دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی عمران

بررسی مسائل خمش و ارتعاش آزاد ورق‌های ضخیم کامپوزیت با استفاده از توابع پایه نمایی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی عمران- سازه

مینا شهبازی

استاد راهنما

دکتر بیژن برومند

بهار ۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی عمران خانم مینا شهبازی

تحت عنوان

بررسی مسائل خمش و ارتعاش آزاد ورق‌های ضخیم کامپوزیت با استفاده از توابع پایه نمایی

در تاریخ ۱۳۹۰/۰۱/۱۷ توسط کمیته تخصصی ذیل مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱. استاد راهنمای پایان نامه	دکتر بیژن برومند
۲. استاد مشاور پایان نامه	دکتر مجتبی ازهری
۳. استاد داور	دکتر محمد مهدی سعادت‌پور
۴. استاد داور	دکتر حمید هاشم الحسینی
سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر عبدالرضا کبیری

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست مطالب ..... هشت

چکیده ۱

فصل اول: مقدمه و کلیات

۱-۱- مقدمه ۲

۱-۲- مروری بر تئوری‌های موجود ۳

۱-۳- تاریخچه‌ای بر روش‌های حل مسائل استاتیکی ورق‌ها ۱۰

۱-٤- تاریخچه‌ای بر روش‌های حل مسائل ارتعاش آزاد ورق‌ها ۱۳

۱-۵- روش حل و محتوای فصول آینده ۱۵

فصل دوم: حل معادلات دیفرانسیل ورق کامپوزیت بر اساس تئوری کلاسیک ورق

۲-۱- مقدمه ۱٦

۲-۲- معرفی ورق‌های کامپوزیتی ۱٦

۲-۲-۱-کامپوزیت‌های لایه‌ای ۱۸

۲-۲-۲-روابط بنیادی لایه‌های الیافی ۱۹

۲-۳- تئوری کلاسیک ورق‌های لایه‌ای ۲۵

۲-٤- روش حل ۳۱

۲-۵- محاسبه بخش همگن پاسخ در تئوری کلاسیک ورق ۳۱

۲-۵-۱-نحوه ارضای شرایط مرزی در تئوری کلاسیک ورق ۳٦

۲-۵-۲-نحوه انتخاب ضرایب α_i و یا β_i ٤۰

۲-٦- محاسبه بخش خصوصی پاسخ در تئوری کلاسیک ورق ٤۱

۲-٦-۱-حل خصوصی با استفاده از سری فوریه ٤۱

۲-٦-۲-حل خصوصی بر اساس تبدیل به کار رفته در حل همگن ٤۲

عنوان **صفحه**

فصل سوم: حل معادلات دیفرانسیل ورق کامپوزیت بر اساس تئوری‌های تغییر شکل برشی

۳-۱- مقدمه ٤٥

۳-۲- تئوری تغییر شکل برشی درجه اول و سوم ٤٥

۳-۳- محاسبه بخش همگن پاسخ در تئوری تغییر شکل برشی درجه اول و سوم ٥٢

۳-٤- ارضاء شرایط مرزی ٦٢

فصل چهارم: مثال‌های حل استاتیکی ورق و بررسی نتایج

٤-۱- مقدمه ٦٧

٤-۲- مثال‌ها و بررسی نتایج ٦٧

فصل پنجم: حل معادلات دیفرانسیل ورق کامپوزیت با استفاده از روش بدون شبکه محلی

٥-۱- مقدمه ١٠٤

٥-۲- روش حل ١٠٥

٥-۲-۱-بخش همگن ١٠٦

٥-۲-۲-ارضاء شرایط مرزی ١٠٧

٥-۲-۳-بخش خصوصی ١١١

٥-۳- انتخاب مودها ١١٢

٥-٤- مثال‌های عددی ١١٣

فصل ششم: حل مسئله ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای

٦-۱- مقدمه ١١٨

٦-۲- معادلات حاکم و روش حل ١٢٠

٦-۳- نحوه انتخاب توابع پایه ١٢٤

٦-٤- فرم قوی معادلات تعادل ورق ١٢٦

فصل هفتم: مثال‌های ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای

۷-۱- مقدمه ١٢٧

عنوان **صفحه**

۷-۲- مثال‌های مسائل ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیت بر اساس تئوری کلاسیک ۱۲۷

