بسم الله الرحمن الرحيم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه آقای **حمیدرضا رازمنش** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی ۸۹۵۲۰۵۱۰۰۶ تحت عنوان: «**خودریختی‌های بورل فضاهای لهستانی**» را در تاریخ ۱۳۹۱/۱۱/۱۴ از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمد باقری	دانشیار	
۲- استاد مشاور	دکتر شهرام محسنی‌پور	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر مرتضی منیری	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	

اییننامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیات علمی، دانشجویان، دانش‌اموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درامدهای حاصل از انها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید اورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌اموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا اثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس ائین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این اییننامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیات رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب ...مهرسا زندی... دانشجوی رشته ...ریاضی محض... ورودی سال تحصیلی ...۸۹...

مقطع ...ارشد... دانشکده ...علوم ریاضی... متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در ائین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد ائین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر ان به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمنا نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس براورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا: ...زندی...

تاریخ: ....

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلا به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال ۱۳۹۱ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر سید محمد باقری، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر سهام محسنی پور و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر — از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب سید رضا زارعی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: سید رضا زارعی

تاریخ و امضا: زارعی

دانشکده‌ی علوم ریاضی

پایان‌نامه‌ی دوره‌ی کارشناسی ارشد ریاضی محض

خودریختی های بورل فضاهای لهستانی

نگارنده:

حمیدرضا رازمنش

استاد راهنما:

دکتر سیدمحمد باقری

استاد مشاور:

دکتر شهرام محسنی پور

بهمن ماه ۱۳۹۱

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس خدای را، آن نخستین بی‌پیشین را و آن آخرین بی‌پسین را، خداوندی را که آفریدگان را به قدرت خود ابداع کرد و به مقتضای مشیت خویش جامه‌ی هستی پوشید و به همان راه که ارادت او بود روان داشت و رهسپار طریق محبت کرد.

اکنون که به فضل خدا، نگارش این پایان‌نامه به پایان رسیده، بر خود لازم می‌دانم که از زحمات استاد راهنمای صبــور، خوش‌خلق و ارزش‌مندم، جناب آقای دکتر «سید محمد باقری » و هـــم‌چنین راهنمـایی‌های استاد مشاور ارجمند، جنـــاب آقای دکتر «شهرام محسنی-پور» سپاس‌گزاری کنم، و نهایت سعادت‌مندی و بهروزی را برای ایشان، از درگاه حق‌تعالی مسألت دارم. هم‌چنین بر خود فرض می‌دانم، مراتب قدردانی و سپاس خود را از اساتید بزرگوار، آقای دکتر «سید احمد موسوی » و آقای دکتر «مرتضی منیری » به خاطر قبول زحمت داوری این رساله، داشته باشم.

همچنین از خانواده‌ی عزیزم، به خصوص پدر و مادر گلم، که همواره از همراهی و سعه‌ی صدرشان بهره‌مند بوده‌ام قدردانی کرده و برای آنان طول عمر با عزت از خداوند متعال مسألت دارم.

حمید رضا رازمنش

چکیده

به یاد می آوریم که یک خودسانی بورل ، یک نگاشت دوسویی از یک فضا به خودش می باشد که گراف از آن یک مجموعه بورل باشد. از طرفی می توان بر روی این خودسانی ها ، روابط هم ارزی مناسبی تعریف کرد.

در این پایان نامه برآنیم که به دو سؤال پیچیده در مورد خودسانی های بورل فضاهای لهستانی پاسخ دهیم:

۱- آیا روابط هم ارزی بین خودسانی های بورل فضاهای لهستانی با روابط هم ارزی بورلی ، فرو کاست پذیر بورلیند؟

