

الحمد لله  
الرحمن  
الرحيم



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده فیزیک

**توزیع چگالی جریان الکتریکی و میدان مغناطیسی در دستگاه های ابرسانای  
چند نواره با استفاده از مفاهیم میدان های مغناطیسی مختلط**

پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک گرایش ماده چگال

رضا شیخی

استاد راهنما

دکتر علی اکبر بابائی بروجنی

## تشر و قدردانی

بر خود لازم می دانم از پدر و مادرم به پاس مهربانی و صبر و تلاششان تشکر کنم. همچنین از دکتر علی اکبر بابائی بروجنی که به عنوان استاد راهنما اینجانب را در مسیر تحقیق و تدوین پایان نامه یاری کردند و از دکتر پیمان صاحب سرا به خاطر مشاوره هایشان سپاس گزارم. در نهایت، از کمک دوستانی که در تهیه این پایان نامه بنده را همراهی کردند متشکرم.

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات،  
ابتکارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع  
این پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی  
اصفهان است.

## فهرست مطالب

۲	فصل اول	
۱-۱	ابرسانای نوع اول	۲
۱-۱-۱	کشف پدیده ابرسانایی	۲
۲-۱-۱	اثر مایسنر	۳
۳-۱-۱	میدان بحرانی ترمودینامیکی ابرسانا	۵
۴-۱-۱	نظریه لندن	۶
۵-۱-۱	عمق نفوذ میدان مغناطیسی	۸
۶-۱-۱	کوانتش شار	۹
۷-۱-۱	نظریه گینزبرگ-لاندائو	۱۰
۸-۱-۱	معادلات گینزبرگ ولاندائو	۱۱
۹-۱-۱	طول همدموسی	۱۱
۱۰-۱-۱	انرژی سطحی و پارامتر بدون بعد گینزبرگ-لاندائو	۱۲
۱۱-۱-۱	نظریه BCS	۱۳
۲-۱	ابرسانای نوع ۲	۱۵
۱-۲-۱	فاز آمیخته	۱۵
۲-۲-۱	برهمکنش بین گردابه های شار	۱۷
۳-۲-۱	نیروی لورنتس	۱۹
۴-۲-۱	مقاومت شارشی و جریان بحرانی	۲۰
۵-۲-۱	مدل حالت بحرانی	۲۰
۲۲	فصل دوم	
۱-۲	رفتارهای نوارهای ابرسانای نازک در مدل لندن	۲۲
۱-۱-۲	تیغه نازک ابرسانا در میدان موازی با صفحه تیغه	۲۲
۲-۱-۲	تیغه نازک ابرسانا حامل جریان الکتریکی	۲۴
۲-۲	نوار ابرسانا در میدان مغناطیسی خارجی عمود بر سطح نوار	۲۵

۲۵.....	توزیع میدان مغناطیسی نوار ابرسانا در حالت مایسنر کامل	۱-۲-۲
۳۰.....	بررسی میدان و جریان در یک نوار ابرسانا نوع ۲ در حضور میدان مغناطیسی خارجی	۲-۲-۲
۳۵.....	فصل سوم.....	
۳۵.....	بررسی ویژگی توزیع میدان مغناطیسی و جریان الکتریکی برای دو نوار هم صفحه	۱-۳
۳۵.....	پیکر بندی سیستم.....	۱-۱-۳
۳۶.....	قرار گرفتن نوارها در میدان مغناطیسی عمودی و نفوذ میدان به شکاف میان نوارها	۲-۱-۳
۳۹.....	دو نوار در غیاب میدان خارجی و حامل جریان های الکتریکی خالص مخالف یکدیگر	۳-۱-۳
۴۱.....	نوارها با جریان خالص و هم جهت، بدون حضور میدان مغناطیسی خارجی	۴-۱-۳
۴۳.....	نوار در حضور میدان مغناطیسی و بدون وجود جریان خالصی در هر نوار	۵-۱-۳
۴۵.....	اتصال دو سر انتهایی نوارها به همدیگر و تشکیل یک حلقه مستطیل شکل	۶-۱-۳
۴۶.....	تنها یکی از نوارها جریان خالص حمل می کنند.....	۷-۱-۳
۴۹.....	فصل چهارم.....	
۴۹.....	پیکر بندی سیستم های چند نواره.....	۴-۱
۵۳.....	بررسی حلقه متشکل از نوار های ابرسانا موازی.....	۲-۴
۵۳.....	هندسه سیستم.....	۱-۲-۴
۵۳.....	شرایط حل مسئله.....	۲-۲-۴
۵۵.....	توزیع میدان مغناطیسی و جریان الکتریکی در نوارها.....	۳-۲-۴
۵۸.....	بررسی شار عبوری از گاف ها.....	۴-۲-۴
۶۱.....	بررسی سیستم حلقه ای شکل با پهنای شکاف مرکزی ثابت.....	۵-۲-۴
۶۳.....	بررسی نوارهای ابرسانا در غالب خطوط انتقال.....	۳-۴
۶۳.....	هندسه مسئله.....	۱-۳-۴
۶۳.....	شرایط مسئله.....	۲-۳-۴
۶۴.....	یافتن توزیع میدان و جریان الکتریکی.....	۳-۳-۴
۶۵.....	سهم نوارها از جریان والقائیدگی.....	۴-۳-۴

