همین علت می‌توان پوسته‌ها را مشابه کابل در نظر گرفت(شکل ۱-۱).



شکل ۱-۱ پوسته یا غشاء

۲. ورق‌های نازک $\left(\frac{1}{50} \le \frac{h}{l} \le \frac{1}{10}\right)$

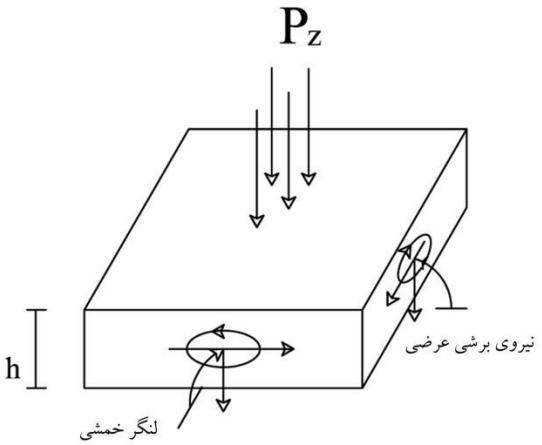
این گروه از ورق ها بارهای وارده را به صورت دو بعدی به وسیله لنگرهای خمشی و پیچشی داخلی و برش عرضی منتقل می‌کنند. لذا از لحاظ عملکرد رفتاری مشابه تیر دارند. شکل ۱-۲ یک ورق نازک ، بار اعمال شده و نحوه انتقال بار را در ورق نازک نمایش می‌دهد.



شکل ۱-۲ ورق نازک

۳. صفحات نسبتا ضخیم $\left(\frac{1}{10} \le \frac{h}{l} \le \frac{1}{5}\right)$

این ورق‌ها مشابه ورق‌های نازک هستند با این تفاوت که در آن‌ها اثر نیروهای برشی عرضی تاثیرگذار بوده و در تحلیل مساله باید در نظر گرفته شوند. شکل ۱-۳ یک ورق نسبتا ضخیم ، بار اعمال شده و نحوه انتقال بار را در ورق نسبتا ضخیم نمایش می‌دهد.



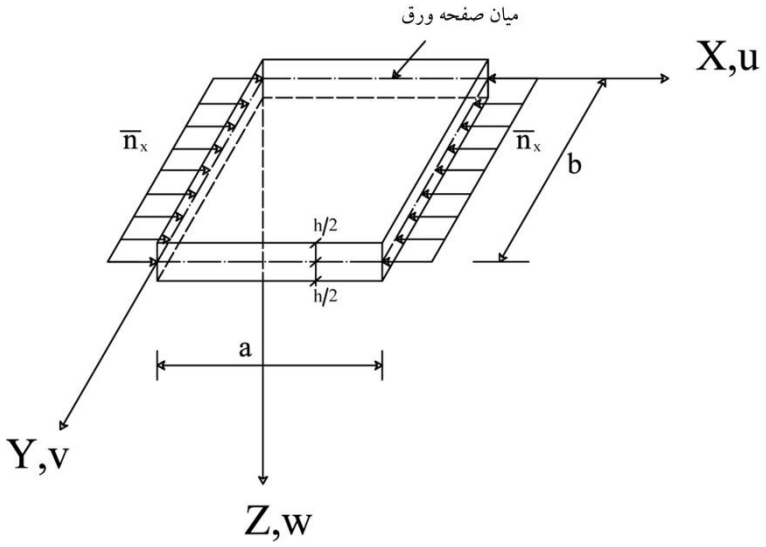
شکل ۱-۳ ورق با سختی خمشی

۴. ورق‌های ضخیم $\left(\frac{h}{l} \ge \frac{1}{5}\right)$

در این گروه از ورق‌ها تنش‌های داخلی همانند یک محیط پیوسته سه بعدی عمل می‌کند.

۱-۲ کمانش ورق

در طراحی ورق‌ها علاوه بر دو معیار مقاومت و معیار سختی (کنترل تغییر شکل های مجاز)، کنترل پایداری نیز الزامی است. مساله کمانش از آنجا اهمیت پیدا می‌کند که ورق‌ها اغلب در معرض بارهای درون صفحه فشاری ونیروهای برشی که درون صفحه عمل می‌کنند، قرار می‌گیرند(شکل ۱-۴). در صورتی که این بارها از مقداری فراتر روند. ورق به طور ناگهانی تغییر شکل خارج از صفحه خواهد داد. به این پدیده کمانش گویند و باری که در آن کمانش رخ می‌دهد، بار بحرانی معرفی می‌شود. اهمیت این بار به این دلیل است که با افزایش این بار تغییر شکل‌های خارجی به طور چشمگیری افزایش پیدا خواهند کرد. به همین منظور تلاش‌های زیادی برای یافتن این بار بر اساس تئوری‌های مختلف انجام شده است.



