به نام ایزد یکتا

۴۱۳۱۸

دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد کرمان

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی

تحت عنوان:

جبرهای استلزامی و عملگرهای استلزام فازی

۱۳۸۱ /۱/ ۲۰

دانشجو:

لیلی حاتم زاده اصفهانی

استاد راهنما:

دکتر اسفندیار اسلامی

اردیبهشت ۱۳۷۹

موضوع :

جبرهای استلزامی و عملگرهای استلزامی فازی

توسط:

لیلی حاتم زاده اصفهانی

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته وگرایش: ریاضی محض

از این پایان نامه در تاریخ ۱۳۷۹/۲/۲۵ در مقابل هیئت داوران دفاع به عمل آمده و مورد تصویب قرار گرفت.

اعضاء هیئت داوران

استاد راهنما: دکتر اسفندیار اسلامی

داور: دکتر ماشاالله ماشینچی

داور: دکتر محمدمهدی زاهدی

مدیر گروه آموزشی کارشناسی ارشد
دکتر اسفندیار اسلامی

معاون آموزشی دانشگاه
آقای مجید غلامحسین پور

سرپرست کمیته تحصیلات تکمیلی
دکتر محمد حسین متقی

رئیس دانشگاه
دکتر محمد حسین متقی

سپاسگزاری

سپاس آفریدگار یکتا را که به من توانایی کوشش در راه فراگیری علم و دانش را بخشید و مرا در تمامی مراحل زندگی یاری نمود.

در ابتدا لازم می‌دانم با کمال خضوع از مادرم که همواره با دریایی از گذشت و مهربانی بهترین مشوق و یاریگرم بود و هست سپاسگزاری نمایم.

همچنین از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر اسفندیار اسلامی که نه تنها راهنمایی پایان‌نامه اینجانب را به عهده داشتند، بلکه در تمام مراحل دورهٔ کارشناسی ارشد راهنما و مشوق بزرگی برایم بودند سپاسگزاری می‌نمایم. بعلاوه از جناب آقای دکتر محمدمهدی زاهدی و جناب آقای دکتر ماشااله ماشین‌چی که زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را به عهده داشتند تشکر می‌نمایم.

در خاتمه از خانم باقری نیز که با حوصله و دقت تایپ پایان‌نامه و مقالات مربوطه را انجام دادند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

لیلی حاتم‌زاده اصفهانی

اردیبهشت ۱۳۷۹

تقدیم به:

مادر مهربانم

و

روان پدر بزرگوارم مهندس عبدالرسول حاتم‌زاده اصفهانی

چکیده

در فصل اول این پایان‌نامه به تعریف انواع جبرهای استلزامی و فیلترهای آنها پرداخته و سپس قضایای نمایش را در مورد آنها بررسی می‌کنیم. در فصل دوم S و R و QL_استلزام را تعریف کرده و پس از تعریف انواع استلزام قضایایی را در مورد آنها می‌آوریم. در فصل سوم ابتدا لیستی از عملگرهای استلزام شناخته شده را ارائه و سپس نوع جبر و بعد از آن خواص ذکر شده در فصل اول و دوم را در مورد آنها بررسی می‌کنیم. در فصل چهارم با استفاده از نتایج و فصل قبل فیلترهای جبرهای استلزامی را بررسی می‌کنیم. در فصل پنجم با استفاده از نتایج حاصله عملگرهای استلزام را رده‌بندی خواهیم کرد.

فهرست

فصل ۱

جبرهای استلزامی و فیلترهای آنها

۱_۱ مقدمه

در این فصل به معرفی جبر و سپس نوع خاصی از آن به نام جبرهای استلزامی می‌پردازیم. بکارگیری مباحث جبری در مطالعه منطقهای گوناگون، از یک طرف انتخاب یک کلاس منطقی مناسب و از طرف دیگر انتخاب شایسته‌ای از جبرهای مجرد را لازم دارد. کلاس منطقی در حوزهٔ این بحث نمی‌باشد. اما حساب گزاره‌ها و محمولات منطقی را در نظر می‌گیریم که تفسیری در جبرهای مجرد دارند و با توجه به اعمال خاص، اینها جبرهای استلزامی هستند. در ضمن جبرهای استلزامی ضعیفترین نقش را در کلاسی که توضیح داده شد بازی می‌کنند که قابل مقایسه با نقشی است که جبر بول برای منطق کلاسیک بازی می‌کند. این اهمیت جبرهای استلزامی را به عنوان ابزاری در منطق‌های چندارزشی بیان می‌کند.

