دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

گراف‌های مقسوم‌علیه صفر و ایده‌آل پوچ‌کن حلقه‌های تعویض‌پذیر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد (ریاضی محض گرایش جبر)

زهرا راکعی

استاد راهنما

دکتر محمود بهبودی

۱۳۸۷

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد (ریاضی محض گرایش جبر)خانم‌زهرا راکعی

تحت عنوان

گراف‌های مقسوم‌علیه صفر و ایده‌آل پوچ‌کن حلقه‌های تعویض‌پذیر

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱– استاد راهنمای پایان‌نامه		دکتر محمود بهبودی

۲– استاد مشاور پایان‌نامه		دکتر غلامرضا امیدی

۳– استاد داور ۱

()

۴– استاد داور ۲

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده		دکتر رسول نصر اصفهانی

فهرست مطالب

چکیده:

گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی R که با $\Gamma(R)$ نمایش داده می‌شود، گرافی است با مجموعه‌ی رئوس $Z(R) \setminus \{0\}$ که دو رأس a و b در آن مجاورند اگر $ab = 0$. در این پایان‌نامه، ابتدا با بررسی مسطح بودن یا نبودن گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های تعویض‌پذیر و یک‌دار، تمام حلقه‌هایی که برای آن‌ها $\Gamma(R)$ مسطح است، مشخص خواهد شد. سپس گرافی را معرفی خواهیم کرد که معتقدیم بهتر از گراف مقسوم‌علیه صفر، خواص حلقه را تعیین می‌کند. در این گراف که آن گراف ایده‌آل پوچ‌کن حلقه‌ی R می‌نامیم و با $\mathbb{AG}(R)$ نمایش می‌دهیم، رئوس گراف، ایده‌آل‌های غیر صفر حلقه‌ی R هستند که دارای پوچ‌ساز غیر صفر باشند. دو رأس I و J در $\mathbb{AG}(R)$ متصل اند هرگاه $IJ = (0)$. مطالعه‌ی خواص این گراف و نتایج جالبی که به دست آمده است، صحت این ادعا را ثابت خواهد کرد.

مقدمه

مطالعه‌ی ساختارهای جبری مانند حلقه‌ها، گروه‌ها، نیم‌گروه‌ها و مدول‌ها به وسیله‌ی گراف، یکی از موضوعات مورد توجه ریاضی‌دانان در دهه‌های اخیر بوده است (برای مثال می‌توانید به [۲]، [۸]، [۱۶]، [۲۳] مراجعه کنید). در این‌جا، به اقتضای موضوع پایان‌نامه، اشاره‌ای کوتاه به تاریخچه‌ی بررسی حلقه‌ها توسط گراف، خواهیم داشت. این مطالعات از سال ۱۹۸۸ با مقاله‌ی بک[۱]، آغاز شد (مرجع [۷] را ببینید). وی تمام عنصرهای حلقه را به عنوان رأس‌های گراف در نظر گرفت و دو رأس a و b را مجاور در نظر گرفت هرگاه $ab = 0$. سپس به بررسی رنگ‌آمیزی این گراف‌ها پرداخت. اندرسون[۲] و نسیر[۳] در ۱۹۹۱ کار بک را با اندکی تغییر ادامه دادند (مرجع [۳] را ببینید). در حقیقت آن‌ها رئوس گراف را به مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه کاهش دادند و گراف مزبور را گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه نامیدند. در ۱۹۹۸ اندرسون[۴] و لیوینگستون[۵] با حذف صفر از مجموعه‌ی رئوس (یعنی مقسوم‌علیه‌های صفر)، به بررسی بعضی از خواص گراف‌های مقسوم‌علیه صفر پرداختند ([۴]). شارما[۶] و بهاتوادکر[۷] در ۱۹۹۵ گراف دیگری به‌نام گراف هم‌ماکزیمال (که با $G(R)$ نمایش داده می شود) روی حلقه‌ی R تعریف کردند که رئوس آن عناصر حلقه R بودند. دو عنصر a و b در این گراف با هم مجاورند اگر و تنها اگر $Ra + Rb = R$ (مرجع [۲۴] را ببینید). همچنین میمنی[۸] و همکارانش، در مرجع [۲۱] مطالعه‌ی گراف هم‌ماکزیمال حلقه‌ها را ادامه داده‌اند. اخیراً اندرسون[۹] و بداوی[۱۰] در [۶] گراف جمعی حلقه‌ی R را معرفی و بررسی نموده‌اند. در این گراف که با $T(\Gamma(R))$ نشان داده شده است، رئوس گراف تمام عنصرهای حلقه‌ی R هستند و دو عنصر a و b از R در این گراف مجاور هستند اگر و تنها اگر $a + b \in Z(R)$. همین‌طور بهبودی در [۸] گراف‌های

I. Beck[۱]
D. D. Anderson[۲]
M. Naseer[۳]
D. F. Anderson[۴]
P. S. Livingston[۵]
P. K. Sharma[۶]
S. M. Bhatwadekar[۷]
H. R. Maimani[۸]
D. F. Anderson[۹]
A. Badawi[۱۰]