شکل ۱-۴ ورق مستطیلی تحت بارگذاری فشاری

۱-۳ تاریخچه کمانش ورق

مساله ارتعاش آزاد ورق جز اولین مطالعات تحلیلی و تجربی بود که به آن پرداخته شد. نخستین بار اویلر در سال ۱۷۶۶ فرمول بندی ریاضی نظریه غشایی ورق‌های نازک را ارائه کرد [۱]. او مساله ارتعاش آزاد پوسته‌های الاستیک مستطیلی، مثلثی و دایره‌ای را با استفاده از دو شبکه رشته‌های کشیده عمود بر هم مدل‌سازی کرد. پس از اویلر برنولی با جایگزین کردن رشته‌ها با تیرهایی که تنها دارای صلبیت خمشی بودند مساله ارتعاش آزاد را بررسی نمود، ولی نتایج او با روابط تجربی سازگار نبود [۲].

پس از آن کلدانی فیزیکدان آلمانی بر روی ارتعاش آزاد ورق مطالعاتی انجام داد. او مودهای مختلف ارتعاش ورق و همچنین فرکانس‌های مربوط به هریک را به دست آورد. در سال ۱۸۱۱ ریاضیدان فرانسوی به نام سوفی ژرمن معادله دیفرانسیلی برای ورق ارائه کرد. از او می‌توان به عنوان نخستین کسی یاد کرد که معادله دیفرانسیلی برای ارتعاش آزاد ورق ارائه کرده است. او از مفهوم انرژی کرنشی و کار مجازی استفاده کرد و معادله (۱-۱) را پیشنهاد کرد:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\lambda^2\left(\frac{\partial^6 z}{\partial x^4\partial y^2}+\frac{\partial^6 z}{\partial x^2\partial y^4}\right)=0 \qquad (۱-۱)$$

در این معادله z نشان دهنده تغییرشکل میان – صفحه ورق، t پارامتر زمان و λ^2 ثابتی است که بیانگر خواص فیزیکی ورق می‌باشد. لاگرانژ به اشتباه این رابطه پی برد و آن را به صورت رابطه(۱-۲) اصلاح کرد.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+k^2\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right)=0 \qquad (۱-۲)$$

ژرمن در سال ۱۷۱۳ مقداری دقیق برای k^2 ارائه کرد و در سال ۱۸۱۶ معادله دیفرانسیل خود را اصلاح نمود. اگرچه او نتوانست انتقاد در مورد مقدار k^2 را برطرف کند ولی بی‌تردید او نخستین کسی بود که تلاش کرد تا معادله معتبری در ارتباط با مساله ارتعاش آزاد ورق ارائه دهد.

ناویر فیزیکدان نامدار فرانسوی معادله‌ای دقیق برای ورق تحت بارگذاری گسترده $p_z(x,y)$ ارائه کرد. وی با استفاده از فرض برنولی یعنی عمود باقی ماندن صفحات بر میان- صفحه ورق پس از تغییر شکل و با اعمال روابط تنش-کرنش معادله (۱-۳) را ارائه نمود.

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=p_z(x,y) \qquad (۳\text{-}۱)$$

در رابطه بالا D صلبیت خمشی ورق است. w تغییر مکان میان- صفحه ورق و $p_z(x,y)$ بار عمودی وارد بر ورق است. او توانست معادله فوق را برای ورق مستطیلی با شرایط مرزی ساده و با استفاده از سری فوریه حل کند. وی همچنین معادله دیفرانسیل کمانش ورق را برای بار یکنواخت فشاری در طول لبه‌ها توسعه داد ولی موفق به حل آن نشد. گوستاو کیرشهف را می‌توان بنیانگذار تئوری توسعه یافته ورق نامید. وی در سال ۱۸۵۰ فرضیه تئوری کلاسیک ورق کیرشهف مبنی بر عمود باقی ماندن صفحات قائم بر میان- صفحه ورق، پس از تغییر شکل را ارائه کرد. در این نظریه از اثرات تغییر شکل برشی ورق چشم پوشی شده است. به همین دلیل استفاده از آن برای تحلیل ورق‌های ضخیم مناسب نمی‌باشد.

ریزنر و میندلین در سال ۱۹۵۴ برای توسعه نظریه ورق‌های نسبتا ضخیم مشکلات ناشی از تئوری کلاسیک را برطرف کردند [۳]. در این تئوری تغییر شکل‌های برشی به صورت یکنواخت در ضخامت ورق توزیع می‌شوند. به منظور رفع نواقص تئوری ریزنر و میندلین در تحلیل ورق‌های نیمه ضخیم تئوری‌های مرتبه بالاتر ارائه شدند. ردی در سال ۱۹۸۴ تئوری برشی مرتبه سومی ارائه کرد. با استفاده از این تئوری مسائل مربوط به ورق‌های نیمه ضخیم بدون نیاز به ضریب اصلاح برشی قابل تحلیل است [۴]. این تئوری‌ها، تغییر شکل و چرخش به عنوان دو کمیت مستقل در نظر می‌گیرند.