در این پایان نامه در نظر داریم توزیع میدان مغناطیسی و جریان الکتریکی را در یک مجموعه از نوارهای ابرسانای هم صفحه، با تعداد نوارهای دلخواه به دست آوریم. دو پیکربندی مشخص در نظر گرفته شده است، که در یکی، انتهای نوارها به گونه ای به یکدیگر متصل شده که مجموعه تشکیل یک حلقه ابرسانا را می دهد و در دیگری سیستمی به صورت خطوط انتقال در نظر خواهیم گرفت. سیستمی که به صورت یک حلقه در آمده را در یک میدان عمود بر صفحه آن قرار خواهیم داد و با استفاده از آنالیز مختلط توزیع میدان در صفحه نوارها را به دست می آوریم و برای سیستم هایی با تعداد نوارهای مختلف رسم خواهیم کرد. اگر تعداد نوارهای تشکیل دهنده سیستم را با  $2n$  نشان دهیم و پهنای نوارها و گاف هارا برابر انتخاب کنیم آنگاه برای یک پیکربندی با  $n$  زوج، نشان می دهیم که با افزایش تعداد نوارها میزان شار عبوری از شکاف مرکزی افزایش خواهد یافت و سیستم شار اعمالی را در حفره مرکزی کانونی خواهد ساخت. در صورتی که  $n$  فرد باشد میزان شار عبوری از شکاف مرکزی بسیار اندک خواهد بود و شکاف های مجاور شکاف مرکزی هستند که عمده شار را از خود عبور می دهند. همچنین نشان خواهیم داد که اگر پهنای حفره مرکزی را ثابت فرض کنیم و پهنای نوارها و دیگر گاف ها را به صورت برابر انتخاب کنیم، میزان شار عبوری از شکاف مرکزی با افزایش تعداد نوارها کاهش خواهد یافت (برای سیستمی با  $n$  های زوج).

در پیکربندی مربوط به خطوط انتقال میدان مغناطیسی خاموش است و این جریان الکتریکی است که از خارج سیستم به نمونه اعمال می شود. در این مرحله نیز با استفاده از آنالیز مختلط توزیع میدان مغناطیسی و جریان الکتریکی را برای سیستم هایی با تعداد نوارهای مختلف رسم خواهیم کرد، همچنین نشان خواهیم داد که سهم نوارهای مرکزی سیستم از جریان کل اعمالی، بیشتر از سهم نوارهای جانبی از این جریان خواهد بود. در نهایت به بررسی میزان القائیدگی در خطوط انتقال می پردازیم و نشان خواهیم داد که با افزایش تعداد نوارهای ابرسانا در سیستم میزان القائیدگی افت خواهد کرد و سیستم در شرایط مساعد تری برای عبور جریان الکتریکی قرار خواهد گرفت (در سیستمی که پهنای گاف ها و نوارها برابر است).



## فصل اول

### مقدمه ای بر ابرسانایی

#### ۱-۱ ابرسانای نوع اول

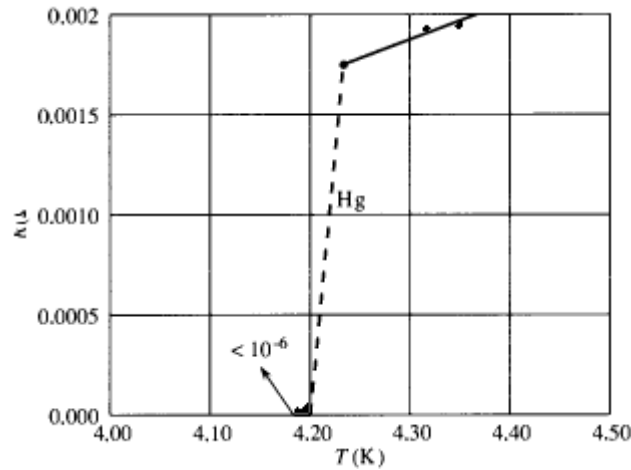
##### ۱-۱-۱ کشف پدیده ابرسانایی

کشف پدیده ابرسانایی به اوایل قرن بیستم باز می‌گردد، زمانی بشر موفق شد به دماهای تک رقمی در مقیاس کلوین دست پیدا کند. به طور مشخص کمرلینگک اونز<sup>۱</sup> برای اولین بار در ۱۹۰۸ موفقی شد با میعان کردن هلیوم به دماهایی در حدود چند کلوین دست پیدا کند. از آنجایی که در آن زمان کاهش خطی مقاومت الکتریکی اکثر فلزات نسبت به کاهش دما امری شناخته شده بود، اولین آزمایشهایی که اونز با هلیوم مایع انجام داد مربوط به حوضه مقاومت الکتریکی فلزات بود. در آن زمان تصور بر این بود که تغییرات مقاومت الکتریکی در فلزات به دو عامل دما و میزان خلوص فلز وابسته است. بنا بر این فرض اگر دمای عنصری خالص را به صورت تدریجی و به اندازه کافی سرد کنیم مقاومت الکتریکی آن نیز به صورت تدریجی کاهش یافته و به صفر میل می‌کند. اونز جیوه خالص را برای کار انتخاب کرد و با استفاده از هلیوم مایع دمای آن را تا حد چند کلوین کاهش داد. نتایج به دست آمده نشان از کاهش مقاومت الکتریکی و در نهایت رسیدن آن به صفر بود. همانطور که در نمودار ۱-۱ مشاهده می‌شود، این افت مقاومت نه تنها به صورت تدریجی صورت نگرفت بلکه دمایی که در آن مقاومت صفر مشاهده شد دمای ۴.۲ درجه کلوین بود. پدیده شگف انگیزتر این بود که تکرار این آزمایش با جیوه ناخالص نیز نتیجه ای مشابه انجام آزمایش با جیوه خالص داشت. اونز با این مشاهدات نشان داد که جیوه در دمای زیر ۴.۲ درجه کلوین خواص الکتریکی کاملاً متفاوتی را نشان می‌دهد و گویا جیوه وارد حالت دیگری از ماده شده است، وی این حالت جدید را

---

<sup>1</sup>Heike Kamerlingh Onnes

ابرسانایی نام نهاد و اینگونه ابرسانایی در سال ۱۹۱۱ متولد شد. بعد ها این پدیده برای انواع دیگری از عناصر نیز مشاهده شد و حتی آلیاژها نیز چنین رفتاری از خود نشان دادند و این پدیده به شاخه از علم بدل شد.