۲- آیا روابط هم ارزی بین خودسانی های بورل فضاهای لهستانی $\sum$ -کاملند؟

واژه های کلیدی

۱) فضای لهستانی

۲) خودسانی های بورل

۳) روابط هم ارزی بورلی

۴) فروکاست پذیری بورلی

۵) $\sum$ -کامل

فهرست مطالب

پیش گفتار

نظریه مجموعه های توصیفی [1] یکی از شاخه های نظریه مجموعه هاست که در اوایل قرن ۲۰ بوجود آمد. یکی از موارد مطالعه این نظریه، تعریف پذیری و همچنین رده بندی مجموعه اعداد حقیقی و فضاهای لهستانی (یک فضای توپولوژیک که جدایی پذیر و بطور کامل متریک پذیر است.) دیگر می باشد. در این زمینه می توان از بورل ، بئر و لبگ به عنوان پایه گذاران اولیه این علم یاد کرد تا جاییکه آنها را پدران علم نظریه مجموعه های توصیفی می دانند. یکی از مجموعه های پر کاربرد در این نظریه، مجموعه های بورل می باشند. به گونه ای که می توان به کمک این مجموعه ها، توابع بورل را بر روی فضاهای لهستانی تعریف کرد و به همین طریق می توان به خودسانی های بورل فضاهای لهستانی دسترسی پیدا کرد.

امروزه یکی از موارد مورد مطالعه بر روی فضاهای لهستانی بحث روابط هم ارزی بورلی و همچنین ارتباط این روابط با هم می باشد. طوری که اگر E و F دو رابطه هم ارزی بر روی فضاهای لهستانی X و Y باشند. آنگاه می توان مفهوم فروکاست پذیری بورلی که در فصل (۳) به آن می پردازیم را بین این دو رابطه مطرح کرد.

در [] ایگن [2] ، حاجیان [3] و ویس [4] چگونگی ساخت یک زنجیر از خودسانی های بورل ناایزومورف را نشان می دهند با گسترش این بحث نشان خواهیم داد که

قضیه ۱.۰. یک نگاشت بورل از زیرمجموعه های بورل فضای بئر به خودسانی های بورل فضای کانتور (از A به f_A) وجود دارد بطوریکه

$$A \subseteq B \iff f_A \preceq f_B$$

و با استفاده از این قضیه می خواهیم به نتیجه مهم زیر دسترسی پیدا کنیم

---

[1] Descriptive set theory

[2] Eigen

[3] Hajian

[4] Weiss

رابطه هم ارزی روی تساوی زیر مجموعه های بورل فضای ω^ω فرو کاست پذیر بورلی با رابطه هم ارزی روی ایزومورف بورلی خودسانی های بورل فضای کانتور است.
در فصل اول با فضاهای لهستانی ،کانتور و بئر آشنا شده و همچنین مجموعه های بورل و واکاویک را مورد بررسی قرار می دهیم. در فصل دوم ضمن تعریف مجموعه- های افکنشی به رده بندی آنها پرداخته و در مورد مجموعه های $\prod$ و $\sum$ و همچنین کدهای بورلی توضیحاتی را خواهیم داد. در فصل سوم در مورد روابط هم ارزی بر روی فضاهای لهستانی از جمله بورلی ، بورل شمارا و واکاویک مطالبی را بیان کرده و با مفهوم فروکاست پذیری بورلی آشنا می شویم. در فصل چهارم به اثبات قضیه اصلی پایان نامه پرداخته و همچنین در مورد پیچیدگی های روابط هم ارزی بین خودسانی های بورل فضاهای لهستانی مطالبی را بیان خواهیم کرد.

فصل ۱

نظریه مجموعه های توصیفی

در این فصل ابتدا تاریخچه ی کوتاهی از پیدایش نظریه مجموعه های توصیفی بیان می کنیم. سپس به معرفی فضاهای لهستانی ، بئر و کانتور می پردازیم. در ادامه مجموعه های بورل را تعریف کرده ، سپس سلسله مراتب این مجموعه ها را بررسی می کنیم. در قسمت بعدی به ویژگی بئر که از اهمیت فراوانی برخوردار است می‌پردازیم . سپس با استفاده از مجموعه های بورل ، مجموعه های واکاویک [۱] و مکمل واکاویک را تعریف می کنیم.