۷-۳- مثال‌های مسائل ارتعاش آزاد بر اساس تئوری تغییر شکل برشی درجه اول و سوم ۱۴۷

فصل هشتم: نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۸-۱- مقدمه ۱۵۲

۸-۲- نتیجه‌گیری ۱۵۲

۸-۳- پیشنهادات ۱۵۳

پیوست ۱ ..... ۱۵۴

پیوست ۲ ..... ۱۵۸

فهرست مراجع ۱۶۰

چکیده

در این پایان نامه به بررسی رفتار خمشی و ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای نسبتاً ضخیم با اشکال هندسی و شرایط مرزی مختلف براساس سه تئوری کلاسیک ورق، تئوری تغییر شکل برشی درجه اول میندلین و تئوری تغییر شکل برشی درجه سوم ردی پرداخته شده است. بدین منظور از یک روش عددی بدون نیاز به شبکه‌بندی دامنه حل به دو شکل کلی و محلی برای بررسی مسائل خمشی ورق استفاده شده است. همچنین روش بدون شبکه دیگری به منظور حل مسائل ارتعاش آزاد ورق توسعه داده شده است. اساس همه این روش-ها مبتنی بر بیان توابع مجهول میدان جابجایی ورق به صورت ترکیبی خطی از مودهایی است که از توابع نمایی تشکیل شده‌اند. این مودها توسط ضرایب ثابتی ترکیب می‌شوند که با ارضای مستقیم شرایط مرزی بر روی نقاط در نظر گرفته شده بر روی مرز ورق، قابل حصول خواهند بود. در حل مسئله خمشی ورق، معادلات دیفرانسیل ورق به صورت مستقیم بر روی کل دامنه حل و یا به صورت محلی بر آورده می‌گردند، لیکن در مسئله ارتعاش آزاد ورق که یک مسئله مقادیر ویژه است، فرم تغییراتی معادلات دیفرانسیل ارضا خواهند شد. از این‌رو می‌توان این روش بدون شبکه مرزی را همانند روش حل‌های اساسی به حساب آورد. لیکن تفاوت عمده این روش با دیگر روش‌های متداول حل‌های اساسی، استفاده از توابع پایه هموار نمایی و نحوه ارضا معادلات حاکم و شرایط مرزی مسئله است. از مزایای بارز روش-های مورد استفاده در این پایان‌نامه می‌توان به سادگی استفاده از توابع نمایی به دلیل هموار بودن آن‌ها، عدم نیاز به انتگرال‌گیری عددی، عدم نیاز به شبکه المان‌بندی ورق، افزایش سرعت و کاهش هزینه محاسبات اشاره نمود.

برای بررسی دقت و کارآمدی روش‌های مورد استفاده، در طی این پایان‌نامه مسائل متنوعی برای انواع ورق‌های تک‌لایه و چند لایه کامپوزیتی با اشکال هندسی و شرایط مرزی مختلف و بر اساس سه تئوری متداول در بررسی رفتار اینگونه ورق‌ها، ارائه شده است. نتایج حاصل با نتایج دیگر محققین در این زمینه مقایسه گردیده، همچنین در صورت نیاز از حل های تحلیلی و نیمه تحلیلی موجود در مقایسهٔ نتایج استفاده شده است.

کلمات کلیدی: ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای، توابع پایه نمایی، تئوری‌های تغییر شکل برشی

فصل اول
مقدمه و کلیات

۱-۱- مقدمه

کاربرد گسترده مواد کامپوزیت در ساخت اعضای سازه‌ای سبک با مقاومت و سختی بالا موجب پیدایش جایگاه ویژه این مواد در صنایع مختلف از جمله صنعت هوا فضا، صنعت دریانوردی، حمل و نقل و نیز دیگر شاخه-های علوم پایه و مهندسی گردیده است. از رایج‌ترین کاربردهای این مواد می‌توان به کاربرد آن‌ها در ساخت بدنه هواپیما و هلکوپترها، سازه‌های زیر دریایی و کشتی‌ها، لوله‌ها، سیلوها و مخازن صنعتی، پل‌ها و دیگر سازه‌های ساختمانی اشاره کرد.