در فصل سوم تئوری‌های مورد استفاده برای حل مسائل ورق و تئوری مورد استفاده در این پایان نامه بیان خواهد شد.

روش تفاضل محدود یکی از روش‌های کارآمد تحلیل ورق است. نوادا در سال ۱۹۲۵ با استفاده از همین روش به تحلیل ورق پرداخت. پس از آن سوتول در انگلستان به احیای روش تفاضل محدود پرداخت. از آن به بعد گرایش مهندسان به روش‌های عددی بسیار بیشتر از گذشته شد. در سال ۱۹۵۶ ترنر و همکارانش [۵] روش اجزا محدود را به عنوان روشی کارآمد در حل مسائل الاستیک و غیر الاستیک پیچیده معرفی کردند. در حالی که مبانی این روش در یک مقاله ریاضی با موضوع روش‌های تغییراتی توسط ریاضی دانی به نام کورانت بیان شده بود ولی به دلیل عدم ارتباط بین مهندسین و ریاضی دانان به مدت یک دهه مسکوت ماند.

روش نوار محدود برای نخستین بار توسط چونگ در سال ۱۹۷۶ معرفی شد [۶]. این روش یک روش نیمه تحلیلی برای حل مسائل ورق با هندسه ساده است. از مزایای این روش کاهش درجات آزادی ورق و درنتیجه صرفه جویی در وقت و هزینه است. با توجه به اینکه در این پایان نامه از روش نوار محدود استفاده شده است، فصل چهارم به بیان این روش اختصاص داده شده است.

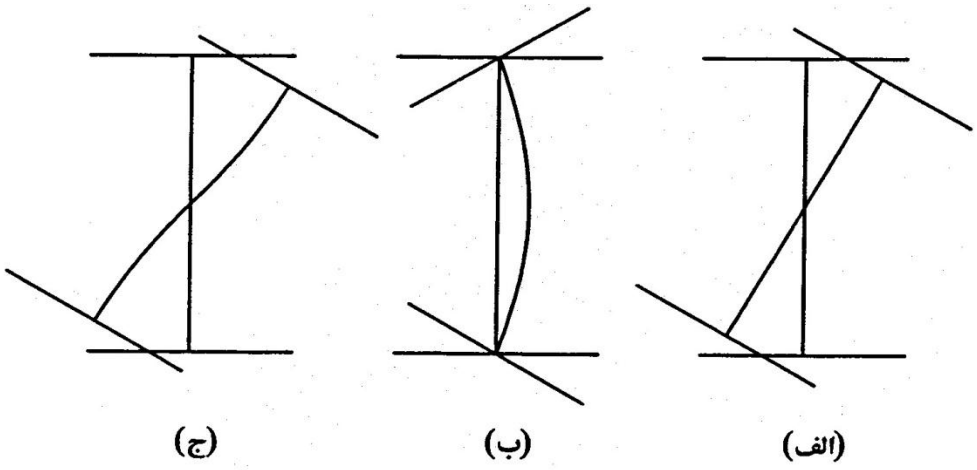
۱-۴ انواع کمانش

از لحاظ رفتار مواد تشکیل دهنده ورق کمانش آن به دو نوع الاستیک و غیر الاستیک تقسیم می‌شود. در کمانش الاستیک تنش‌ها مقادیری کمتر از تنش تسلیم ورق اختیار می‌کنند. و برای مدول الاستیسیته می‌توان مقدار ثابتی در نظر گرفت. در کمانش غیر الاستیک با افزایش میزان تنش‌ها از مقدار تنش تسلیم مصالح سازنده ورق، منحنی تنش-کرنش غیر خطی خواهد بود و مدول الاستیسیته متناسب با تنش اعمال شده تغییر خواهد کرد.

به طور کلی در سازه‌ها، تحت بار فشاری امکان رخ دادن سه نوع کمانش وجود دارد.

۱. کمانش جانبی[۱]
۲. کمانش موضعی[۲]
۳. کمانش تغییر شکلی[۳]

در کمانش جانبی که اغلب مربوط به تیرها و ستون‌ها می‌باشد. بدون اینکه تغییر شکلی در مقطع عضو رخ دهد، سازه دچار تغییر مکان جانبی می‌شود (شکل ۱-۵- الف). در کمانش موضعی، مقطع عضو سازه‌ای انحنا می‌یابد (شکل ۱-۵- ب). کمانش تغییر شکلی به ترکیبی از دو شکل فوق اطلاق می‌شود (شکل۱-۵- ج).