۱.۱ مقدمه

نظریه مجموعه های توصیفی ، یکی از شاخه های نظریه مجموعه ها است که به مطالعه وابستگی مجموعه ها با عملگرهایی مانند اجتماع ، اشتراک، مکمل پذیری و تصویرپذیری می پردازد. ریشه های نظریه مجموعه های توصیفی در اوایل قرن ۲۰

[۱] Analytic

بوجود آمد.جایی که افرادی مانند بورل[۲] ، بئر[۳] و لبگ[۴] بر روی اندازه پذیری مجموعه ها تحقیقات می کردند.
ابتدا بورل مجموعه هایی را که بعدها به عنوان مجموعه بورل مشهور شد تعریف کرد. سپس بر روی اندازه پذیری این نوع مجموعه ها به بررسی پرداخت و موفق به تعریف اندازه ای به نام اندازه بورل شد. بئر توابعی را مطرح کرد که به توابع بئر شهرت یافته است. او توانست با رده بندی این توابع قضایای مهمی چون قضیه بئر را اثبات کند. لبگ نیز ضمن اینکه مجموعه های لبگ و توابع اندازه پذیر بورل را تعریف کرد نشان داد که توابع اندازه پذیر بورل با توابع بئر هم ارزند.

۲.۱ فضاهای لهستانی

یکی از مهمترین قسمتها در نظریه مجموعه های توصیفی ، شناخت فضاهای لهستانی است بطوریکه اکثر کارهای علمی در زمینه نظریه مجموعه های توصیفی بر روی این فضاها اعمال می شود در اینجا با مقدمه زیر به صورت مختصر به بررسی این فضاها می پردازیم.

فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد. گوییم X یک فضای به طور کامل متریک پذیر[۵] است هر گاه متر d روی X وجود داشته باشد بطوریکه (X,d) یک فضای متریک کامل بوده و توپولوژی τ ناشی از متر d باشد.

حال گوییم X جدایی پذیر[۶] است هر گاه دارای یک زیر مجموعه چگال شمارا باشد.

[۲] E-Borel
[۳] R-Baire
[۴] Lebesgue
[۵] Metrizable
[۶] Separable

تعریف ۱.۱. گوییم X یک فضای لهستانی [۷] است. هر گاه X یک فضای توپولوژیک جدایی پذیر به طور کامل متریک پذیر باشد.

مثال ۲.۱. مثالهای ساده از فضای لهستانی عبارتند از:

$$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, I = [,], \mathbb{N}$$

نکته ۳.۱. اگر X, X, X و... فضاهای لهستانی باشند. آنگاه $\prod X_n$ فضای لهستانی است.

لم ۴.۱. فرض کنیمX یک فضای لهستانی باشدو... $\supseteq X \supseteq X \supseteq X$ زیر مجموعه-های بسته ای از X باشند بطوریکه:

$$\lim_{n\to\infty} diam(X_n) =$$

آنگاه $x \in X$ وجود دارد بطوریکه $\bigcap X_n = \{x\}$ باشد.

،

۳.۱ فضای بئرو فضای کانتور

از مهمترین مثالهای فضاهای لهستانی، فضای بئر و فضای کانتور می باشند. بطوریکه در بسیاری از موارد برای اثبات قضیه ای در فضاهای لهستانی کافیست بر روی یکی از این دو فضا به عنوان الگو ، قضیه را ثابت کنیم. اکنون بوسیله نکته تاکتیکی زیر به معرفی این دو فضا می پردازیم.

نکته ۵.۱. فرض کنیمA یک مجموعه شمارا با توپولوژی گسسته، و Xیک مجموعه شماراباشد. آنگاهA^X یک فضای لهستانی است.

[۷]polish space

تعریف ۶.۱. فرض کنیم X یک فضای لهستانی باشد گوییم X یک فضای بئر [۸] است هر گاه به صورت $\mathcal{N} = \omega^\omega$ بوده و اگر به صورت $\mathcal{C} = {}^\omega$ گوییم X یک فضای کانتور [۹] می باشد.

یکی از ویژگی های فضای بئر این است که هر فضای لهستانی تصویری پیوسته از فضای بئر است بطوریکه می توان گفت
اگر X یک فضای لهستانی باشد. آنگاه یک نگاشت پوشای پیوسته $\varphi : \mathcal{N} \longrightarrow X$ از فضای بئر به فضای لهستانی داریم. و همچنین یک مجموعه بسته $F \subseteq \mathcal{N}$ وجود دارد بطوریکه نگاشت $\varphi : F \longrightarrow X$ یک نگاشت دو سویی پیوسته است.