در دو دهه اخیر تحقیقات وسیعی در زمینه آنالیز و طراحی سازه‌های کامپوزیتی به منظور برآورد دقیقی از تغییر شکل‌ها و تنش‌های ایجاد شده در ورق‌ها و پوسته‌ها و همچنین بررسی رفتار کمانشی و ارتعاشی آن‌ها صورت گرفته است.

به طور کلی مواد کامپوزیتی از تلفیق دو یا چند ماده با خواص فیزیکی و مکانیکی مختلف بدست می‌آیند، به گونه‌ای که مواد تشکیل‌دهنده آن در مقیاس ماکروسکوپیک و میکروسکوپیک به صورت مجزا و متمایز از یکدیگر باقی می‌مانند. مواد کامپوزیتی الیافی از پرکاربردترین مواد کامپوزیتی است که همانند یک ماده ارتوتروپیک عمل می‌کند. از روی هم‌گذاری لایه‌های متعددی از این نوع مواد، کامپوزیت‌های لایه‌ای الیافی بدست می‌آیند که به دلیل پیچیدگی خواص فیزیکی و مکانیکی، تئوری‌ها و روش‌های متعددی برای بررسی رفتار آن‌ها توسعه داده شده است.

در ادامه مروری بر تئوری‌های مورد استفاده در تحلیل این نوع ورق‌ها و نیز انواع روش‌های موجود برای بررسی رفتار خمشی و ارتعاش آزاد آن‌ها خواهد شد.

۱-۲- مروری بر تئوری‌های موجود

پیچیدگی رفتار ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای به دلیل اثرات ناهمسانی درون‌صفحه‌ای[1] و ناهمسانی عرضی[2] است[۱]. این دو ویژگی بارز در سازه‌های چند لایه‌ای، پایه و اساس توسعه تئوری‌های مختلفی در ارتباط با ورق‌ها و پوسته‌های لایه‌ای است.

الف) ناهمسانی درون‌صفحه‌ای

در سازه‌های چند لایه‌ای که هر لایه از ماده‌ای غیر ایزوتروپیک ساخته شده است، ناهمسانی درون‌صفحه‌ای به خوبی مشهود است. بدین‌معنا که خواص فیزیکی-مکانیکی سازه در جهات مختلف درون‌صفحه‌ای کاملاً متفاوت است. این امر باعث بروز تغییر شکل‌های عرضی قائم و برشی بیشتری نسبت به تغییر شکل‌های درون‌صفحه‌ای می‌شود. به عنوان مثال در مواد کامپوزیتی پیشرفته‌ای که امروزه در سازه‌های هوا-فضا استفاده می‌شود، نسبت مدول‌های الاستیسیته در دو جهت متعامد درون‌صفحه‌ای[3] $E_L/E_T = E_L/E_z = 5-40$ است که L نشان‌دهنده جهت الیاف تقویت‌کننده ورق و T, z بیانگر جهات متعامد بر L هستند. همچنین نسبت مدول برشی عرضی به مدول الاستیسیته درون‌صفحه‌ای[4] $G_{LT}/E_T = G_{LT}/E_T = 1/10-1/200$ است که موجب بروز تغییر شکل‌های برشی عرضی و تغییر شکل عمودی بیشتری نسبت به ورق‌های ایزوتروپیک می‌گردد. از این‌رو به سازه‌های ساخته شده از مواد لایه‌ای، سازه‌های با تغییر شکل عرضی زیاد[5] اطلاق می‌گردد. علاوه بر این وجود ناهمسانی درون‌صفحه‌ای باعث اثرگذاری همزمان کرنش‌های برشی عرضی و درون‌صفحه‌ای بر یکدیگر می‌گردد که خود روند حل مسئله را پیچیده‌تر می‌سازد.