نمودار ۱-۱: نمودار معروف اونز که برای اولین بار پدیده ابرسانایی را ارائه داد [۴].

دمایی که در آن جسم وارد حالت ابرسانایی می شود را دمای بحرانی ( $T_c$ ) نام نهادند، اکنون ابرساناها را به دو دسته طبقه بندی می کنند، که مهمترین تفاوتشان را می توان در رفتار مغناطیسی آنها جست و جو کرد.

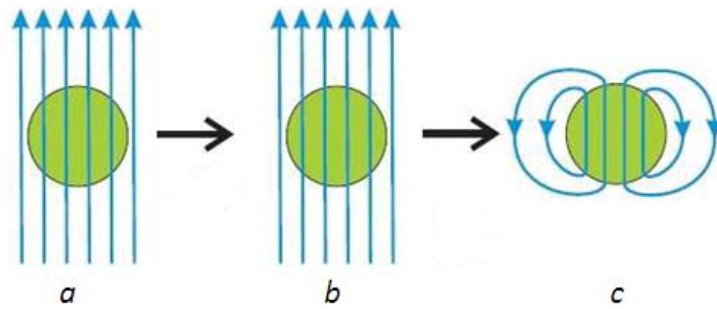
#### ۲-۱-۱ اثر مایسنر

اگر برای مثال یک کره فلزی را در نظر بگیریم، زمانی که دمای این کره به زیر دمای بحرانش برسد، فلز به حالت ابرسانایی گذار می کند و طبق گفته های پیشین مقاومت الکتریکی آن صفر می شود، که این خود به معنای  $\rho = 0$  است. اکنون با استفاده از رابطه  $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$  می توان نتیجه گرفت که میدان الکتریکی در داخل یک ابرسانا صفر است. با مراجعه به یکی از معادلات ماکسول:

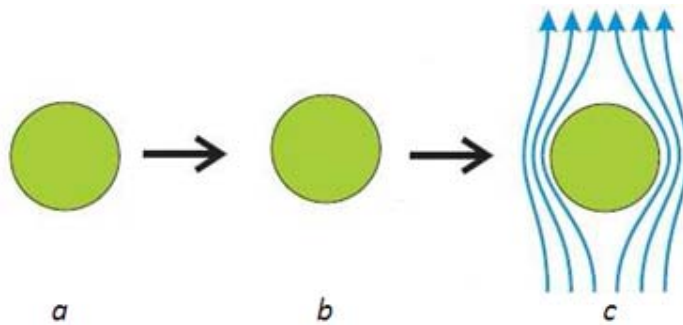
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-1)$$

می توان نشان داد که میدان مغناطیسی در داخل یک ابرسانا نسبت به پارامتر زمان ثابت است و معنی آن این است که، اگر کره فلزی قبل از سرد شدن و گذار به حالت ابرسانا دارای میدان مغناطیسی مشخصی باشد پس از سرد شدن نیز همان میدان را در دخیل خود نگه می دارد. حتی اگر پس از سرد شدن میدانی دیگر به کره اعمال کنیم یا اصلا میدان خارجی را قطع کنیم. به همین ترتیب اگر قبل از سرد شدن، نمونه فاقد میدان مغناطیسی باشد، پس از سرد شدن نیز میدان در داخل آن صفر خواهد ماند، حتی اگر در زیر دمای بحرانی به آن میدان مغناطیسی اعمال کنیم. این به این معناست که شرایط مغناطیسی فعلی یک ابرسانا به گذشته مغناطیسی آن نیز بستگی دارد. همه این استدلال ها بر این پیش فرض بنا نهاده شد که ابرسانا را یک رسانا با مقاومت صفر در نظر بگیریم و از تمامی معادلات حاکم

بر مواد رسانا برای بررسی رفتار آن استفاده کنیم.



شکل ۱-۱: در قسمت (a) کره در حالت معمولی و در میدان مغناطیسی یکنواخت. در مرحله (b) نمونه به زیر دمای بحرانی منتقل شده و میدان خارجی همچنان فعال است. در قسمت (c) جسم زیر دمای بحرانی است اما میدان خارجی قطع شده است.



شکل ۱-۲: در قسمت (a) کره در حالت معمولی است و مغناطیسی خارجی نیز وجود ندارد. در مرحله (b) نمونه به زیر دمای بحرانی منتقل شده و همچنان میدان خارجی وجود ندارد. در قسمت (c) جسم در زیر دمای بحرانی است اما میدان خارجی روشن شده است.

بیست دو سال بعد از کشف ابررسانایی در سال ۱۹۳۳ مایسنر<sup>۳</sup> و اکسفلد<sup>۴</sup> نشان دادند که یک ابررسانا فارغ از گذشته مغناطیسی خود، میدان مغناطیسی را طرد می کند و معنی آن این بود که اگر ابتدا نمونه را سرد کنیم و سپس میدان مغناطیسی به آن اعمال کنیم، یا اینکه پس از سرد کردن نمونه میدان مغناطیسی به آن اعمال کنیم در هر دو صورت ابررسانا تمایل به دفع میدان مغناطیسی از داخل خود دارد. این پدیده ی طرد شار مغناطیسی از داخل ابررسانا، اثر مایسنر او کسفلد نام گرفت. اگر بتوان از مغناطیس زدایی ناشی از شکل فلز صرف نظر کرد، می توان میدان مغناطیسی داخل یک نمونه رسانا و خارج از آن را یکسان در نظر گرفت، به این معنی که می توان نوشت  $\mu_r \approx 1$  (مثلا یک میله استوانه ای بلند در میدانی موازی با محور آن). اما دیدیم که چگالی شار در داخل ابررسانا ها صفر است، پس می توان ابررسانا ها را به عنوان اجسام دیامغناطیس در نظر گرفت. برای آنکه در حضور میدان مغناطیسی خارجی  $B_e$ ، بتوان شار مغناطیسی در داخل ابررسانا را صفر کرد، جریان هایی در سطح ابررسانا پدید می آیند که