شکل ۱-۵ انواع کمانش

[1]Lateral buckling
[2]Local buckling
[3]Distortional buckling

۱-۵ روش‌های تحلیل کمانش ورق

حل معادله دیفرانسیل ورق با استفاده از روش‌های مختلفی قابل انجام است. یکی از این روش‌ها حل معادلات تعادل استاتیکی ورق است. در این روش معادلات تعادل برای حالتی که ورق کمانش کرده نوشته می‌شود. هنگامی که نیروهای درون لبه‌ای ورق از مقدار بحرانی کمی بیشتر باشند ورق کمانش کرده و تغییر شکل خارج از صفحه ورق مقادیر زیادی را اختیار می‌کند. بار بحرانی کمترین مقداری است که به ازای آن روند فوق رخ می‌دهد.

روش انرژی یکی از متداول‌ترین روش‌ها در حل مسائل ورق است. باتوجه به این که ورق در گذار از حالت پایدار به حالت ناپایدار ناگزیر به عبور از حالت تعادل خنثی است و مطابق قانون پایستگی انرژی در حالت تعادل خنثی ورق بدون از دست دادن یا جذب انرژی از حالت مسطح خارج شده و انحنا پیدا می‌کند، می‌توان روابط انرژی را مورد استفاده قرار داد.

اگر U نشان دهنده انرژی کرنشی ورق و V_p نشان دهنده انرژی پتانسیل نیروهای خارجی باشد، مجموع این دو کمیت انرژی کل سازه را نشان می‌دهد. تعادل حالتی است که تغییرات انرژی کل برابر صفر باشد.

$$\delta\Pi = \delta(U + V_p) = 0 \qquad (۴-۱)$$

حل دقیق مسائل ورق به دلیل پیچیدگی برای حالت‌های خاص بارگذاری و شرایط مرزی محدودی امکان پذیر است. به همین دلیل روش‌های عددی به مرور زمان جایگزین روش‌های حل دقیق شدند. از میان این روش‌ها می‌توان به این موارد اشاره کرد:

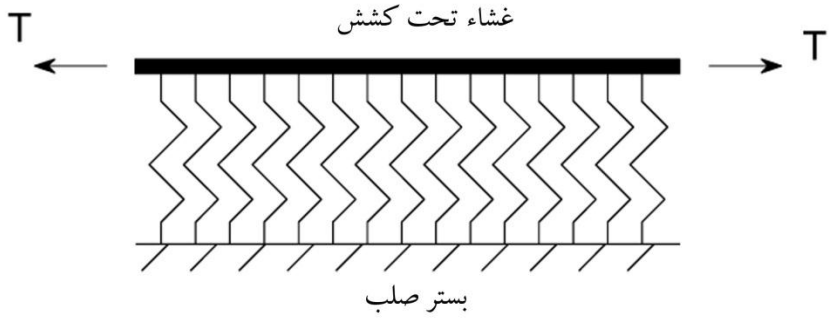
۱. روش تفاضل محدود
۲. روش اجزاء محدود
۳. روش نوار محدود
۴. روش المان مرزی
۵. روش‌های بدون شبکه

با توجه به اینکه در مطالعه حاضر از روش نوار محدود استفاده شده است، در فصول بعد به شرح کامل این روش پرداخته خواهد شد. در ادامه تاریخچه بستر ارتجاعی به طور مختصر ارائه می‌شود.

۱-۶ بستر ارتجاعی

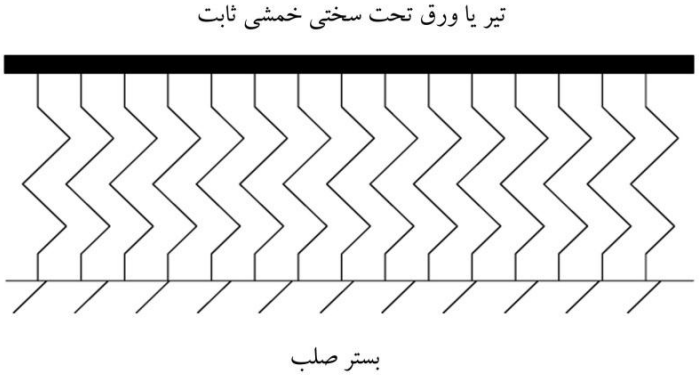
با توجه به اهمیت مساله بستر ارتجاعی در مسائل مهندسی تلاش‌های زیادی به منظور مدل کردن بستر ارتجاعی صورت گرفت. یکی از ساده‌ترین این مدل‌ها مدل بستر ارتجاعی وینکلر است. امیل وینکلر دانشمند آلمانی در سال ۱۸۶۷ مدلی ارائه کرد که در آن فشار تماس بین سازه و بستر ارتجاعی با تغییرشکل یا نشست هر نقطه از بستر رابطه مستقیم داشت [۷]. ایراد بزرگ این مدل مستقل در نظر گرفتن تغییرشکل هرنقطه از بستر نسبت به نقاط مجاور آن بود. علیرغم ویژگی‌های مناسب مدل بستر ارتجاعی وینکلر مانند سادگی و هم‌خوانی مناسب با نتایج تجربی، مدل‌های زیادی برای رفع نواقص این مدل ارائه شد.