مقسوم‌علیه صفر روی حلقه‌ها را به مدول‌های روی حلقه‌های تعویض‌پذیر توسیع داده است.
آن‌چه گفته شد، شرح مختصری بود بر مقالاتی که نقطه‌ی آغازین یک رویکرد جدید به مطالعه‌ی حلقه‌ها به وسیله‌ی گراف هستند. اما مطالعه‌ی خواص چنین گراف‌هایی، سال‌هاست که مورد توجه علاقه‌مندان به مباحث جبری، قرار دارد و صدها مقاله در این زمینه موجود است که در این‌جا مجالی برای پرداختن به آن‌ها نیست. در ادامه اشاره‌ای خواهیم داشت بر آن‌چه در این پایان نامه مورد مطالعه قرار می‌گیرد.
لازم به ذکر است که اساس کار این پایان نامه برگرفته از مراجع [۱۲] و [۲۶] و همچنین حاوی مقاله‌های مستخرج [۱۰] و [۱۱] می‌باشد. در حقیقت دو مرجع اخیر حاصل کار تحقیقاتی مشترک اینجانب با استاد راهنما در راستای پایان نامه است که برای چاپ ارسال شده‌اند.
این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل می‌باشد. در فصل اول، برخی تعاریف، گزاره‌ها و قضیه‌های مورد نیاز، بیان خواهد شد. فصل‌های دوم و سوم، به عنوان نمونه‌ای از مطالعاتی که در بالا به آن‌ها اشاره شد، نگاهی بر خاصیت مسطح بودن گراف‌های مقسوم‌علیه صفر خواهد داشت. در فصل دوم، گراف‌های مقسوم‌علیه صفر متناهی معرفی خواهند شد و نشان داده می‌شود که گراف‌های با ۳۲ عنصر یا بیشتر، مسطح نیستند. در فصل سوم نشان داده می‌شود که گراف‌های مقسوم‌علیه صفر نامتناهی مسطح تنها می‌توانند به یکی از سه فرم گراف ستاره، $K_{2,\alpha}$، یا گرافی که از افزودن یک یال بین رئوس از درجه‌ی نامتناهی یک $K_{2,\alpha}$ به دست می آید (که α کوچکتر یا مساوی مرتبه‌ی اعداد حقیقی است)، باشند. نکته‌ی قابل توجهی که در مورد این‌گونه مطالعات می‌توان به آن اشاره کرد، این است که در تمامی آن‌ها، ابزار مطالعه، تمام یا بخشی از عناصر حلقه‌ی R هستند. اما در نظریه‌ی حلقه‌ها، خواص حلقه، بیش از آن که به عناصر آن بستگی داشته باشد، به رفتار ایده‌آل‌های آن بستگی دارد. این واقعیت، ایده‌ی اصلی نگاهی جدید به این موضوع است. آن‌چه در فصل چهارم می آید، نتایج حاصل از معرفی گرافی جدید بر روی حلقه‌ی R، با نام گراف ایده‌آل پوچ‌کن R، می‌باشد ([۱۰] و [۱۱] را ببینید). در این گراف که با $\mathbb{AG}(R)$ نشان داده می‌شود، رئوس گراف ایده‌آل‌های ناصفر R هستند که دارای پوچ‌ساز غیرصفر می‌باشند. دو رأس I و J در این گراف با هم مجاورند هرگاه $IJ = (0)$. برای اثبات این ادعا که گراف‌های ایده‌آل پوچ‌کن حلقه‌ی R، ابزارهای بهتری برای مطالعه‌ی خواص حلقه‌ها هستند، قضایای جالبی را در این مقاله‌ها اثبات کرده‌ایم. به عنوان مثال نشان می‌دهیم که حلقه‌ی R نوتری (آرتینی) است اگر و تنها اگر دارای شرط ACC (DCC) بر روی رئوس گراف ایده‌آل پوچ‌کن R باشد. همبندی $\mathbb{AG}(R)$ و پیدا کردن کرانی برای قطر و کمر این گراف، مشابه آن‌چه برای گراف‌های مقسوم‌علیه صفر به‌دست آمده است، از جمله نتایجی است که به آن‌ها اشاره خواهد شد. همچنین به بررسی قطر و رنگ آمیزی این گراف پرداخته‌ایم و نتایج قابل توجهی را در این زمینه‌ها به دست آورده‌ایم که در فصل چهارم به طور مفصل توضیح داده خواهند شد.

فصل ۱

پیش نیازها

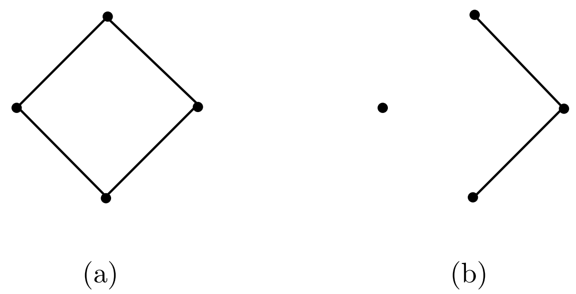
۱–۱ مقدمه‌ای بر نظریه گراف

در این بخش، به معرفی برخی از مفاهیم نظریه گراف، که در طی این پایان‌نامه با آن سر و کار داریم، خواهیم پرداخت. برای هر گراف G، مجموعه رئوس G را با $V(G)$ و مجموعه یال‌های آن را با $E(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱. برای هر دو رأس x و y از G ، یک مسیر[۱] بین x و y، دنباله‌ای مانند x، e_1، z_1، e_2، ...، z_{n-1}، e_n، y است که z_iها، $(1 \leq i \leq n-1)$، اعضای $V(G)$ و e_iها، $(1 \leq i \leq n)$، اعضای $E(G)$ هستند، به‌طوری که e_i یال واصل بین رئوس قبل و بعد از خود، در دنباله‌ی مذکور است. n را طول این مسیر می‌نامند. همچنین طول کوتاه‌ترین مسیر بین x و y را فاصله‌ی x و y می‌نامند و با $d(x,y)$ نشان می‌دهند. قطر گراف G، که با $diam(G)$ نمایش داده می‌شود، بیشترین فاصله‌ی بین رئوس G است.