<sup>۳</sup>W.Meissner

<sup>۴</sup>R.Ochsenfeld

میدانی هم اندازه ولی در خلاف جهت میدان مغناطیسی خارجی در داخل ابررسانا تولید می کنند. به عبارت دیگر می توان با استفاده از رابطه زیر

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}_a + \mathbf{M}) \quad (2-1)$$

و توجه به این نکته که در داخل ابررسانا میدان مغناطیسی صفر است، نتیجه گرفت که  $\mathbf{M} = -\mathbf{H}_a$ ، به این معنی که نسبت مغناطش به شار مغناطیسی که پذیرفتاری مغناطیسی نامیده می شود، برابر با  $\chi = -1$  می باشد. این دو توصیف دقیقاً معادل هم هستند، پس می توان ابررسانا را هم به صورت ماده ای که همواره چگالی شار مغناطیسی در داخل آن صفر است تعریف کرد و هم می توان آن را ماده ای با پذیرفتاری  $\chi = -1$  در نظر گرفت.

### ۳-۱-۱ میدان بحرانی ترمودینامیکی ابررسانا

در هر نمونه از ماده ابررسانا می توان با یک اعمال میدان مغناطیسی که تا اندازه مورد نیاز قوی باشد حالت ابررسانشی را از بین برد، در واقع ماکسیمم میدانی که یک ماده ابررسانا کپه ای می تواند تحمل کند و در همان فاز ابررسانا باقی بماند را میدان مغناطیسی بحرانی  $H_C$  می گویند.  $H_C$  کمیتی وابسته به دما است و بسته به اینکه ابررسانا در چه دمایی قرار دارد میزان این میدان مغناطیسی بحرانی می تواند متفاوت باشد.

اگر یک استوانه بلند را در یک میدان مغناطیسی یکنواخت  $H$  طوری قرار دهیم که خطوط میدان مغناطیسی یکنواخت و موازی با محور استوانه باشد، می توان رابطه زیر را برای گشتاور مغناطیسی در واحد حجم استوانه نوشت.

$$M = -\frac{H_i}{4\pi} \quad (3-1)$$

این رابطه با توجه به این نکته نوشته شده، که ابررسانا در حالت مایسنر قرار دارد. حال اگر میدان مغناطیسی به اندازه  $dH$  افزایش یابد میدان خارجی روی ابررسانا کاری انجام داده است، که میزان آن در واحد حجم برابر است با:

$$-MdH = \frac{H_i}{4\pi} dH \quad (4-1)$$

پس می توان با یک انتگرال گیری ساده میزان کل کاری، که میدان مغناطیسی خارجی انجام داده است را محاسبه کرد.

$$\int_0^{H_i} -MdH = \int_0^{H_i} \frac{H_i}{4\pi} dH = \frac{H_i^2}{8\pi} \quad (5-1)$$

البته باید توجه کرد که در تمام این مراحل فرض بر این است که نمونه در یک دمای ثابت  $T$  قرار دارد. اکنون کار

انجام شده روی نمونه به صورت انرژی آزاد در ابررسانای واقع در میدان  $H$  ذخیره می شود و با فرض اینکه انرژی آزاد در میدان مغناطیسی صفر و دمای  $T$ ، برابر با  $G_S$  است، می توان رابطه زیر را برای انرژی آزاد نمونه ابررسانا در میدان مغناطیسی  $H$  نوشت.

$$G_{SH} = G_S + \frac{H_c^2}{4\pi} \quad (6-1)$$

حال اگر  $H$  را تا میزان  $H_C$  افزایش دهیم، ابررسانا به حالت معمولی می رود به این معنی که  $G_{SH}$  به سطح انرژی آزاد حالت عادی  $G_n$  می رسد.

$$G_n = G_S + \frac{H_C^2}{4\pi} \quad (7-1)$$

نتیجه اینکه در میدانهای مغناطیسی کوچکتر از میدان بحرانی انرژی آزاد ابررسانا کوچکتر از انرژی آزاد حالت معمولی است. با رسیدن میدان، به میزان بحرانی و بیشتر از آن این حالت عادی است که ارجحیت می یابد. به عبارت دیگر می توان گفت میدان مغناطیسی بحرانی را اختلاف انرژی آزاد در حالت معمولی با انرژی آزاد در حالت ابررسانشی به دست می دهد و به همین دلیل است که مقدار آن برای یک ابررسانای مشخص در دماهای مختلف متفاوت است.

البته تمامی قواعد بیان شده در بالا تنها در مورد ابررساناهای نوع اول قابل بیان است. در ابررساناهای نوع دوم کار کمی پیچیده تر است، گرچه در ابررساناهای نوع دوم نیز ملاک تعریف میدان بحرانی ترمودینامیکی همان انرژی آزاد است. در این نوع ابررسانا دو میدان بحرانی وجود دارد و زمانی که شروع به افزایش میزان میدان مغناطیسی می کنیم، همانند ابررسانای نوع یک در میدانی مشخص  $H_{C1}$  ابررسانا از حالت مایسنر خارج می شود اما این به معنی ورود به حالت معمولی نیست بلکه ابررسانای نوع دوم به حالتی منتقل می شود که میدان مغناطیسی خارجی به صورت گردابه های شار به داخل ابررسانا نفوذ می کنند و این در حالی است که بخشهایی از ماده هنوز در حالتی هستند که میدان را طرد می کنند، با افزایش مجدد میدان مغناطیسی این گردابه های شار تمامی ابررسانا را در بر می گیرند و ماده اکنون به حالت معمولی وارد می شود. به میدانی که در آن ماده به حالت نرمال گذار می کند  $H_{C2}$  می گویند.