در سال ۱۹۴۵ فیلوننکو برودیچ دانشمند روسی به منظور رفع نارسایی مدل بستر ارتجاعی وینکلر مدل خود را ارائه کرد. در این مدل ضعف بستر وینکلر با اضافه کردن یک غشاء نازک تحت کشش برطرف شد. شکل ۱-۶ مدل بستر ارتجاعی برودیچ را نشان می‌دهد [۸].



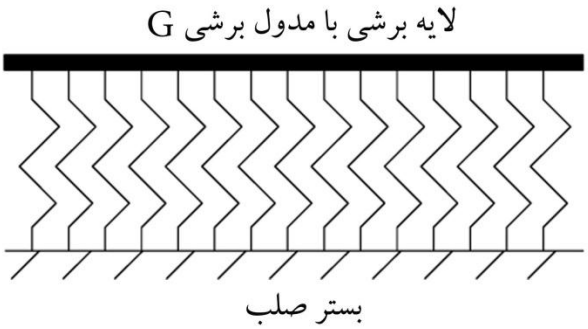
شکل ۱-۶ بستر ارتجاعی اصلاح شده فیلوننکو برودیچ

در سال ۱۹۵۰ میکلاس هتنی دانشمند مجارستانی مدلی برای بستر ارتجاعی ارائه کرد. وی در این مدل پیوستگی بین نقاط مختلف بستر ارتجاعی را با افزودن یک تیر یا ورق با سختی خمشی ثابت به مدل وینکلر برقرار کرد [۹]. شکل ۱-۷ مدل اصلاح شده هتنی را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۷ بستر ارتجاعی اصلاح شده هتنی

در سال ۱۹۵۴ پاسترناک دانشمند روسی مدلی برای بستر ارتجاعی وینکلر ارائه کرد. او مدل وینکلر را با اضافه کردن یک تیر یا ورق که تنها در معرض تغییر شکل‌های برشی عرضی قرار دارد، اصلاح کرد [۱۰]. تطابق بسیار خوب و سادگی این مدل سبب شد تا به عنوان کارآمدترین و رایج‌ترین مدل برای مسائل مهندسی استفاده شود. شکل ۱-۸ مدل بستر ارتجاعی پاسترناک را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۸ بستر ارتجاعی اصلاح شده پاسترناک

پس از مدل پاسترناک، مدل‌های دیگری نیز توسط، کر [۱۱]، ریزنر [۱۲] و ولاسو [۱۳] ارائه شد. در فصول بعدی روابط حاکم بر بسترهای ارتجاعی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۱-۷ مطالعات پیشین

۱-۷-۱ کمانش مکانیکی

این نوع کمانش تحت اثر بارهای مکانیکی خارجی وارد بر سازه اتفاق می‌افتد. در سال‌های گذشته مطالعات زیادی برای حل این مساله برای انواع ورق‌ها، تحت شرایط مختلف تکیه‌گاهی و بارگذاری انجام شده است. فراوانی مقالات ارائه شده در این زمینه موید این مطلب است. در این تحقیق کمانش مکانیکی ورق‌های تک لایه و ساندویچی ناهمسان در ضخامت بر روی بستر ارتجاعی انجام شده است. در ادامه مطالعات انجام شده در این زمینه بررسی می‌شود.

در سال ۱۹۹۵ زفرانی ورق‌های نیمه ضخیم بر روی بستر ارتجاعی وینکلر را با استفاده از روش المان مرزی تحلیل کرد [۱۴]. در سال ۱۹۹۷ فلدمن و عبودی کمانش مکانیکی ورق‌های ناهمسان در ضخامت را تحت بار یکطرفه انجام دادند [۱۵]. لام و همکارانش در سال ۲۰۰۰ مساله خمش،کمانش و ارتعاش آزاد ورق مستطیلی ایزوتروپ را برروی بستر ارتجاعی انجام دادند [۱۶]. زنکور در سال ۲۰۰۵ کمانش و ارتعاش آزاد ورق‌های ساندویچی ناهمسان در ضخامت را انجام داد. او در این مطالعه از توابع تغییر شکل برشی سینوسی استفاده کرد [۱۷]. شریعت و اسلامی در سال ۲۰۰۷ کمانش مکانیکی و حرارتی ورق‌های نیمه ضخیم حرارتی را بررسی کردند [۱۸]. اخوان و همکارانش در سال ۲۰۰۹ حل