۱_۲ جبرها و خواص مقدماتی

تعریف ۱_۲_۱: مجموعه X را یک فضای توپولوژی گوییم اگر بازای هر $A \subset X$ وجود داشته باشد یک مجموعه وابسته $IA \subset X$، که درون A گفته می‌شود. به طوریکه شرایط زیر برقرار باشد:

$$I(A \cap B) = IA \cap IB \qquad (I_1)$$

$$IA \subset A \qquad (I_2)$$

$$IIA = IA \qquad (I_3)$$

$$IX = X \qquad (I_4)$$

عملگر I را عملگر درونی می‌نامیم.

تعریف ۱_۲_۲: منظور از یک جبر مجرد یا مختصراً یک جبر زوج $(A, (O_\varphi)_{\varphi \in \Phi})$ می‌باشد جاییکه A یک مجموعهٔ غیرتهی و برای هر $\varphi \in \Phi \neq \emptyset$ و برای بعضی مقادیر m، O_φ یک عملگر m_تایی روی A می‌باشد ($m = 0, 1, 2, \ldots$) یعنی اینکه نگاشت $O_\varphi : A^m \longrightarrow A$. مخصوصاً اگر $m = 0$

عملگر m_تایی روی A را یک عضو ثابت $O_\varphi \in A$ می‌دانیم. در حالی که در آن $\Phi = \{۱, \ldots, m\}$، آنگاه یک جبر اغلب بصورت $(A, O_۱, \ldots, O_m)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱_۲_۳: هر مجموعهٔ غیرتهی $A_۰$ و $A_۰ \subset A$ از اعضای جبر مجرد $(A, (O_\varphi)_{\varphi\in\Phi})$ که تحت تمام عملگرهای O_φ، $\varphi \in \Phi$ بسته باشد، به عنوان یک جبر مجرد وابسته به عملگرهای $O_\varphi|_{A_۰}$ و $\varphi \in \Phi$ در نظر گرفته می‌شود و یک زیرجبر جبر $(A, (O_\varphi)_{\varphi\in\Phi})$ گفته می‌شود. از تعریف ۱_۲_۲ نتیجه می‌شود که هر عملگر صفرتایی یا هر عضو ثابت یک جبر پایه به تمام زیرجبرهایش تعلق دارد.

تعریف ۱_۲_۴: جبرهای $(A, (O_\varphi)_{\varphi\in\Phi})$ و $(B, (O'_\varphi)_{\varphi\in\Phi'})$ را مشابه گوییم اگر $\Phi = \Phi'$ و برای هر $\varphi \in \Phi$ عملگرهای O_φ و O'_φ از نظر آرگومان هم عدد باشند.

۱_۳ جبر استلزامی

تعریف ۱_۳_۱: یک جبر مجرد $(A, ۱, \Rightarrow)$ که در آن ۱ یک عملگر صفرتایی و $\Rightarrow$ یک عملگر دوتایی است یک جبر استلزامی گفته می‌شود در صورتیکه شرایط زیر برای هر $a, b, c \in A$ صادق باشد:

$(i_۱)$ $$a \Rightarrow a = ۱$$

$(i_۲)$ اگر $a \Rightarrow b = ۱$, $b \Rightarrow c = ۱$ آنگاه $a \Rightarrow c = ۱$

$(i_۳)$ اگر $a \Rightarrow b = ۱$, $b \Rightarrow a = ۱$ آنگاه $a = b$

$(i_۴)$ $$a \Rightarrow ۱ = ۱$$

گزاره ۱_۳_۲: فرض کنید $(A, ۱, \Rightarrow)$ یک جبر استلزامی باشد. آنگاه:

(I) $a \le b$ اگر و فقط اگر $a \Rightarrow b = ۱$

یک رابطه ترتیب روی A تعریف می‌کند. عضو ۱ بزرگترین عضو در مجموعهٔ مرتب $(A, \le)$ است.

اثبات: شرایط $(i_۱)$، $(i_۲)$ و $(i_۳)$ به ترتیب خواص انعکاسی، تعدی و پادتقارنی $\le$ را نتیجه می‌دهند.