#### ۴-۱-۱ نظریه لندن

اولین معادلاتی که توصیفی الکترومغناطیسی از ابررساناها ارائه داد معادلات برادران لندن<sup>۵</sup> بود که در ۱۹۳۵ منتشر گردید و هدف آن مربوط کردن توزیع میدان مغناطیسی در یک ابررسانا، به جریانی که در آن شارش می یابد بود و در آن از مفاهیم الکترومغناطیس کلاسیک به علاوه مفهوم ابر الکترون استفاده شده است. ابر الکترون ها در

<sup>۵</sup> F.&H.London

واقع الکترون هایی هستند که بدون مقاومت الکتریکی در فلز حرکت می کنند و در حالت ابر رسانایی مسئول انتقال کامل جریان می باشند. اگر یک ماده ابررسانا تحت تاثیر یک میدان الکتریکی قرار گیرد، نیرویی به ابرالکترونها می موجود در ابررسانا وارد می شود که می توان آن را از رابطه (۸-۱) به دست آورد.

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{V}_s}{dt} = e\mathbf{E} \quad (8-1)$$

که  $\vec{V}_s$  سرعت ابر الکترونها و  $m$  و  $e$  به ترتیب جرم و بار الکتریکی این ابرالکترون ها می باشند. همچنین می توان برای چگالی جریان ابرالکترونها رابطه زیر را نوشت.

$$\mathbf{J}_s = n_s e \mathbf{V}_s \quad (9-1)$$

که در آن  $n_s$  تعداد ابر الکترونها در واحد حجم است. از ترکیب این دو معادله داریم:

$$\frac{d\mathbf{J}_s}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{E} \quad (10-1)$$

اکنون به سراغ روابط مربوط به میدان مغناطیسی می رویم، برای این کار انرژی آزاد ابررسانا را به صورت تفکیک شده زیر می نویسیم که  $E$  در آن انرژی آزاد یک الکترون در غیاب میدان مغناطیسی است.

$$G = G_0 + G_{Kin} + G_{mag} \quad (11-1)$$

$$G_{Kin} = n_s \int \frac{1}{2} m V_s^2 dr \quad (12-1)$$

$$G_{mag} = \frac{1}{4\pi} \int B^2 dr \quad (13-1)$$

با استفاده از یکی از معادلات ماکسول ( $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{J}_s$ ) و رابطه (۹-۱) داریم:

$$G_{Kin} = - \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \int \frac{1}{2} |\nabla \times \mathbf{B}|^2 dr \quad (14-1)$$

لندن به خاطر مسائلی که در قسمت عمق نفوذ مطرح خواهد شد، عبارت  $\sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}}$  که دارای بعد طول نیز می باشد را عمق نفوذ<sup>۹</sup> لندن نام گذاری کرد، که آن را با  $\lambda_L$  نمایش می دهیم. با جایگذاری رابطه مربوط به انرژی جنبشی و انرژی مغناطیسی انرژی آزاد به این صورت در خواهد آمد.

<sup>۹</sup> Penetration Depth

$$G = G_0 + \frac{1}{4\pi} \int (B^2 - \lambda_l^2 |\nabla \times \mathbf{B}|^2) dr \quad (15-1)$$

اگر با استفاده از اصل وردش انرژی آزاد در ابرسانا را می نیمم کنیم، به رابطه (۱۶-۱) می رسیم.

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_l^2} \mathbf{B} \quad (16-1)$$

از دوطرف معادله ماکسول  $\mathbf{J}_s = \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B})$ ، کرل میگیریم و از رابطه (۹-۱) و همچنین یکی دیگر از معادلات ماکسول یعنی  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  استفاده کنیم، آنگاه داریم:

$$\nabla \times \mathbf{J}_s = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\lambda_l^2} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{n_s e^2}{mc} \mathbf{B} \quad (17-1)$$

در نهایت این معادله به همراه معادله (۱۰-۱) به عنوان معادلات لندن شناخته شدند. معادله بالا توصیفی بر حالت دیامغناطیسی ابرسانا و معادله دیگر بیان گر صفر بودن مقاومت الکتریکی در یک ابرسانا است. باید توجه داشت که این معادلات صرفاً معادلاتی پدیده شناختی هستند که در اوایل کشف پدیده ابرسانایی ارائه شدند و نباید انتظار داشت که همواره صحیح باشند، گرچه که در اغلب مواقع نتیجه ای نزدیک به واقعیت ارائه می دهند.

#### ۵-۱-۱ عمق نفوذ میدان مغناطیسی

اگر بخواهیم ابرسانا هارا به صورت دیامغناطیس کامل در نظر بگیریم، باید قبول کنیم که جریانهای الکتریکی در ضخامتی اندکی از سطح ابرسانا جاری می شوند. واضح است که اگر ضخامتی برای جریان سطحی در نظر نگیریم، جریان در سطح ابرسانا بینهایت خواهد شد. در اغلب ابرساناها ضخامتی که جریان الکتریکی در آن جریان می یابد، و همچنین میدان مغناطیسی هم در آن نفوذ می کند از مرتبه  $10^{-5}$  سانتیمتر است، اگر چه مقدار واقعی آن بسته به دما و نوع ماده ابرسانا می تواند متفاوت باشد. در صورتی که جسم ابرسانا در معرض میدان خارجی قرار گیرد برای برقرار ماندن اثر مایسنر جریان پوششی در پوسته ای از ابرسانا شکل می گیرد که موجب صفر شدن میدان الکتریکی در داخل ابرسانا می شود. واضح است که چگالی شار در پوسته به صورت ناگهانی به صفر تغییر نخواهد کرد بلکه این امری پیوسته است و چگالی شار با افزایش عمق، به طور نمایی به صفر تنزل خواهد کرد. میزان عمقی که میدان مغناطیسی در جسم ابرسانا حضور دارد را عمق نفوذ می نامیم.