تعریف ۲.۱. گراف G را همبند[۲] می‌نامند هرگاه بین هر دو رأس آن، دست کم یک مسیر موجود باشد.

---
[۱] path
[۲] connected



شکل ۱—۱: (a) گراف همبند، (b) گراف ناهمبند

مفهوم دور در گراف، حالت خاصی از تعریف مسیر می‌باشد.

تعریف ۳.۱. دور[۳] C در گراف G، مسیری از یک رأس به خودش است. اگر طول این مسیر n باشد، C را دوری به طول n می‌نامند. طول کوچک‌ترین دور گراف G را کمر[۴] G می‌گویند و با $g(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۴.۱. برای هر رأس x از گراف G، درجه‌ی[۵] این رأس، تعداد رئوس $y \neq x$ از G است که با x مجاورند. این کمیت با $deg(x)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۵.۱. اگر W زیر مجموعه‌ای از $V(G)$ باشد، منظور از زیر گراف تولید شده[۶] توسط W، زیر گرافی از G است که رئوس آن اعضای W باشند و یال‌های آن، یال‌هایی از G که این رئوس را به هم وصل می‌کنند.

حال به معرفی بعضی از انواع خاص گراف، خواهیم پرداخت.

تعریف ۶.۱. گراف G را کامل[۷] می‌گوییم هرگاه تمامی رئوس آن با هم مجاور باشند. گراف کامل را با K_n نمایش می‌دهیم، که n معرف تعداد رئوس گراف است. بزرگ‌ترین زیر گراف کامل گراف G را

circle[۳]
girth[۴]
degree[۵]
spaneded[۶]
complete[۷]

کلیک[۸] G می‌گویند و تعداد رئوس آن را با $cl(G)$ نشان می‌دهند. بدیهی است که اگر G گراف کامل K_n باشد، $cl(G) = n$.

تعریف ۷.۱. گراف G را دوبخشی[۹] می‌گوییم هر گاه مجموعه رئوس آن را بتوان به دو مجموعه X و Y چنان افراز کرد که هیچ دو رأسی که در یک مجموعه قرار دارند، در G مجاور نباشند. به راحتی می‌توان مشاهده کرد که یک گراف دو بخشی است اگر و تنها اگر دور فرد نداشته باشد.
اگر تمامی رئوس مجموعه X با تمامی رئوس مجموعه Y مجاور باشند، G را دو بخشی کامل[۱۰] می‌گوییم و با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم که در آن m و n تعداد رئوس X و Y را نشان می‌دهند. گراف $K_{1,n}$ را گراف ستاره می‌نامیم.

مانند هر مبحث دیگری در ریاضیات، یکریختی، ابزاری مناسب برای دسته بندی گراف‌هایی است که بعضی از خواص آن‌ها مشترک است.

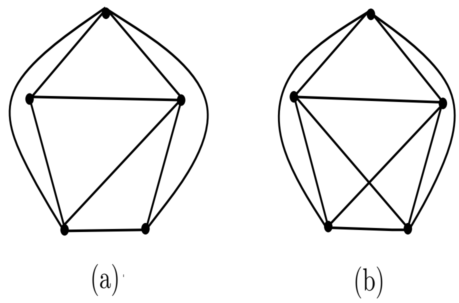
تعریف ۸.۱. دو گراف G و H را یکریخت[۱۱] می‌گویند هرگاه نگاشت $\varphi : V(G) \to V(H)$ موجود باشد، به طوری که اگر دو رأس x و y از G مجاور باشند، $\varphi(x)$ و $\varphi(y)$ نیز در H مجاور باشند، و برعکس.

یکی از مفاهیم کلیدی که در فصل‌های سه و چهار این پایان‌نامه با آن سر و کار داریم، مفهوم گراف مسطح است.

تعریف ۹.۱. گراف G را مسطح[۱۲] می‌گوییم هرگاه بتوان آن را در صفحه چنان رسم کرد که یال‌ها مگر در رئوس، با یکدیگر تلاقی نداشته باشند. در غیراین صورت، G را غیرمسطح می‌گوییم.

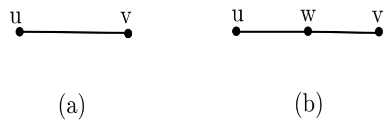
در جهت بیان یک معیار مناسب برای مسطح بودن گراف، به تعریف زیر نیازمندیم.

[۸] clique
[۹] bipartite
[۱۰] complete bipartite
[۱۱] isomorphic
[۱۲] planar



شکل ۱—۲: (a) گراف مسطح، (b) گراف غیرمسطح

تعریف ۱۰.۱. یک زیر تقسیم[۱۳] از گراف G، گرافی است که حاصل تقسیم برخی از یال‌های G باشد.اگر یال متصل بین رئوس u و v از گراف G را با $\{u,v\}$ نمایش دهیم، یک تقسیم یال $\{u,v\}$ از افزودن رأسی مانند w به مجموعه رئوس G به دست می آید، به طوری که یال $\{u,v\}$ از گراف حذف شده، یال‌های $\{u,w\}$ و $\{w,v\}$ جایگزین شوند (شکل ۱—۳).