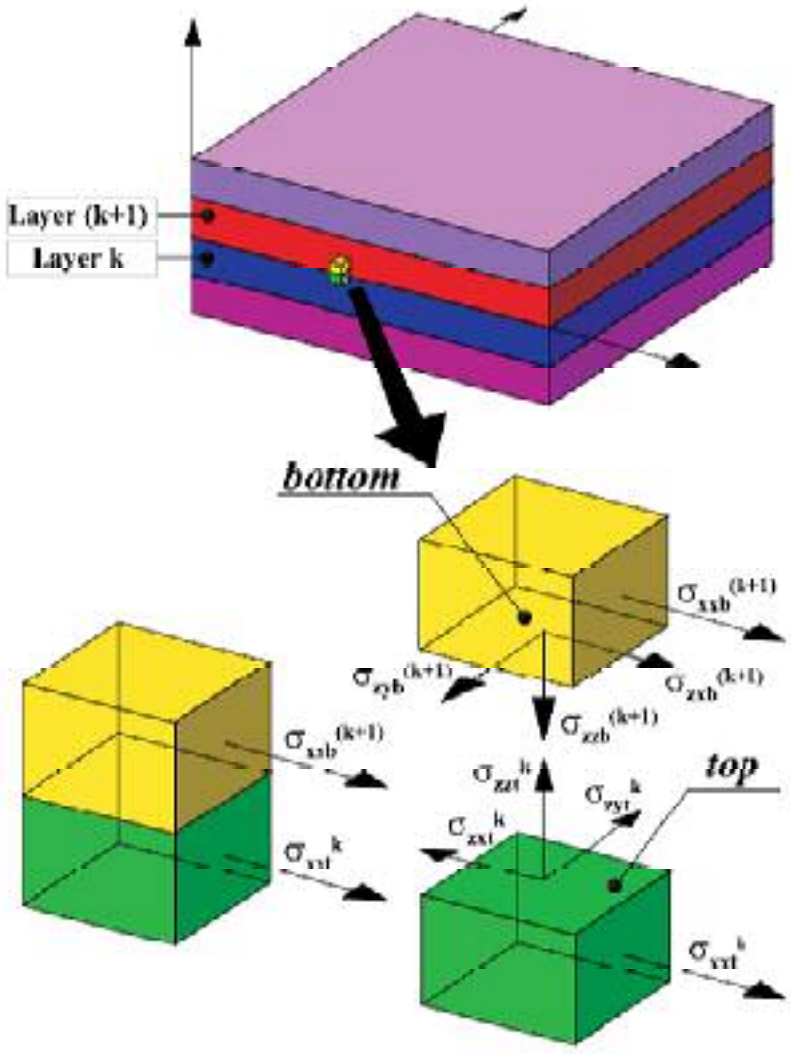
ب) ناهمسانی عرضی

از دیگر مواردی که منجر به پیچیدگی رفتار سازه‌ای مواد کامپوزیت لایه‌ای می‌شود، تغییرات خواص فیزیکی-مکانیکی در راستای ضخامت ورق است. عدم پیوستگی در خواص مکانیکی در راستای ضخامت ورق منجر به تغییرات شدید مولفه‌های میدان جابجایی در راستای ضخامت و در مرز بین لایه‌ها می‌شود. از این‌رو گفته می‌شود که مولفه‌های میدان جابجایی در راستای ضخامت ورق به شکل زیگزاگی تغییر می‌کند.

---

[1] In-plane Anisotropy (IA)
[2] Transverse Anisotropy (TA)
[3] Young's Moduli Orthotropic Ratio
[4] Transverse Shear Moduli ratio
[5] High Transversely Deformable (HTD)