اگر یک برش نیمه متناهی از یک ابرسانا را که سطح آن بر صفحه  $x = 0$  منطبق است و در یک میدان مغناطیسی خارجی به بزرگی  $B_0$  و در راستای محور  $z$  ها را در نظر بگیریم. می توان با استفاده از معادله (۱۶-۱) و شرایط مرزی  $B(x=0) = B_0$  و  $B(x=\infty) = 0$  به این رابطه برای مولفه  $z$  میدان مغناطیسی در داخل نمونه ابرسانا دست یافت.

$$B = B_0 e^{-x/\lambda_l} \quad (18-1)$$

بنابر این رابطه با افزایش فاصله از سطح ابرسانا میدان مغناطیسی به صورت نمایی کاهش می یابد. که کمیت  $\lambda_l$  همان عمق نفوذ لندن است. با استفاده از معادله  $\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}$  می توان نحوه توزیع ابرجریان الکتریکی که موجب ایجاد اثر مایسنر در داخل ابرسانا می شود را پیدا کرد.

$$J_s = \frac{cB_0}{4\pi\lambda_l} e^{-x/\lambda_l} \quad (19-1)$$

از آنجایی که  $J_s$  کمیتی وابسته به تعداد الکترونها در واحد حجم است پس می توان نتیجه گرفت که  $\lambda_l$  خود کمیتی وابسته به دما است.

#### ۱-۱-۶ کوانتش شار

جسم ابررسانایی را که دارای یک حفره است در نظر می گیریم، از آنجا که تابع موج مربوط به حاملین بار در ابررساناها دارای گسترشی نامحدود است، بایستی تابع موج در امتداد هر مسیر بسته ای که حفره را احاطه می کند، تک مقدار باشد. با تشابه این مسئله با توابع موج الکترونی در یک مدار اتمی می توان برای بررسی آن از قاعده کوانتش بوهر-سامرفلد استفاده کرد.

$$\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = nh \quad (20-1)$$

با این تفاوت که اندازه حرکت خطی در این مورد به صورت زیر است.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{V} + \frac{q}{c}\mathbf{A} \quad (21-1)$$

با استفاده از دو رابطه بالا می توان نوشت:

$$\oint \frac{4\pi\lambda_l^2}{c^2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{nhc}{q} \quad (22-1)$$

و در نهایت با تبدیل انتگرال روی مسیر بسته به انتگرال روی سطح داریم:

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \varphi \quad (23-1)$$



$$\oint \frac{4\pi\lambda_l^2}{c^2} J \cdot dl + \varphi = \frac{nhc}{q} \quad (24-1)$$

اگر مسیری که حفره را دور می زند، در داخل ابررسانا انتخاب کنیم واضح است که چگالی جریان در داخل ابررسانا صفر است پس در نهایت شار گزرنده از یک حلقه ابررسانا به صورت زیر است.

$$\varphi = \frac{nhc}{q} \quad (25-1)$$

لندن [۱] طرف چپ این معادله را که از جنس شار مغناطیسی است فلوکسید<sup>۷</sup> نام نهاد و نشان داد که شار مغناطیسی گذرنده از حفره کوانتیده و مضربی از  $\frac{hc}{q}$  است. آزمایشات عملی نیز این پدیده را تأیید [۲] و نشان داد که مقدار این کوانتوم شار برابر است با:

$$\varphi_0 = \frac{hc}{2e} \approx \frac{2}{0.7} \times 10^{-7} \text{ Gauss.cm}^2$$

نکته جالب این است که برای تطبیق رابطه نظری و نتیجه آزمایشگاهی می بایست حامل بار الکتریکی را  $2e$  در نظر گرفت که این خود بانظریه میکروسکپی ابررسانایی که جفت های کوپر را حامل های بار الکتریکی در ابررسانا می داند مطابقت دارد.

#### ۱-۱-۲ نظریه گینزبرگ-لاندائو<sup>۸</sup>

نظریه گینزبرگ - لاندائو همچون نظریه لندن، نظریه ای پدیده شناختی است با این تفاوت که در نظریه گینزبرگ و لاندائو از مفاهیم کوانتومی نیز در توصیف پدیده ابررسانایی استفاده شده است. آنها فرض کردند که بتوان رفتار الکترونها را به وسیله چیزی شبیه به یک تابع موج  $\psi$  بررسی کرد. با این توصیف واضح است که  $|\psi(r)|^2$  چگالی موضعی الکترونها را می دهد. آنها همچنین با استفاده از وردش، انرژی آزاد ابررسانا را بر حسب  $\nabla\psi(r)$  و  $|\psi(r)|^2$  بسط دادند. در سال ۱۹۵۹ گورکف<sup>۹</sup> نشان داد که معادلات گینزبرگ و لاندائو حالت حدی از نظریه میکروسکپی ابررسانا هستند. این معادلات همچنین در دماهای نزدیک دمای بحرانی توصیف بهتری از ابررسانایی را ارائه می دهند و حتی می توان بین  $\psi(r)$  و گاف انرژی تناسبی برقرار کرد.