شکل ۱—۳: یال uv و زیر تقسیمی از آن

قضیه زیر که توسط کوراتوسکی[۱۴] بیان و اثبات شده است و به همین نام نیز مشهور است، گراف‌های متناهی مسطح را مشخص‌سازی می‌کند.

قضیه ۱۱.۱. یک گراف متناهی، مسطح است اگر و تنها اگر شامل هیچ زیر گرافی نباشد که با یک زیر تقسیم از K_5 یا $K_{3,3}$ یکریخت باشد.

یکی دیگر از مفاهیم نظریه گراف که به آن نیاز خواهیم داشت، رنگ آمیزی گراف‌هاست.

قرارداد ۱۲.۱. در سراسر این پایان نامه، برای هر مجموعه‌ی X، نماد $|X|$ را به معنی مرتبه‌ی مجموعه‌ی X به کار خواهیم برد.

---

[۱۳] subdivision
[۱۴] K. Kuratowski

تعریف ۱۳.۱. یک رنگ آمیزی گراف G، تابعی است مثل $f : V(G) \to N$، که N زیر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی است، به طوری که برای هر دو رأس مجاور x و y از G، $f(x) \neq f(y)$. کوچکترین عدد n را که برای آن یک رنگ آمیزی G وجود داشته باشد که $| N |= n$، عدد رنگی گراف G می‌نامند و با $\chi(G)$ نشان می‌دهند. بدیهی است که برای هر گراف G، $\chi(G) \geq cl(G)$.

لم ۱۴.۱. عدد رنگی گراف G دو است اگر و تنها اگر G گرافی دوبخشی باشد.

اثبات. فرض کنید عدد رنگی G دو است. کافی است رئوس هم‌رنگ را در یک مجموعه قرار دهید. به عکس، اگر G دوبخشی باشد، تمام رئوسی را که در یک بخش قرار می‌گیرند، می‌توان با یک رنگ، رنگ آمیزی کرد. پس $\chi(G) = ۲$. ■

۱—۲ پیش‌نیازهای جبری

در این بخش، بعضی از مفاهیم، گزاره‌ها و قضایای جبری را که به آن‌ها نیاز داریم، بیان خواهیم کرد. لازم به ذکر است که از این پس منظور از حلقه، حلقه‌ای تعویض‌پذیرو یک‌دار است، مگر این که خلاف آن تصریح شود. بدیهی است که بسیاری از مفاهیم و قضایایی که به آن‌ها خواهیم پرداخت، ممکن است در مورد حلقه‌های غیر تعویض‌پذیرو یا غیر یک‌دار نیز بیان شده باشند، اما در این‌جا به آن اشاره‌ای نخواهد شد. همچنین در مواردی که قضایا و گزاره‌ها در مراجع در حالت کلی آورده شده‌اند، به بیان آن‌ها در حالت تعویض‌پذیرو یک‌دار اکتفا می‌کنیم.

ابتدا به معرفی چند ایده‌آل خاص در حلقه‌ها خواهیم پرداخت.

تعریف ۱۵.۱. فرض کنید x عنصری از حلقه‌ی R باشد. $(\circ : x) = \{y \in R : xy = \circ\}$. حال اگر a و b عناصری از $(\circ : x)$ باشند، $ax = \circ$ و $bx = \circ$ و در نتیجه $(a+b)x = \circ$. همچنین اگر $r \in R$، $rax = \circ$. یعنی $(\circ : x)$ ایده‌آلی از R است.

تعریف ۱۶.۱. مجموع ایده‌آل‌های مینیمال حلقه‌ی R را ساکل[۱۵] R می‌گویند و با $soc(R)$ نمایش می‌دهند. از آن‌جا که مجموع ایده‌آل‌ها، ایده‌آل است، ساکل R، ایده‌آلی از R است.

---
[۱۵] socle

تعریف ۱.۱۷. اگر X زیرمجموعه‌ای دلخواه از R باشد، پوچ‌ساز X، که با $Ann(X)$ نشان داده می‌شود، به صورت $Ann(X) = \{y \in R : yX = 0\}$ تعریف می‌شود. اگر $X = \{x\}$، $Ann(X)$ را با $Ann(x)$ نشان می‌دهند. به راحتی می‌توان دید که $Ann(X)$ ایده‌آلی از R است.

ایده‌آل I را یک ایده‌آل پوچ‌ساز[16] می‌گوییم اگر عنصر $x \in R$ موجود باشد که $I = Ann(x)$.

تعریف ۱.۱۸. زیرمجموعه‌ی S از R در شرط زنجیر افزایشی (ACC) صدق می‌کند اگر هر زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های R که مشمول در S است، ایستا باشد. به طور مشابه زیرمجموعه‌ی S از R در شرط زنجیر کاهشی (DCC) صدق می‌کند اگر هر زنجیر نزولی از ایده‌آل‌های R که مشمول در S است، ایستا باشد. اگر حلقه‌ی R دارای شرط ACC بر ایده‌آل‌هایش باشد، آن را نوتری، و اگر دارای شرط DCC بر ایده‌آل‌هایش باشد، آن را آرتینی می‌گویند.