برعکس، ملاحظه می‌شود که در هر مجموعه مرتب $(A, \leq)$ با بزرگترین عضو ۱ می‌توان یک عملگر دوتایی $\Rightarrow$ تعریف کرده در صورتیکه $(A, 1, \Rightarrow)$ یک جبر استلزامی باشد. برای مثال عملگر $\Rightarrow$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a \Rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{اگر و فقط اگر } a \leq b \\ a_0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

جاییکه $a_0 \neq 1$ یک عضو ثابت در A است. این عملگر در شرایط $(i_1) - (i_4)$ صدق می‌کند.

قضیه ۱ـ۳ـ۳: در هر جبر استلزامی $(A, 1, \Rightarrow)$ شرایط $a \Rightarrow b = 1$ و $a = 1$ ایجاب می‌کند $b = 1$.

اثبات: از (i_3) و (i_4) نتیجه می‌شود.

مثال: دو جبر مجرد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{A} = (A, 1, \Rightarrow) \quad , \quad \mathcal{B} = (B, 1', \Rightarrow')$$

جاییکه $A = \{1, a_1, a_2\}$ و $B = \{1', b\}$ و عملگرهای $\Rightarrow$ و $\Rightarrow'$ بصورت زیر تعریف شده‌اند:

$$a_1 \Rightarrow 1 = a_2 \Rightarrow 1 = a_1 \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow a_2 = 1 \Rightarrow 1 = 1,$$

$$1 \Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = a_1 \Rightarrow a_2 = a_2 \Rightarrow a_1 = a_1,$$

$$b \Rightarrow' b = b \Rightarrow' 1' = 1' \Rightarrow' b = 1' \Rightarrow' 1' = 1' .$$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که $\mathcal{A}$ یک جبر استلزامی است و $\mathcal{B}$ چون در شرط (i_3) صدق نمی‌کند جبر استلزامی نیست.

۱ـ۴ جبر استلزام مثبت

تعریف ۱ـ۴ـ۱: یک جبر مجرد $(A, 1, \Rightarrow)$ همراه با یک عملگر صفرتایی ۱ و عملگر دوتایی $\Rightarrow$ یک جبر استلزام مثبت نامیده می‌شود در صورتیکه برای هر $a, b, c \in A$ شرایط زیر برقرار باشند:

$$a \Rightarrow (b \Rightarrow a) = 1 \qquad (p_1)$$

$$(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)) = 1, \qquad (p_2)$$

اگر $a \Rightarrow b = 1$, $b \Rightarrow a = 1$ آنگاه $a = b$ $\qquad (p_3)$

$$a \Rightarrow 1 = 1 \qquad (p_4)$$

مشاهده می‌شود که در هر جبر استلزام مثبت خاصیت زیر برقرار است:

اگر $a \Rightarrow b = 1$ و $a = 1$ آنگاه $b = 1$ $\qquad (1)$

در حقیقت، اگر شرط صدق کند، آنگاه $1 \Rightarrow b = 1$ و بوسیلهٔ (p_4) $b \Rightarrow 1 = 1$. بنابراین با استفاده از (p_3) بدست می‌آوریم $b = 1$. و مستقیماً از (p_1) نتیجه می‌شود که:

اگر $a = 1$ آنگاه $b \Rightarrow a = 1$ $\qquad (2)$

قضیه ۱ـ۴ـ۲: هر جبر استلزام مثبت $(A, 1, \Rightarrow)$ یک جبر استلزامی است و هر جبر استلزامی که در (p_1) و (p_2) صدق کند یک جبر استلزام مثبت است.

اثبات: بوسیله (p_2) داریم:

$$(a \Rightarrow ((a \Rightarrow a) \Rightarrow a) \Rightarrow ((a \Rightarrow (a \Rightarrow a)) \Rightarrow (a \Rightarrow a) = 1$$

و بوسیله (p_1) داریم:

$$a \Rightarrow ((a \Rightarrow a) \Rightarrow a) = 1$$

با در نظر گرفتن رابطه (۱) بدست می‌آوریم:

$$(a \Rightarrow (a \Rightarrow a)) \Rightarrow (a \Rightarrow a) = 1$$

با بکارگیری مجدد (p_1) و (۱) خواهیم داشت $a \Rightarrow a = 1$ برای هر $a \in A$. بنابراین (i_1) برقرار است. برای اثبات (i_2) فرض می‌کنیم $a \Rightarrow b = 1$ و $b \Rightarrow c = 1$. با بکارگیری (۲) بدست می‌آوریم $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) = 1$ و داریم $a \Rightarrow b = 1$. بنابراین بوسیله (p_2) و (۱) بدست می‌آوریم $a \Rightarrow c = 1$. شرایط (i_3) و (i_4) بترتیب همانند (p_3) و (p_4) هستند. دومین گزاره بدیهی می‌باشد.