در این نظریه دو نکته اهمیت خاصی دارند، نخست اینکه حالت ابررسانایی از حالت عادی به مراتب منظم تر است و دوم اینکه گذار از یک حالت به حالت دیگر (بدون حضور میدان مغناطیسی) یک گذار فاز مرتبه دوم است.

<sup>۷</sup> Floxoid

<sup>۸</sup> Ginzburg-Landau

<sup>۹</sup> L.P. Gorkov

این به این معنی است که برای ابررسانا یک پارامتر نظم وجود دارد، که در  $T < T_c$  غیر صفر و در  $T \geq T_c$  صفر می شود. به این منظور آنها  $\psi(r)$  را به عنوان پارامتر نظم در نظر گرفتند. نظریه گینزبرگ ولاندائو بر مبنای نظریه گذارهای فاز مرتبه دوم پی ریزی شده است که لاندائو آن را گسترش داده بود [۳]. بنابر این نظریه گذار فاز مرتبه دوم زمانی رخ می دهد که حالت یک جسم به تدریج تغییر کند، در حالی که تغییر تقارن آن در دمای گذار ناپیوسته باشد. افزون بر آن فاز دمای پایین، فازی است با تقارن کاهش یافته، که به معنی نظم بیشتر در این دماست.

### ۸-۱-۱ معادلات گینزبرگ ولاندائو

فرض اساسی این نظریه این است که اگر  $\psi(r)$  کوچک باشد و در فضا به صورت آهسته تغییر کند، چگالی انرژی آزاد  $G$  را می توان به صورت سری توانی از  $\nabla\psi(r)$  و  $|\psi(r)|^2$  بسط داد.  $\nabla\psi(r)$  به این خاطر ظاهر می شود که  $\psi(r)$  در فضا تغییر می کند و شیب این تغییرات منجر به ایجاد انرژی جنبشی می شود که منشا آن شبیه منشا جمله انرژی جنبشی  $(\hbar^2/2m)\nabla^2\psi$  است که در معادله شرودینگر ذره ای به جرم  $m$  ظاهر می شود. با بسط انرژی آزاد داریم [۴].

$$g_s = g_{no} + \alpha|\psi(r)|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi(r)|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| (-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A}) \right|^2 + \frac{\hbar^2}{4\pi} \quad (26-1)$$

که در آن  $g_{no}$  چگالی حجمی انرژی آزاد در حالت نرمال و در غیاب میدان خارجی است،  $e^*$  بار موثر و  $m^*$  جرم موثر مربوط به حاملین بار در ابررسانا است،  $\alpha$  و  $\beta$  دو ثابت وابسته به دما و میدان مغناطیسی بحرانی هستند که می توان با اندکی روابط ریاضی آنها را به دست آورد. با کمینه کردن انرژی آزاد به کمک استفاده از روش وردش گیری می توان به جفت معادله گینزبرگ ولاندائو رسید.

$$\alpha \psi(r) + \beta |\psi(r)|^2 \psi(r) + \frac{1}{2m^*} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi(r) = 0 \quad (27-1)$$

$$\mathbf{J} = \frac{e^* \hbar}{2m^* i} (\psi(r)^* \nabla \psi(r) - \psi(r) \nabla \psi(r)^*) - \frac{e^{*2}}{m^* c} \psi(r)^* \psi(r) \mathbf{A} \quad (28-1)$$

همانطور که مشاهده می شود عبارت مربوط به چگالی جریان، شکل دقیق عبارت مکانیک کوانتومی معمول برای چگالی جریان ذره ای به جرم  $m^*$  بار الکتریکی  $e^*$  و تابع موج  $\psi(r)$  را دارد. همچنین در معادله اول اگر جمله غیر خطی را مانند یک پتانسیل دافعه ای روی خود  $\psi(r)$  در نظر بگیریم، فرم مربوط به یک معادله شرودینگر برای ذره ای که در داخل یک میدان مغناطیسی خارجی قرار دارد با ویژه مقدار  $\alpha$  - ظاهر می شود [۵].

### ۹-۱-۱ طول همدوسی

مفهوم طول همدوسی ابتدا توسط پپارد<sup>۱</sup> در سال ۱۹۵۳ ارائه و فرمولبندی شد [۶]. وقتی جسمی تا زیر دمای

<sup>۱</sup> A.B.Pippard

گذار خود سرد شود می توان الکترونها را به دو گروه ابرالکترون ها و الکترونها معمولی دسته بندی کرد. ابر الکترون ها به نوعی دارای نظم بیشتری از الکترون های عادی اند و می توان درجه نظم فاز ابررسانش را معادل چگالی ابر الکترون ها،  $n_S$ ، در نظر گرفت. پیکار با در نظر گرفتن جنبه های مختلف رفتار ابررساناها به این نتیجه رسید که  $n_S$  نمی تواند سریعاً با مکان تغییر یابد، بلکه تنها می تواند به تدریج در فاصله ای که برای ابررساناها خالص در حدود  $10^{-4}$  سانتیمتر است تغییر کند، وی این طول را طول همدوسی<sup>۱۱</sup>،  $\xi$ ، نامید. در نتیجه مرز بین ناحیه عادی و ناحیه ابررسانایی نمی تواند خیلی نازک باشد و چگالی ابر الکترون ها از صفر در ناحیه عادی تا  $n_S$  در ناحیه ابررسانشی تدریجاً و در فاصله ای در حدود طول همدوسی افزایش می یابد.