گزاره ۱.۱۹. فرض کنید M مدولی روی حلقه‌ی تعویض‌پذیرR باشد و G زیرمدولی از M.

(۱) R—مدول M نوتری است اگر و تنها اگر G و M/G نوتری باشند.

(۲) R—مدول M آرتینی است اگر و تنها اگر G و M/G آرتینی باشند.

اثبات. گزاره ۷.۱۷ از [۲۵]. ■

قضیه ۱.۲۰. فرض کنید A یک R—مدول باشد و I ایده‌آلی از R که بین ایده‌آل‌های پوچ‌ساز عناصر غیرصفر A، ماکزیمال است. در این صورت I یک ایده‌آل اول است.

اثبات. قضیه ۶ از [۱۸]. ■

لم ۱.۲۱. (لم براور[17]) فرض کنید I ایده‌آل مینیمال از حلقه‌ی R باشد. در این صورت $I^2 = (0)$ یا $I = Re$ برای یک عنصر خودتوان e از I.

اثبات. لم ۲۲ − ۱۰ از [۱۹]. ■

---

[16] annihilator ideal

[17] Breuer's Lemma

لم ۲۲.۱. (لم ناکایاما) فرض کنید M یک مدول متناهیاً تولید شده روی حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد و I ایده‌آلی از R که I زیر مجموعه‌ای از $J(R)$، جیکوبسون رادیکال R باشد. اگر $MI = M$ آن‌گاه $M = (0)$.

اثبات. لم ۸.۲۴ از [۲۵]. ■

دو لم زیر به ترتیب تمرین‌های ۷ و ۸ صفحه‌ی ۲۴ از [۱۹] هستند.

لم ۲۳.۱. فرض کنید B_1، B_2، ...، B_n ایده‌آل‌هایی از R باشند. $R = B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_n$ اگر و تنها اگر عناصر خودتوان e_1، ...، e_n وجود داشته باشند که برای هر $i \neq j$، $e_ie_j = 0$ و برای هر i، $B_i = Re_i$.

لم ۲۴.۱. فرض کنید $R = B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_n$ که B_iها ایده‌آل‌های حلقه‌ی R باشند. در این صورت هر ایده‌آل R به فرم $I = I_1 \oplus I_2 \oplus ... \oplus I_n$ است که برای هر i، I_i ایده‌آلی از حلقه‌ی B_i است.

حال با استفاده از ۲۳.۱، به اثبات لم زیر می‌پردازیم که در فصل ۴ به آن نیاز داریم.

لم ۲۵.۱. اگرحلقه‌ی آرتینی R موضعی نباشد، شامل یک عنصر خودتوان است.

اثبات. چون R آرتینی است، $R = R_1 \oplus R_2 \oplus ... \oplus R_n$ که R_iها ایده‌آل‌هایی از R هستند. در این صورت بنابر ۲۳.۱، عناصر خودتوان e_1، ...، e_n وجود دارند که برای هر i، $R_i = Re_i$ و برای هر $i \neq j$، $e_ie_j = 0$. قرار دهید $e = e_1 + e_2 + ... + e_n$. در این صورت e عنصری از R است که $e^2 = e_1^2 + ... + e_n^2 = e_1 + ... + e_n = e$. ■

در ادامه، نوع خاصی از حلقه‌ها را معرفی می‌کنیم که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف ۲۶.۱. حلقه‌ی R را تقلیل یافته می‌گویند اگر برای هر $r \in R$، $r^2 = 0$ ایجاب کند که $r = 0$.

۱–۳ گراف‌های مقسوم‌علیه صفر

عنصر a از حلقه R را مقسوم‌علیه صفر می‌گوییم هرگاه عنصر غیرصفر b در R باشد که $ab = 0$. مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی R را با $Z(R)$ نشان می‌دهیم. $\Gamma(R)$، که گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه R نامیده می‌شود، گرافی است که مجموعه رئوس آن $Z(R) \setminus \{0\}$ است و دو رأس x و y دراین گراف مجاورند هرگاه $xy = 0$. قضایای زیر، بعضی از خواص مقدماتی این گراف‌ها را بیان می‌کنند.

قضیه **۲۷.۱.** برای هر حلقه‌ی R، $\Gamma(R)$ گرافی همبند است و $diam(\Gamma(R)) \leq 3$. به علاوه اگر $\Gamma(R)$ دارای دور باشد، $g(\Gamma(R)) \leq 7$.