تعریف ۷.۱. فرض کنیم X یک فضای لهستانی باشد. گوییم $P \subseteq X$ کامل [۱۰] است هر گاه X یک مجموعه بسته باشد که هیچ نقطه ایزوله ای ندارد.

حال فرض کنیم X یک فضای لهستانی و $F \subseteq X$ یک مجموعه بسته باشد. اگر Pیک مجموعه کامل ، Aیک مجموعه شمارا و $P \cap A = \emptyset$ ، آنگاه $F = P \cup A$

تعریف ۸.۱. فرض کنیم X یک فضای لهستانی باشد. گوییم $Y \subseteq X$ یک زیر فضای لهستانی است اگر Y یک مجموعه G_δ باشد.

۴.۱ مجموعه های بورل

یکی از مجموعه های پر کاربرد در فضاهای اندازه پذیر ،بویژه فضاهای لهستانی مجموعه های بورل می باشند. بطوری که بسیاری از کارهای مهم علمی در زمینه اندازه پذیری، روابط هم ارزی و شاخه ها ی مختلف نظریه مجموعه های توصیفی بویژه روابط هم ارزی از این مجموعه ها کمک می گیرند. و هم اکنون نیز کارها علمی بر روی این مجموعه ها رو به افزایش است.

[۸] Baire space

[۹] Cantor space

[۱۰] perfect

تعریف ۹.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. کلاس[۱۱] از مجموعه های بورل $(\mathcal{B}(X))$ ، کوچکترین σ -جبر شامل مجموعه های باز می باشد.

تعریف ۱۰.۱. گوییم فضای اندازه[۱۲] (X,Ω) (Ω ، σ - جبرمی باشد.) یک فضای بورل استاندارد است اگر یک فضای لهستانی مانند Y وجود داشته باشد بطوریکه (X,Ω) ایزومورف با $(Y,(\mathcal{B}(X))$ باشد.

تعریف ۱۱.۱. فرض کنیم X یک فضای متریک پذیر باشد. مجموعه های $\sum_\alpha(X)$ و $\prod_\alpha(X)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:
$\sum(X)$:گردایه همه زیر مجموعه های باز X
$\prod(X)$:گردایه همه زیر مجموعه های بسته X

$$A\in\prod_\alpha(X)\Longleftrightarrow X\setminus A\in\sum_\alpha(X)$$

$$A\in\sum_\alpha(X)\Longleftrightarrow A=\bigcup_{n\in\omega}B_n \text{ که } B_n\in\prod_\beta(X) \text{ و } \beta<\alpha$$

بوضوح با استقرا بر روی $\alpha<\omega$ می توان ثابت کرد که اعضای $\sum_\alpha$ و $\prod_\alpha$ بورل هستند. با توجه به اینکه هر مجموعه باز اجتماع تعدادی شمارا از مجموعه های بسته است ما خواهیم داشت:

$$\sum\subseteq\sum\subseteq\sum,\ldots$$

$$\prod\subseteq\prod\subseteq\prod,\ldots$$

و در حالت کلی اگر $\alpha<\beta$

$$\prod_\alpha\subset\sum_\beta \text{ ، } \prod_\alpha\subset\prod_\beta \text{ ، } \sum_\alpha\subset\prod_\beta \text{ ، } \sum_\alpha\subset\sum_\beta$$

و از اینجا

$$\bigcup_{\alpha<\omega}\sum_\alpha=\bigcup_{\alpha<\omega}\prod_\alpha$$

---

[۱۱] Class

[۱۲] Measure space

تعریف ۱۲.۱. فرض کنیم X یک فضای لهستانی باشد در این صورت داریم :

$$\Delta_\alpha(X) = \sum_\alpha(X) \cap \prod_\alpha(X)$$

لم ۱۳.۱. فرض کنیم X یک فضای لهستانی باشد آنگاه:
$\sum_\alpha(X)$: تحت اجتماع شمارا و اشتراک متناهی بسته است.
$\prod_\alpha(X)$: تحت اشتراک شمارا و اجتماع متناهی بسته است
$\Delta_\alpha(X)$: تحت اشتراک و اجتماع متناهی و مکمل بسته است.