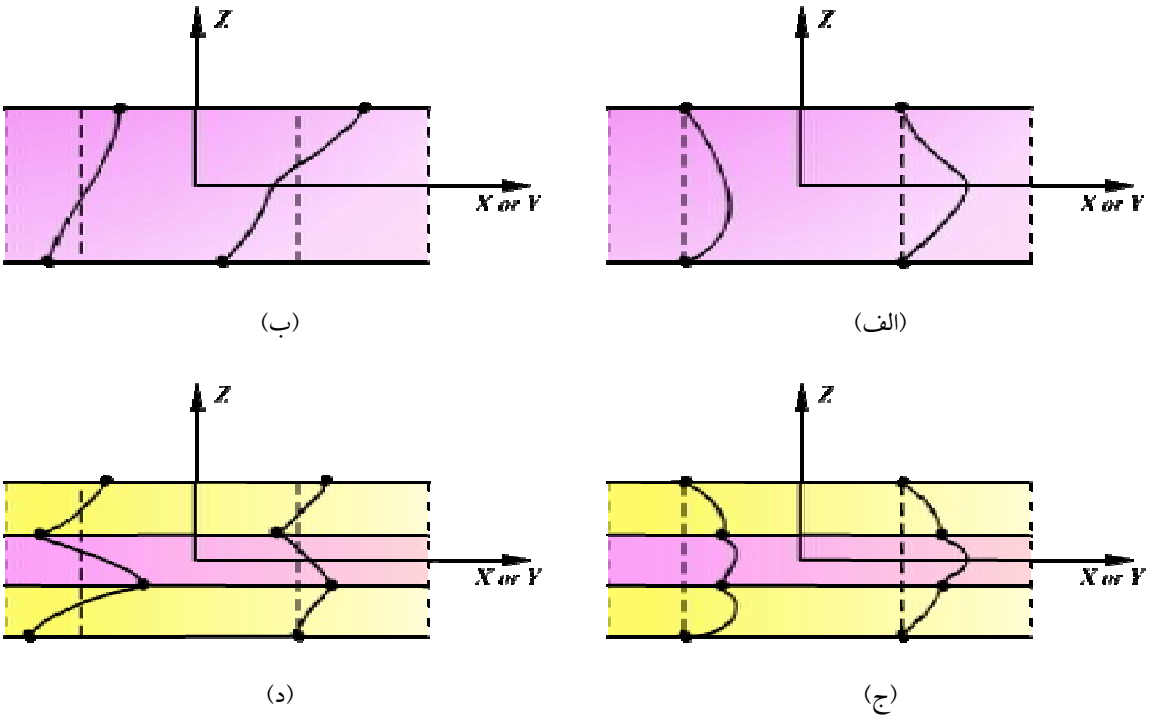
در یک ورق چند لایه‌ای مطابق با شکل ۱-۱، تنش‌های درون‌صفحه‌ای $\sigma_p = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$ می‌توانند از لایه‌ای به لایه دیگر ناپیوسته باشند، لیکن تنش‌های عرضی (خارج از صفحه) $\sigma_n = (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})$ به منظور حفظ تعادل در مرز بین لایه‌ها پیوسته هستند که به آن پیوستگی بین‌لایه‌ای[1] نیز اطلاق می‌گردد.



شکل ۱-۱ تنش‌های درون‌صفحه‌ای $\sigma_p = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$ و برون‌صفحه‌ای $\sigma_n = (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})$ در دو لایه مجاور به هم در یک ورق چند لایه‌ای [۱]

به منظور درک بهتر اثرات ناهمسانی درون‌صفحه‌ای و عرضی در رفتار ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای، توزیع واقعی مولفه‌های میدان جابجایی و تنش‌های عرضی در یک ورق سه لایه ارتوتروپیک و تفاوت آن‌ها با یک ورق ایزوتروپیک در شکل ۱-۲ نشان داده شده است.

[1] Inter-laminar Continuity (IC)



شکل ۱-۲ مقایسه توزیع واقعی تنش‌های عرضی و مولفه‌های میدان جابجایی در ورق تک‌لایه‌ای و چند لایه‌ای الف) توزیع تنش‌های عرضی در ورق تک‌لایه ایزوتروپیک، ب) توزیع جابجایی در ورق تک‌لایه ایزوتروپیک، ج) توزیع تنش‌های عرضی در ورق سه لایه ای، د) توزیع جابجایی در ورق سه لایه ای.

با توجه به توضیحات داده شده واضح است که میدان جابجایی و تنش‌های عرضی، به دلیل حفظ شرایط همسازی و تعادل، از شرایط پیوستگی نوع C^0 در راستای ضخامت ورق برخوردارند. بر این اساس تئوری‌های مختلفی برای مسائل ورق و پوسته‌ها توسط محققین ارائه شده است. از میان انبوه تئوری‌های موجود، آن دسته از تئوری‌هایی که متغیرهای مجهول آن‌ها از جنس جابجایی[1] هستند را می‌توان در دو گروه عمده بر اساس چگونگی تعریف مولفه‌های میدان جابجایی و مدلسازی پیوستگی بین لایه‌ها طبقه‌بندی نمود.