اثبات. فرض کنید x و y عناصر متمایزی از $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$ باشند. اگر $xy = 0$، آن‌گاه $d(x,y) = 1$. بنابراین فرض کنید $xy \neq 0$.
اگر $x^2 = y^2 = 0$، آن‌گاه $x - xy - y$ مسیری به طول ۲ است و بنابراین $\mathrm{d}(x,y) = 2$.
اگر $x^2 = 0$ و $y^2 \neq 0$، آن‌گاه چون $y \in Z(R)^*$، $b \in Z(R)^* - \{x,y\}$ وجود دارد به طوری که $by = 0$. در صورتی که $bx = 0$، آن‌گاه $x - b - y$ مسیری به طول ۲ است و هرگاه $bx \neq 0$، آن‌گاه $x - bx - y$ مسیری به طول ۲ است و بنابراین در این دو حالت $\mathrm{d}(x,y) = 2$. در صورتی که $y^2 = 0$ و $x^2 \neq 0$ به طور مشابه عمل می‌کنیم.
حال فرض کنید xy، x^2 و y^2 همگی ناصفر هستند. بنابراین $a,b \in Z(R)^* - \{x,y\}$ وجود دارد به طوری که $ax = by = 0$. اگر $a = b$ باشد، آن‌گاه $x - a - y$ مسیری به طول ۲ است. بنابراین فرض کنید $a \neq b$، در این صورت اگر $ab = 0$، آن‌گاه $x - a - b - y$ مسیری به طول ۳ است و در نتیجه $\mathrm{d}(x,y) \leq 3$. در صورتی که $ab \neq 0$، آن‌گاه $x - ab - y$ مسیری به طول ۲ است و در نتیجه $\mathrm{d}(x,y) = 2$. پس $\mathrm{d}(x,y) \leq 3$ و بنابراین $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$. از طرفی طبق آن‌چه در طول اثبات دیدیم بین هر دو رأس حداقل یک مسیر وجود دارد، پس $\Gamma(R)$ همبند است. چون در قضیه زیر ثابت می‌شود که $g(\Gamma(R)) \leq 4$، اثبات $g(\Gamma(R)) \leq 7$ برای جلوگیری از طولانی شدن مطلب، حذف می‌شود. ■

قضیه‌ی فوق، در سال ۱۹۹۹ توسط اندرسون و لیوینگستون بیان شد. اما در سال ۲۰۰۱ مولی قضیه‌ی زیر را اثبات کرد.

قضیه **۲۸.۱.** اگر $\Gamma(R)$ دارای دور باشد، $g(\Gamma(R)) \leq 4$.

اثبات. فرض کنید $\Gamma(R)$ شامل دور باشد در این صورت قرار دهید $g(\Gamma(R)) = n \geq 3$ و $C = x_1 \dots x_n$ دور مربوطه باشد. فرض کنید $x_0 := x_n$ و $x_{n+1} := x_1$. در این صورت اگر $i \in \{1, 2, n\}$ وجود داشته باشد که $x_iR \cap \{x_{i-1}, x_{i+1}\} \neq \emptyset$، آن‌گاه قرار دهید

$$l(i) := \begin{cases} (x_1, x_2, x_n) & i = 1, \\ (x_1, x_2, x_3) & i = 2, \\ (x_1, x_{n-1}, x_n) & i = n \end{cases}$$

دیده می‌شود که $l(i)$ برای $i \in \{1, 2, n\}$ دوری با طول ۳ است. به عنوان نمونه برای حالتی که $i = 1$ است داریم $l(1) = (x_1, x_2, x_n)$. از طرفی چون $x_1R \cap \{x_0, x_2\}$، x_2 یا x_n مضربی از x_1 است و $x_1x_2 = x_1x_n = 0$، داریم $x_2x_n = 0$. در نتیجه $l(1)$ دوری به طول ۳ است. بنابراین $g(\Gamma(R)) = 3$.

حال فرض کنید برای هر $i \in \{1, 2, n\}$، $x_iR \cap \{x_{i-1}, x_{i+1}\} = \emptyset$. در این صورت اگر برای هر $i \in \{1, 2, n\}$، $x_iR \subseteq \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, 0\}$. آن‌گاه برای هر $i \in \{1, 2, n\}$ داریم $x_iR \cap \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, 0\} = \{x_i, 0\}$. در نتیجه $x_2R \cap x_nR = 0$. در این حالت (x, x_2, x_n) دوری به طول ۳ است و در نتیجه $g(\Gamma(R)) = 3$. در پایان فرض کنید $i \in \{1, 2, n\}$ وجود داشته باشد که $x_iR \not\subseteq \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, 0\}$. $y \in x_iR \setminus \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, 0\}$ را در نظر بگیرید. قرار دهید

$$l(i, y) := \begin{cases} (x_1, x_2, y, x_n) & i = 1, \\ (x_1, x_2, x_3, y) & i = 2, \\ (x_1, y, x_{n-1}, x_n) & i = n \end{cases}$$

دیده می‌شود که $l(i, y)$ برای $i \in \{1, 2, n\}$ دوری با طول ۴ است و بنابراین $g(\Gamma(R)) \leq 4$. ■

دوشیم تابثا یتحار هب ،تسا [۴] زا ۲.۸ یهیضق هک ریز یهیضق.

قضیه **۲۹.۱.** فرض کنید R یک حلقه تعویض‌پذیرباشد. در این صورت $\Gamma(R)$ یک گراف کامل است اگر و تنها اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ یا برای هر x و y از $Z(R)$، $xy = 0$.

قضیه **۳۰.۱.** فرض کنید R یک حلقه‌ی تقلیل یافته باشد. اگر R بیش از دو ایده‌آل مینیمال داشته باشد و عناصر a و b در $Z(R)$ باشند که (a, b) دارای پوچ‌ساز غیرصفر باشد، آن‌گاه $diam(\Gamma(R)) = 3$.