مثال ۱۴.۱. فرض کنیم که $A = \{x \in \mathcal{N} : x\, is\, bijection\}$ آنگاه $A \in \prod$ می باشد.

نکته ۱۵.۱. فرض کنیم X،Y دو فضای لهستانی و $A \subseteq X \times Y$ یک مجموعه $\sum_\alpha$ ،و $a \in Y$ باشد. آنگاه $\{x : (x,a) \in A\}$ نیز یک مجموعه $\sum_\alpha$ است.

فرض کنیم X یک فضای لهستانی با توپولوژی τ ، و $A \subseteq X$ یک مجموعه بورل باشد. آنگاه یک توپولوژی τ^* روی X وجود دارد بطوریکه A در τ^* یا باز و یا بسته است. و τ و τ^* مجموعه های بورل شبیه به هم دارند.
حال می توان از این دیدگاه استفاده کرد و به استنباط قضایای مهم زیر رسید.

فرض کنیمX یک فضای لهستانی ، و $B \subseteq X$ یک مجموعه ناشمارا باشد. آنگاهB شامل یک مجموعه کامل است.

فرض کنیم Xیک فضای لهستانی ، و $B \subseteq X$ یک مجموعه بورل باشد. آنگاه:
۱) نگاشت پیوسته$f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ با $f(\mathcal{N}) = B$ وجود دارد.
۲) برای مجموعه بسته$F \subseteq \mathcal{N}$ نگاشت پیوسته و یک به یک $g : F \longrightarrow X$ با $g(F) = B$ وجود دارد.

نکته ۱۶.۱. فرض کنیمX یک فضای لهستانی باشد. آنگاه مجموعه های $\sum_\alpha(X)$ ،$\prod_\alpha(X)$ و $\Delta_\alpha(X)$ تحت نگاشت با تصویر معکوس پیوسته، بسته هستند.

۵.۱ پایگان مجموعه های بورل

حال به بررسی پایگان مجموعه های بورل [۱۳]می پردازیم. سؤالی که در اینجا پیش می آید این است که آیا واقعا هنگام ساخت مجموعه های بورل برای $\alpha \leq \omega$ احتیاج به $\sum_\alpha$ -مجموعه ها داریم ؟
اگر X یک مجموعه شمارا و $Y \subseteq X$ ، آنگاه Y و $X \setminus Y$ اجتماع شمارا از نقاط هستند پس $Y \in \Delta$ می باشد به عبارت دیگر ما نشان خواهیم داد اگر X یک فضای لهستانی ناشمارا باشد آنگاه

$$\sum_\alpha \neq \sum_\beta \text{ برای } \alpha \neq \beta$$

اگر $U \subseteq Y \times X$ و $a \in Y$ ما تعریف می کنیم:

$$U_a = \{b \in X : (a,b) \in U\}$$

تعریف ۱۷.۱. فرض کنیم Y و X دو فضای لهستانی باشند. گوییم $U \subseteq Y \times X$ یک مجموعه $\sum_\alpha$ - جهانی[۱۴] است. هر گاه $U \in \sum_\alpha(Y \times X)$ باشد

بر طبق تعریف بالا اگر $A \in \sum_\alpha(X)$ باشد. آنگاه برای تعدادی $a \in A$ ، $A = U_a$ می-باشد.

حال فرض کنیم X یک فضای متریک جدایی پذیر باشد. آنگاه برای همه $\leq \alpha \leq \omega$ مجموعه های $\sum_\alpha$ - جهانی $U_\alpha \subseteq \mathcal{C} \times X$ و $\prod_\alpha$- جهانی $V_\alpha \subseteq \mathcal{C} \times X$ وجود دارند.

تعریف ۱۸.۱. فرض کنیم X،Y دو فضای لهستانی باشند با $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ ، گوییم A فروکاست پذیری-گوه ای[۱۵] با B است اگر یک نگاشت پیوسته $f : X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد بطوریکه برای همه $x \in A$ ، داشته باشیم: $x \in A \iff f(x) \in B$

[۱۳]The borel hierarchy

[۱۴]Universal

[۱۵]Wadge- reducible

اگر A فروکاست پذیری - گوه ای با B باشد می نویسیم $A \leq_W B$
و اگر $A \leq_W B$ آنگاه $X \setminus A \leq_W X \setminus B$

مثال ۱۹.۱. اگر $A \subseteq \mathcal{N}$ یک مجموعه باز باشد آنگاه $A \leq_W \{x \in \mathcal{N} : \exists n x(n) = \}$ می باشد.