الف) تئوری‌های چند لایه‌ای[2]

در این دسته از تئوری‌ها، میدان جابجایی در هر لایه به صورت مستقل تعریف می‌شود. بنابراین در لایه k ام خواهیم داشت

$$\mathbf{u}^k(x,y,z)=\mathbf{u}_1^k(x,y)F_1^k(z)+.....+\mathbf{u}_n^k(x,y)F_n^k(z) \qquad (۱-۱)$$

[1] Displacement Formulations
[2] Layer Wise Models (LWM)

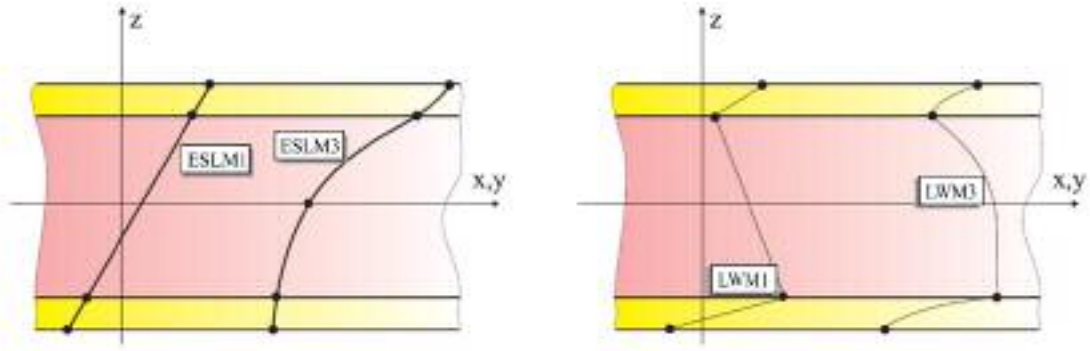
تعداد متغیرهای مجهول در این نوع فرمول‌سازی بستگی به تعداد لایه‌ها دارد. معادلات حاکم برای هر لایه به صورت جداگانه نوشته می‌شود و شرایط مرزی بین‌لایه‌ای مرتبط با تنش‌ها و تغییر شکل‌ها به عنوان شروط اضافی اعمال می‌گردند.

ب) تئوری‌های تک‌لایه معادل[1]

در این روش کل ورق چند لایه‌ای به عنوان یک لایه معادل در نظر گرفته شده و مولفه‌های میدان جابجایی به فرم زیر بیان می‌شوند

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \mathbf{u}_1(x,y)F_1(z) + ... + \mathbf{u}_n(x,y)F_n(z) \qquad (۲-۱)$$

صورت شماتیکی از نحوه عملکرد تئوری‌های چندلایه‌ای و تک‌لایه‌ای در شکل ۱-۳ نشان داده شده است.



(ب) (الف)