اثبات. اگر R شامل عناصر a و b باشد که $ab \neq 0$ و $(0 : (a, b)) = 0$، آن‌گاه $d(a, b) = 3$ و از آن‌جا $diam(\Gamma(R)) = 3$. بنابراین فرض کنید R بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد و عناصر

غیرصفر a و b موجود باشند که $ab=0$ و $(0:(a,b))=0$. هر ایده‌آل اول مینیمال R دست‌کم یکی از a و b است و چون $(0:(a,b))=0$، شامل هر دو نمی‌باشد. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید ایده‌آل‌های اول مینیمال P، Q و N از R وجود دارند که $a\in(Q\cap N)\setminus P$ و $b\in P\setminus(Q\cup N)$. قرار دهید $q\in(Q\cap P)\setminus N$. عناصر b و $a+bq$ را در نظر بگیرید. چون R تقلیل یافته است، $ab=0$ و هیچ یک از b و q در N نیست و $b(a+bq)=bq^2\neq 0$. از طرف دیگر $(a,b)=(a+bq,b)$ ایده‌آلی از R است که پوچ‌ساز غیرصفر ندارد. بنابراین $d(a+bq,b)=3$ و از آن‌جا $diam(\Gamma(R))=3$. ■

قضیه ۱.۳۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی تقلیل یافته باشد و $Z(R)$ ایده‌آلی از R نباشد. در این صورت $diam(\Gamma(R))\leq 2$ اگر و تنها اگر R دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد.

اثبات. فرض کنید $Z(R)$ ایده‌آلی از R نباشد. عناصر a و b از $Z(R)$ موجودند که $a+b$ در $Z(R)$ نیست و بنابراین ایده‌آل (a,b) دارای پوچ‌ساز غیرصفر نیست. چون R تقلیل یافته است، حداقل دو ایده‌آل اول مینیمال P و Q در R وجود دارند. به‌علاوه $Z(R)$ اجتماع ایده‌آل‌های اول مینیمال R است.
اگر R بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد، بنابر قضیه‌ی ۱.۳۰، $diam(\Gamma(R))=3$. به عکس، اگر P و Q ایده‌آل‌های اول مینیمال R باشند، $Z(R)=P\cup Q$. فرض کنید $a\in P\setminus Q$ و $b\in Q\setminus P$. به وضوح چون R تقلیل یافته است، $ab\in P\cap Q=(0)$. فرض کنید r و s عناصر متمایزی از $Z(R)$ باشند. چون هیچ عنصر غیرصفری نمی‌تواند در هر دو ایده‌آل P و Q باشد، یا $rs=0$ یا یکی از P و Q شامل (r,s) است. اگر $rs=0$، $d(r,s)=1$. اگر $rs\neq 0$، $rb=vs=0$، اگر $(a,b)\subseteq P$ و $ra=sa=0$ اگر $(a,b)\subseteq Q$. بنابراین اگر $rs\neq 0$، $d(r,s)=2$. بنابراین $diam(\Gamma(R))\leq 2$. ■

لم ۱.۳۲. فرض کنید حلقه‌ی R تقلیل یافته نباشد و I ایده‌آلی از R باشد. اگر I پوچ‌ساز غیرصفر داشته باشد و $q\in Nil(R)$، ایده‌آل $qR+I$ پوچ‌ساز غیرصفر دارد. به خصوص اگر $a\in Z(R)$ و $q\in Nil(R)$، $a+q\in Z(R)$ و $(0:(a,q))\neq(0)$.

اثبات. فرض کنید q یک عنصر پوچ‌توان غیرصفر باشد و برای یک $c\neq 0$، $cI=0$. چون q پوچ‌توان است، عدد طبیعی m وجود دارد که $cq^m=0$ و $cq^{m-1}\neq 0$. در این صورت cq^{m-1} پوچ‌ساز غیرصفری از $qR+I$ است. ■

قضیه ۱.۳۳. فرض کنید حلقه‌ی R تقلیل یافته نباشد. اگر عناصر غیرصفر a و b از $Z(R)$ موجود باشند که $(0:(a,b))=(0)$، آن‌گاه $diam(\Gamma(R))=3$.

اثبات. فرض کنید a و b عناصری از $Z(R)$ باشند که $((a,b)):\circ) = (\circ)$. بنابراین $d(a,b) \neq ۲$. بنابر لم ۳۲.۱، هیچ یک از a و b پوچ‌توان نیستند. اگر $ab \neq \circ$، $d(a,b) = ۳$. بنابراین فرض کنید $ab = \circ$. در این صورت $(a,b)^۲ = (a^۲, b^۲)$ پوچ‌ساز غیرصفر ندارد. بنابراین بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید عنصر پوچ‌توان q وجود دارد که $b^۲q \neq \circ$. چون a مقسوم‌علیه صفر است و q پوچ‌توان است، طبق لم ۳۲.۱، $a + bq$ یک مقسوم‌علیه صفر است. $a + bq$ و b را در نظر بگیرید. چون $(a,b) = (a + bq, b)$ پوچ‌ساز غیرصفر ندارد، $d(a + bq, b) \neq ۲$. اما $(a + bq)b = b^۲q \neq \circ$. بنابراین $d(a + bq, b) = ۳$ و از آن‌جا $diam(\Gamma(R)) = ۳$. ■

نتیجه **۳۴.۱.** اگر حلقه‌ی R تقلیل یافته‌و $Z(R)$ ایده‌آل نباشد، $diam(\Gamma(R)) = ۳$.

قضیه **۳۵.۱.** فرض کنید R یک حلقه باشد.

(۱) $diam(\Gamma(R)) = \circ$ اگر و تنها اگر R حلقه‌ای (غیر تقلیل یافته) یکریخت با $\mathbb{Z}_۴$ یا $\mathbb{Z}_۲[X]/[X^۲]$ باشد.