مثال: اگر $A = \{a, 1\}$ و $a \leq 1$ و $a \neq 1$ آنگاه $(A, 1, \Rightarrow)$ همراه با عملگر $\Rightarrow$ تعریف شده بوسیله معادلات

$$a \Rightarrow a = a \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \quad , \quad 1 \Rightarrow a = a$$

یک مثال برای جبر استلزام مثبت می‌باشد.

یک فضای توپولوژیک X همراه با یک عملگر داخلی I را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $G(X)$ کلاس تمام زیرمجموعه‌های باز X باشد. آنگاه $(G(X), X, \Rightarrow)$ جاییکه برای هر $Y, Z \in G(X)$ داریم:

$$Y \Rightarrow Z = I((X - Y) \cup Z) \tag{۳}$$

یک جبر استلزام مثبت است. در این جبر رابطهٔ ترتیب $\leq$ بوسیله (I) تعریف شده و با شمول نظریه مجموعه‌ها یکسان است. واضح است که هر کلاس غیر تهی $G_\circ(X) \subseteq G(X)$ که تحت عملگر $\Rightarrow$ تعریف شده در (۳) بسته باشد در شرط $X \in G_\circ(X)$ صدق کرده و همچنین یک جبر استلزام مثبت می‌باشد. از طرف دیگر هر زیرجبر یک جبر استلزام مثبت $(G(X), X, \Rightarrow)$ یک جبر استلزام مثبت بوده و "جبر استلزام مثبت مجموعه‌ها" نامیده می‌شود.

چون بنا به قضیه فوق هر جبر استلزام مثبت یک جبر استلزامی است، پس رابطه $\leq$ تعریف شده در گزاره ۱ـ۳ـ۲ صادق بوده و داریم:

قضیه ۱ـ۴ـ۳: در هر جبر استلزام مثبت $(A, 1, \Rightarrow)$ شرایط زیر برقرارند:

$$a \le b \Rightarrow a \tag{۴}$$

$$a \le b \Rightarrow c \quad \text{ایجاب می‌کند} \quad b \le a \Rightarrow c \tag{۵}$$

$$a \le (a \Rightarrow b) \Rightarrow b \tag{۶}$$

$$۱ \Rightarrow a = a \tag{۷}$$

$$\text{اگر} \quad b \le c \quad \text{آنگاه} \quad a \Rightarrow b \le a \Rightarrow c \tag{۸}$$

$$\text{اگر} \quad a \le b \quad \text{آنگاه} \quad b \Rightarrow c \le a \Rightarrow c \tag{۹}$$

$$a \Rightarrow (a \Rightarrow b) = a \Rightarrow b \tag{۱۰}$$

$$a \Rightarrow (b \Rightarrow c) = b \Rightarrow (a \Rightarrow c) \tag{۱۱}$$

$$a \Rightarrow b \le (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c) \tag{۱۲}$$

$$b \Rightarrow c \le (a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c) \tag{۱۳}$$

خاصیت (۴) معادل با (p_1) است.

اثبات: برای (۵) فرض می‌کنیم که $a \le b \Rightarrow c$ یعنی $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) = ۱$ در نتیجه بوسیله (p_2) و (۱) داریم:

$$(a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c) = ۱$$

از طرف دیگر با استفاده از رابطه (۴) داریم: $b \le a \Rightarrow b$، بنابراین $b \le a \Rightarrow c$. چون ۱ بزرگترین عضو است داریم: $(۱ \Rightarrow a) \Rightarrow a = ۱$ و با توجه به (۶) بدست می‌آوریم $۱ \le (۱ \Rightarrow a) \Rightarrow a$. بنابراین $(۱ \Rightarrow a) \Rightarrow a = ۱$ یعنی اینکه: $۱ \Rightarrow a \le a$. از طرف دیگر بنا بر (۴) $a \le ۱ \Rightarrow a$. بنابراین $۱ \Rightarrow a = a$ و (۷) برقرار است.

برای اثبات (۸) فرض می‌کنیم که $b \le c$ یعنی $b \Rightarrow c = ۱$. بنابراین طبق (۲): $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) = ۱$ با بکارگیری (p_2) و (۱) داریم $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c) = ۱$ یعنی