تعریف ۲۰.۱. فرض کنیم $\Gamma = \sum_\alpha$ یا $\prod_\alpha$ باشد. گوییم $A \subseteq X$ ، Γ - کامل[۱۶] است اگر $A \in \Gamma(X)$ و اگر $B \in \Gamma(X)$ آنگاه $B \leq_W A$ باشد.

نکته ۲۱.۱. گزاره های زیر برقرارند:
۱) فرض کنیم $\check{\Gamma} = \{X \setminus A : A \in \Gamma\}$ باشد. اگر A ، Γ -کامل باشد آنگاه $X \setminus A$ ، $\check{\Gamma}$ - کامل است.
۲) فرض کنیم $A \subseteq X$ ، Γ-کامل باشد. آنگاه $A \in \check{\Gamma}$ نیست.

مثال ۲۲.۱. ۱) مجموعه $\{x \in \mathcal{N} : \exists n x(n) = \}$ ، $\sum$ -کامل است ۲) مجموعه $\{f \in \mathcal{N} : f \; is \; surjective\}$ ، $\prod$ -کامل است. ۳) مجموعه $\{x \in \mathcal{N} : \exists n \, \forall m > n \, x(m) = \}$، $\sum$ -کامل است.

۶.۱ ویژگی بئر

از کارهای مهمی که بئر در آنالیز ریاضی توانست ابداع کند ویژگی بئر[۱۷] بود. این ویژگی که شبیه به اندازه پذیری مجموعه ها می باشد به بررسی مجموعه های چگال و هیچ جا چگال [۱۸] می پردازد. تمام مجموعه های بازو بسته دارای ویژگی بئر می-باشند. و می توان با اصل انتخاب مجموعه ای را مثال زد که دارای ویژگی بئر نیست که از مجموعه ویتالی می توان در این زمینه نام برد.

[۱۶] Complete
[۱۷] Baire property
[۱۸] Nowhere dense set

تعریف ۲۳.۱. فرض کنیم X یک فضای لهستانی و $U \subseteq X$ یک مجموعه باز باشد. گوییم $A \subseteq X$ یک مجموعه هیچ جا چگال است اگر یک مجموعه باز غیر خالی $V \subseteq U$ وجوداشته باشد بطوریکه $A \cap U = \emptyset$ باشد.

تعریف ۲۴.۱. فرض کنیم X یک فضای لهستانی باشد. گوییم$A \subseteq X$یک مجموعه ناچیز[19] است اگر X ، اجتماع شمارا از مجموعه های هیچ جا چگال باشد. و مکمل آن یک مجموعه غیر ناچیز [20] می باشد

مثال ۲۵.۱. مجموعه کانتور یک مجموعه هیچ جا چگال است.

قضیه زیر که معروف به قضیه رسته بئر است یکی از قضایای مهم این بخش است.

قضیه ۲۶.۱. فرض کنیم X یک فضای لهستانی باشد. آنگاه X یک مجموعه غیر ناچیز می باشد.

تعریف ۲۷.۱. فرض کنیم $A, B \subseteq X$ باشند. گوییم$A =_* B$ اگر و تنها اگر $A \Delta B$ یک مجموعه ناچیز باشد.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

تعریف ۲۸.۱. فرض کنیم X یک فضای لهستانی باشد. گوییم $A \subseteq X$ دارای ویژگی بئر است اگر یک مجموعه باز$U \subseteq X$ وجود داشته باشد بطوریکه $A =_* U$باشد.

فرض کنیم $BP = \{A \subseteq X : A\ has\ the\ property\ baire\}$ آنگاه با توجه به اینکه هر مجموعه باز یا بسته دارای ویژگی بئر می باشد لذا BP تحت مکمل بسته است. و BP یک σ-جبر شامل مجموعه های بورل می باشد.

لم ۲۹.۱. اگر A دارای ویژگی بئر باشد آنگاه $X \setminus A$ نیز چنین است.

---

[19] Meager

[20] NonMeager