(۲) $diam(\Gamma(R)) = ۱$ اگر و تنها اگر برای هر دو عنصر متمایز x و y از $Z(R)$، $xy = \circ$ و R دست کم دو مقسوم‌علیه صفر غیرصفر داشته باشد.

(۳) $diam(\Gamma(R)) = ۲$ اگر و تنها اگر (الف) R تقلیل یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال و دست کم سه مقسوم‌علیه صفر غیرصفر باشد، یا (ب) $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد که $Z(R)^۲ \neq (\circ)$ و هر دو مقسوم‌علیه صفر متمایز R، دارای پوچ‌ساز غیرصفر باشند.

(۴) $diam(\Gamma(R)) = ۳$ اگر و تنها اگر R دارای مقسوم‌علیه صفرهای متمایز x و y باشد، به طوری که $((x,y)):\circ) = (\circ)$ و (الف) R تقلیل یافته با بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال باشد، یا (ب) R تقلیل یافته نباشد.

اثبات. (۱) واضح است.

(۲) به راحتی می‌توان دید که $\Gamma(R)$ کامل است اگر و تنها اگر یا (الف) R تقلیل یافته باشد و با $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ یکریخت باشد، یا (ب) R تقلیل یافته نیست، $Z(R)^۲ = (\circ)$ و R با $\mathbb{Z}_۴$ و $\mathbb{Z}_۲[X]/(X^۲)$ یکریخت نباشد. این مطلب (۲) را اثبات می‌کند.

(۳) فرض کنید R تقلیل یافته باشد. اگر R دقیقاً دو مقسوم‌علیه صفر غیرصفر داشته باشد، هر یک پوچ‌ساز دیگری است و بنابراین $diam(\Gamma(R)) = ۱$. یعنی R با $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ یکریخت است. تلفیق این مطلب با قضیه‌ی ۳۱.۱ نشان می‌دهد که R دقیقاً دارای دو ایده‌آل اول مینیمال و بیش از سه مقسوم‌علیه صفر غیرصفر است و $diam(\Gamma(R)) = ۲$. اگر مقسوم‌علیه صفرهای غیرصفر a و b از R موجود باشند که

$(\circ) = ((a,b) : \circ)$، حلقه‌ی R تقلیل یافته باشد یا نباشد، اگر R بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد، ۳۱.۱ و ۳۴.۱ ایجاب می‌کند که $diam(\Gamma(R)) = ۳$. از طرف دیگر اگر هر زوج از مقسوم‌علیه صفرهای R دارای پوچ‌ساز غیرصفر باشند، $Z(R)$ ایده‌آلی از R خواهد بود و $diam(\Gamma(R)) \leq ۲$. افزودن این مطلب به مشخص سازی حلقه‌هایی که برای آن‌ها $diam(\Gamma(R)) \leq ۱$، اثبات (۳) را تکمیل می‌کند.
(۴) بلافاصله از قضایای ۳۱.۱ و ۳۴.۱ و حالت‌های (۱) تا (۳) نتیجه می‌شود. ■

حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی مک‌کوی [۱۸] می‌گویند هرگاه هر ایده‌آل متناهیاً تولید شده از R که مشمول در $Z(R)$ باشد، دارای پوچ‌ساز غیرصفر باشد. مثال زیر، که در فصل ۴ مورد استفاده قرار خواهد گرفت، مثالی از یک حلقه‌ی مک‌کوی است.

مثال ۳۶.۱. فرض کنید K میدانی از مشخصه‌ی دو باشد، $D = K[Y,Z]$ و $Y = \{y_i\}_{i=\circ}^{\infty}$ و $Z = \{z_i\}_{i=\circ}^{\infty}$ دو مجموعه‌ی متمایز نامتناهی از متغیرها باشند. قرار دهید $R = D/A$ که $A = (y_\circ z_\circ, \{y_\circ y_n\}, \{y_n^۲\}, \{z_\circ z_n\}, \{z_n^۲\})D$.
(۱) R یک حلقه با بعد صفر است که $M = (Y,Z)R$ تنها ایده‌آل ماکزیمال (مینیمال) آن است.
(۲) برای هر $r \in M$، $r^۲ = \circ$.
(۳) برای هر دو مقسوم‌علیه صفر r و s از R، یا $rs = \circ$ یا $rs(r+s) = \circ$.
(۴) R یک حلقه‌ی مک‌کوی است، $Z(R)$ ایده‌آلی از R است و $diam(\Gamma(R)) = ۲$.

قضایای زیر در مورد رنگ آمیزی گراف، توسط بک بیان شده‌اند. همان‌گونه که در مقدمه نیز بیان شد، بک در [۷]، گرافی را تعریف می‌کند که رئوس آن، عناصر حلقه‌ی R هستند و دو رأس a و b در این گراف مجاورند اگر $ab = \circ$. لذا نماد R در قضایای زیر، هم نشان دهنده‌ی حلقه‌ی R و هم گراف نظیر آن خواهد بود.

قضیه ۳۷.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی تقلیل یافته باشد. موارد زیر معادلند.
(۱) $\chi(R)$ متناهی است.
(۲) $cl(R)$ متناهی است.
(۳) ایده‌آل صفر در R اشتراک تعداد متناهی ایده‌آل اول است.

---
[۱۸] McCoy Ring