طول همدوسی به درجه خلوص فلز بستگی دارد و وجود ناخالصی موجب کاهش طول همدوسی می شود. طول همدوسی در یک ابررسانای کاملاً خالص یک خاصیت ذاتی از فلز مورد نظر است و با  $\xi$  نمایش داده می شود. در نظریه گینزبرگ ولاندائو می توان در نزدیکی دمای بحرانی روابط مناسبی برای طول همدوسی در حالت خالص ماده نوشت و در هنگام وجود ناخالصی نیز داریم [۴].

$$\xi(T) = 0.74 \frac{\xi_0}{\sqrt{1-t}} \quad \text{نمونه خالص} \quad (29-1)$$

$$\xi(T) = 0.85 \frac{\sqrt{\xi_0 l_e}}{\sqrt{1-t}} \quad \text{نمونه ناخالص} \quad (30-1)$$

#### ۱-۱-۱۰ انرژی سطحی و پارامتر بدون بعد گینزبرگ-لاندائو

نمونه ای را تصور کنید که در یک میدان مغناطیسی خارجی قرار دارد، با کاهش میدان به زیر  $H_C$  جسم به فاز ابررسانایی خواهد رفت و میدان مغناطیسی را طرد خواهد کرد، اما در مرز شرایط متفاوت است و در عمق  $\lambda$  (عمق نفوذ) از سطح ابررسانا شار مغناطیسی وجود خواهد داشت و چگالی ابرالکترونها در مرز به تدریج و در طول فاصله ای برابر  $\xi$  (طول همدوسی) افزایش یافته و به  $n_S$  می رسد.

با توجه به پایداری ابررسانا در مرزها می توان نتیجه گرفت که انرژی آزاد در واحد حجم در دو منطقه معمولی و ابررسانا باید برابر باشد. انرژی آزاد ابررسانا به دلیل وجود ابرالکترونها منظم به میزان  $(g_n - g_s)$  کمتر از حالت نرمال است. از طرفی منطقه ابررسانایی به خاطر وجود مغناطش  $M = -H$  یک چگالی انرژی مغناطیسی برابر  $\frac{1}{2}\mu_0 H^2$  بیشتر نسبت به حالت نرمال دارد. در حالت عادی این کاهش و افزایش همدیگر را خنثی کرده و چگالی انرژی آزاد در حالت نرمال و ابررسانشی برابر خواهند بود. از آنجا که همواره طول همدوسی و عمق نفوذ کمیت های برابری

<sup>۱۱</sup> Coherence Length

نیستند این کاهش و افزایش در سهم چگالی انرژی همیشه همدیگر را خنثی نمی کنند. اگر طول همدوسی از عمق نفوذ بیشتر باشد چگالی انرژی آزاد در نزدیکی مرزها افزایش خواهد یافت و در واقع انرژی سطحی مثبت در مرزها وجود خواهد داشت، در این حالت ابررسانای پدید آمده را ابررسانای نوع اول می گویند. اما اگر طول همدوسی از عمق نفوذ کمتر باشد انرژی سطحی منفی خواهد بود و با ابررسانای نوع دوم سر و کار خواهیم داشت.

خواص ابررساناها به طور اساسی به دو طول مشخصه  $\lambda$  و  $\xi$  مربوط می شود. برای همین یک پارامتر بدون بعد با نام  $\chi$  که نسبت عمق نفوذ به طول همدوسی را مشخص می کند معرفی کرده اند.

$$\chi = \frac{\lambda}{\xi} \quad (1-31)$$

اگر چه  $\lambda$  و  $\xi$  هر دو با دما تغییر می کنند ولی نسبت آنها معمولاً ثابت است. می توان نشان داد که اگر این نسبت کمتر از  $1/\sqrt{2}$  باشد انرژی سطحی مثبت و ابررسانا نوع ۱ خواهد بود و اگر این نسبت بزرگتر از  $1/\sqrt{2}$  باشد، انرژی سطحی منفی است و ابررسانای نوع ۲ خواهیم داشت [۷].

#### ۱-۱-۱۱ نظریه BCS

در سال ۱۹۵۰ فرولیش<sup>۱۲</sup> و باردین<sup>۱۳</sup> به طور همزمان ولی مستقل از هم، برهمکنشی از الکترونها را از طریق ارتعاشات شبکه پیشنهاد کردند [۸ و ۹] که هفت سال بعد به درک پایه ای از ابررسانایی منجر شد. آنها نشان دادند که برهمکنش الکترون-فونون قادر است دو الکترون را طوری به هم جفت کند که گویی رفتار آنها ناشی از وجود برهمکنشی مستقیم بین آنهاست. آنها نشان دادند که تحت شرایط معینی گسیل و جذب متعاقب فونون توسط دو الکترون می تواند به ایجاد جاذبه ضعیفی بین الکترون ها منجر شود. در فرایند گسیل و جذب فونون تکانه خطی پایسته است بنابراین این تکانه خطی الکترون قبل از گسیل فونون، با تکانه خطی الکترون بعد از گسیل فونون به علاوه تکانه خود فونون  $(\frac{h\nu q}{s})$  برابر است، که در آن  $s$  سرعت صوت می باشد. همین قضیه برای جذب فونون نیز برقرار است و از آن می توان نتیجه گرفت که پایستگی تکانه خطی بین حالت ابتدایی و نهایی در فرایند گسیل و جذب همزمان فونون توسط دو الکترون برقرار است. گرچه انرژی حالت های اولیه و نهایی پایسته است اما به خاطر عدم قطعیت میان انرژی و زمان، لزومی به پایستگی انرژی در حالت میانی یعنی گسیل یا جذب تنهای فونون وجود ندارد. از تحلیل های کوانتومی معلوم شده است که اگر اختلاف انرژی، بین حالت الکترون قبل از گسیل فونون و حالت آن بعد از گسیل فونون کمتر از  $h\nu q$  باشد، نتیجه کلی فرایند گسیل و جذب فونون جاذبه بین دو الکترون می باشد.

<sup>۱۲</sup> H.Frohlich

<sup>۱۳</sup> Bardeen