دقیقی برای کمانش ورق‌های مستطیلی تحت نیروهای درون صفحه بر روی بستر ارتجاعی را با استفاده از تئوری میندلین استخراج کردند [۱۹]. مورادوا و استاورولاکیس در سال ۲۰۱۲ کمانش و فراکمانش ورق مستطیلی بر روی بستر ارتجاعی را با استفاده از روش طیفی مورد بررسی قرار دادند [۲۰]. هوو در سال ۲۰۱۳ حل بسته کمانش مکانیکی ورق‌های FGM بر روی بستر را انجام دادند [۲۱]. نوس و فریرا در سال ۲۰۱۳ با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالاترکمانش و ارتعاش آزاد ورق‌های ساندویچی ناهمسان در ضخامت را حل کردند. آن‌ها در این حل از روش بدون شبکه استفاده کردند [۲۲]. فروغی و ازهری در سال ۲۰۱۳ کمانش مکانیکی و ارتعاش آزاد ورق‌های ضخیم ناهمسان در ضخامت بر روی بستر ارتجاعی را با استفاده از روش نوار محدود و توابع بی‌اسپلاین انجام دادند [۲۳].

۱-۷-۲ کمانش حرارتی

امروزه با گسترش فن‌آوری وپیشرفت صنایع، استفاده از ماشین‌آلات و موتورهای پر قدرت روز به روز بیشتر می‌شود. استفاده از این ماشین آلات تنش‌های حرارتی بسیار بزرگی را به سازه‌ها اعمال می‌کند. هم‌چنین بسیاری از این ورق‌ها در شرایط محیطی خاص قرار می‌گیرند، یا سرعت‌های بسیار بالایی را تجربه می‌کنند. مساله کمانش حرارتی برای این ورق‌ها نیز حائز اهمیت است. این نوع کمانش هم‌چنین برای اعضای فضاپیما که سرعت‌های بسیار را تجربه می‌کنند اتفاق می‌افتد.

در سال ۱۹۵۲گوسارد و همکارانش اولین تحقیقات را در زمینه کمانش حرارتی انجام دادند [۲۴]. آن‌ها یک ورق ایزوتروپ همگن مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ساده در کناره‌ها وتوزیع دمای چادری را با استفاده از روش ریلی ریتزآنالیزکردند. در سال ۱۹۷۱ ویتنی واشتون کمانش حرارتی ورق کامپوزیت را با زوایای غیر صفر و نود با تکیه گاههای ساده در کناره‌ها را بررسی کرد [۲۵]. نودا در سال ۱۹۹۹ مساله بهینه‌سازی ورق‌های ناهمسان در ضخامت را جهت کاهش تنش‌های حرارتی انجام داد [۲۶]. در سال ۲۰۰۲ اسلامی و جواهری کمانش حرارتی ورق‌های ناهمسان در ضخامت را برای حالت توزیع دمای یکنواخت بدست آوردند [۲۷]. نجف‌زاده و حیدری در سال ۲۰۰۴ کمانش حرارتی ورق‌های دایره‌ای شکل را بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم حل کردند [۲۸]. ماتسونگا در سال ۲۰۰۹ کمانش حرارتی ورق‌های ناهمسان در ضخامت را با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالاتر تحلیل کرد [۲۹]. در سال ۲۰۱۰ زنکورو همکاران تئوری تغییر شکل برشی با استفاده از توابع سینوسی شکل، را برای حل مساله کمانش حرارتی ورق‌های ساندویچی ناهمسان در ضخامت برای سه حالت توزیع یکنواخت، خطی و غیر خطی به کار بردند [۳۰]. قنادپور و اویسی در سال ۲۰۱۲ کمانش حرارتی ورق‌های نازک ناهمسان در ضخامت را با استفاده از تئوری کلاسیک ورق و روش نوار محدود انجام دادند [۳۱]. در سال ۲۰۱۳ کیانی و اسلامی حل دقیق کمانش حرارتی ورق‌های دایره‌ای ساخته شده از مواد با خواص ناهمسان در ضخامت بر روی بستر ارتجاعی را انجام دادند [۳۲].

۱-۷-۳ ارتعاش آزاد

حل مساله ارتعاش آزاد ورق از دیرباز مورد توجه محققان بوده است. با توجه به کاربرد گسترده ورق‌ها در صنایع مختلف، یافتن فرکانس‌های طبیعی ورق از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از این رو مطالعات زیادی در این زمینه انجام شده است. در ادامه مطالعات انجام شده در زمینه ارتعاش ورق به خصوص ارتعاش آزاد ورق بر روی بستر ارتجاعی را بررسی می‌کنیم.

در سال ۱۹۹۵ جو و همکارانش ارتعاش آزاد ورق پله‌ای را با استفاده از روش اجزا محدود و تئوری برشی مرتبه اول انجام دادند [۳۳]. ماتسونگا در سال ۲۰۰۰ مساله ارتعاش آزاد ورق‌های نیمه ضخیم بر روی بستر ارتجاعی را مورد بررسی قرار داد [۳۴]. هانگ و تامبیراتنام در سال ۲۰۰۱ با استفاده از روش نوار محدود ارتعاش آزاد ورق بر روی بستر ارتجاعی را حل کردند [۳۵]. ژیانگ در سال ۲۰۰۳ ارتعاش آزاد ورق بر روی بستر ارتجاعی را با استفاده از حل لوی وتئوری میندلین انجام داد [۳۶]. ملک‌زاده و کریمی در سال ۲۰۰۴ ارتعاش آزاد ورق‌های مستطیلی با ضخامت متغییر را بر روی بستر دو پارامتری حل کردند [۳۷]. امینی و همکاران در سال۲۰۰۹ ارتعاش آزاد ورق ناهمسان در ضخامت را با استفاده از الاستیسیته سه بعدی بررسی کردند [۳۸]. لو در سال ۲۰۰۹ حل بسته ارتعاش آزاد ورق‌های مستطیلی ناهمسان در ضخامت بر روی بستر ارتجاعی را انجام داد [۳۹]. حسینی هاشمی و همکاران در سال۲۰۱۰ ارتعاش آزاد ورق ناهمسان در ضخامت بر روی بستر ارتجاعی را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی حل کردند [۴۰].

۱-۸ هدف و تشریح مساله

در این تحقیق کمانش مکانیکی وحرارتی و ارتعاش آزاد ورق‌های ناهمسان در ضخامت تک لایه و ساندویچی بر روی بستر ارتجاعی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی اصلاح شده انجام شده است. برای در نظر گرفتن تغییر شکل‌های برشی از تابع هایپربولیک استفاده شده است. بستر ارتجاعی به صورت وینکلر و پاسترناک در نظر گرفته شده است. حل با استفاده از روش نوار محدود و برای شرایط مختلف تکیه‌گاهی انجام شده است. در قسمت کمانش حرارتی، حل برای سه حالت توزیع یکنواخت، خطی و غیرخطی انجام شده است. در نهایت نتایج بدست آمده با مقالات معتبر مقایسه شده است.

۱-۹ محتوای فصل‌های بعدی

در فصل دوم ابتدا به مواد مرکب، خواص، ویژگی‌ها، مزایا و معایب این مواد پرداخته خواهد شد. سپس روند پیدایش مواد ناهمسان در ضخامت و خواص و ویژگی‌های آن همچنین مدل‌های ارائه شده برای بستر ارتجاعی و روابط مربوط به آن‌ها بررسی خواهد شد.

در فصل سوم تئوری‌های ارائه شده برای تحلیل ورق‌ها شامل تئوری کلاسیک ورق، تئوری مرتبه اول و تئوری مرتبه سوم برشی و تئوری اصلاح شده تغییر شکل برشی مورد استفاده در این تحقیق بیان خواهند شد.

در فصل چهارم روش‌های حل معادلات دیفرانسیل و به خصوص روش نوار محدود استفاده شده در این تحقیق معرفی می‌شوند. همچنین ماتریس‌های سختی و سختی هندسی با استفاده از روش نوار محدود وتئوری تغییر شکل برشی اصلاح شده استخراج خواهند شد.

در فصل پنجم بر مبنای روابط استخراج شده در فصل‌های قبل و با استفاده از برنامه نوشته شده در محیط نرم افزار MATLAB نتایج مربوط به کمانش مکانیکی و ارتعاش آزاد برای ورق‌های ناهمسان در ضخامت بر روی بستر ارتجاعی استخراج خواهد شد. پس از مقایسه نتایج استخراج شده، اثر پارامترهای مختلف بر ورق بررسی خواهد شد.

در فصل ششم روابط مربوط به کمانش حرارتی ورق‌های ناهمسان در ضخامت بر روی بستر ارتجاعی بیان می‌شود. سپس نتایج برای سه حالت توزیع یکنواخت، خطی و غیر خطی در ضخامت استخراج خواهد شد. پس از مقایسه نتایج استخراج شده با مراجع معتبر، اثر پارامترهای مختلف بر کمانش حرارتی ورق بررسی خواهد شد.

در فصل هفتم جمع بندی، نتیجه گیری و همچنین پیشنهاداتی برای مطالعات آتی ارائه خواهد شد.

فصل دوم
آشنایی با مواد ناهمسان در ضخامت و مدل‌های بستر ارتجاعی

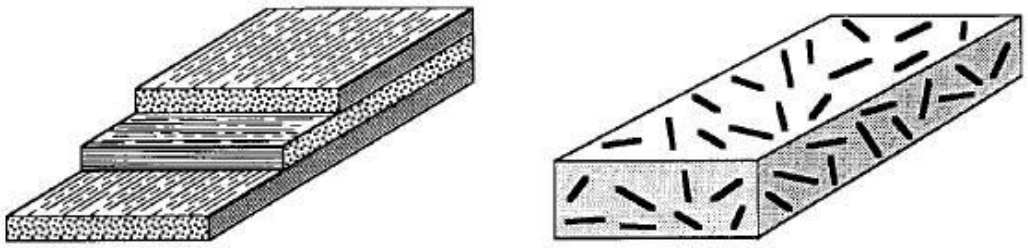
۲-۱ مقدمه

کاربرد گسترده ورق در صنایع گوناگون و هم‌چنین نقاط ضعف موجود در مصالح، دانشمندان را به ساخت گونه‌ای دیگر از مواد با ویژگی‌های برتر از مواد پیشین ترغیب کرده است. هم‌چنین با توسعه موتورهای پرقدرت، توربین‌ها، راکتورها و دیگر ماشین‌ها نیاز به موادی که مقاومت حرارتی ومکانیکی بالاتری داشته باشند، احساس شد. قطعات استفاده شده در این ماشین آلات قادر به تحمل تنش‌های حرارتی وارد شده نبود. به همین علت در سال‌های قبل از مواد سرامیکی خالص جهت پوشش و روکش کردن قطعات به منظور محافظت در برابر حرارت‌های وارده استفاده می‌شد. ولی استفاده از سرامیک خالص مشکلات دیگری از جمله ایجاد ترک و حفره را به همراه داشت. آشنایی با این نقاط ضعف سبب شد تا دانشمندان برا ی ساخت موادی با کارایی بهتر تلاش کنند. حاصل این تلاش‌ها در نهایت منجربه طراحی و ساخت مواد ناهمسان در ضخامت شد.

با توجه به مطالعات قبلی [۴۱, ۴۲] که در رابطه با ورق‌های با خواص ناهمسان در ضخامت در دانشکده مهندسی عمران دانشگاه صنعتی اصفهان انجام شده است. به شرح مختصری در رابطه با این مواد پرداخته می‌شود.

۲-۲ مواد مرکب

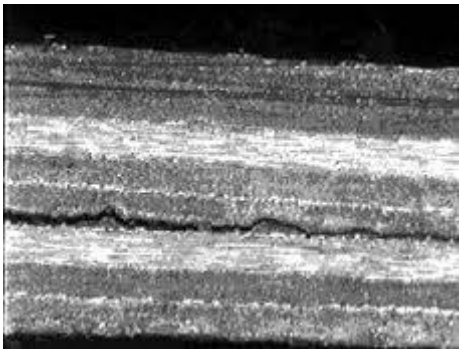
کامپوزیت‌ها مواد پیشرفته‌ای هستند که از به هم پیوستن دو یا چند ماده در مقیاس ماکروسکوپیک تشکیل می‌شوند به گونه‌ای که دارای خواص مکانیکی و فیزیکی بهتری نسبت به هریک از مواد سازنده خود می‌باشند. این مواد به دلیل داشتن مقاومت بالا نسبت به وزنشان، کاربرد زیادی در صنعت و مهندسی دارند.کامپوزیت‌ها از دو فاز تقویت‌کننده[1] و ماتریس[2] تشکیل می‌شوند (شکل ۲-۱). در این مواد الیاف نقش اصلی باربری را برعهده دارند و ماتریس نقش محافظت از الیاف در برابر صدمات محیطی از قبیل تغییرات دمایی و رطوبت را برعهده دارد.



شکل ۲-۱ ماده کامپوزیت ساخته شده از فیبر و ماتریس به صورت پیوسته موازی و غیر پیوسته

با وجود نقاط قوت فراوان از جمله نسبت وزن به مقاومت کم، مقاومت بالا در برابر خوردگی، امکان جهت گیری الیاف با توجه به نیاز طرح وکابرد فراوان مواد کامپوزیت در صنایع مختلف این مواد دارای نقاط ضعفی نیز هستند:

- عدم تشابه خواص مکانیکی مواد در محل اتصال لایه‌ها می‌تواند منجر به ایجاد تنش پسماند و یا تمرکز تنش دراین نقاط شود.
- امکان جداشدگی الیاف از ماتریس
- جداشدگی لایه‌ها از یکدیگر در اثر شوک، ضربه ویا چرخه‌های متوالی اعمال تنش (لایه لایه شدن[3])



شکل ۲-۲ پدیده لایه لایه شدن در کامپوزیت [۴۳]

[1]Reinforcement
[2]Matrix
[3]Delamination