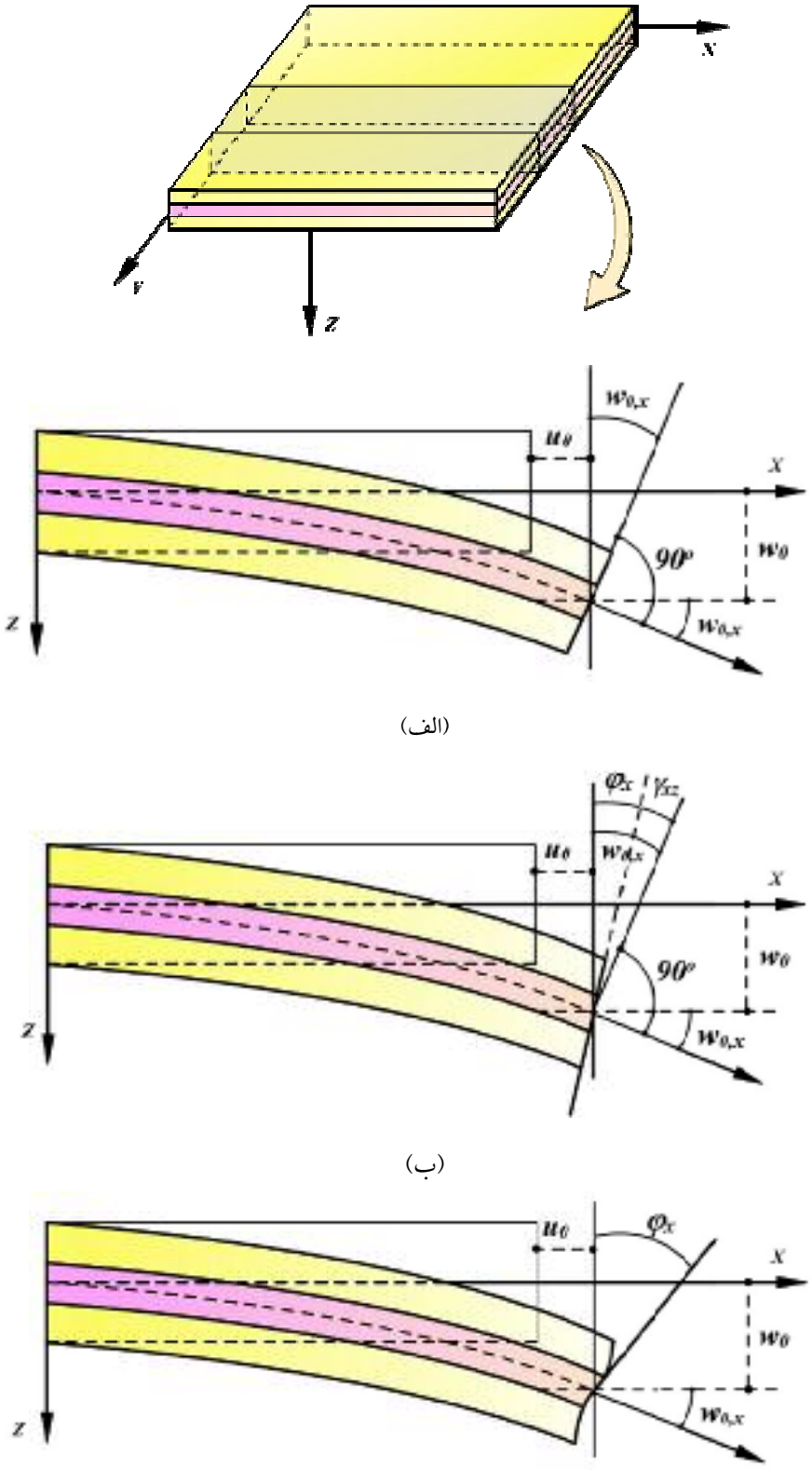
شکل ۱-۳ مقایسه تئوری چندلایه‌ای و تئوری تک‌لایه معادل با بسط درجه اول و سوم مولفه‌های جابجایی در راستای Z برای یک ورق سه‌لایه‌ای، الف) تئوری چندلایه‌ای درجه اول و سوم، ب) تئوری تک‌لایه‌ای درجه اول و سوم

در ادامه مروری بر چند نمونه از تئوری‌های تک‌لایه معادل مورد استفاده در این رساله شامل تئوری کلاسیک ورق، تئوری تغییر شکل برشی درجه اول و تئوری تغییر شکل برشی درجه سوم خواهد شد. همچنین اشاره مختصری به تئوری‌های چند لایه‌ای خواهد شد.

۱- تئوری کلاسیک ورق‌های لایه‌ای[2]

این تئوری فرم توسعه یافته تئوری معروف کلاسیک ورق [۲] برای ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای است. در این تئوری میدان جابجایی به شکل زیر بیان می‌گردد

[1] Equivalent Single Layer Models (ESLM)
[2] Classical Laminated Plate Theories (CLPT)



شکل ۱-٤ نحوه تغییر شکل مقطع ورق بر اساس الف) تئوری کلاسیک ورق، ب) تئوری تغییر شکل برشی درجه اول ورق، ج) تئوری تغییر شکل برشی درجه سوم ورق

$$u(x,y,z,t)=u_0(x,y,t)-z\frac{\partial w_0}{\partial x}$$
$$v(x,y,z,t)=v_0(x,y,t)-z\frac{\partial w_0}{\partial x} \qquad (۳-۱)$$
$$w(x,y,z,t)=w_0(x,y,t)$$

که در آن (u_0,v_0,w_0) مؤلفه‌های تغییر مکان در راستای x و y و z دستگاه مختصات، در یک نقطه از میان‌صفحه $(z=0)$ است. در این تئوری بر اساس فرضیات کیرشهف-لاو، خطوط عمود بر میان‌صفحه بعد از تغییر شکل ورق همچنان به صورت خطی، عمود بر میان‌صفحه و بدون تغییر در طول باقی می‌مانند (شکل ۱- ٤-الف). این فرضیات منجر به صرفنظر کردن از کرنش‌ها و تنش‌های برشی عرضی می‌شود. حذف تنش‌های عرضی متناظر با این فرض است که صلبیت ورق در راستای عرضی ورق بی‌نهایت است، حال آن‌که در واقعیت امر صلبیت ورق در راستای عرضی ضعیف‌تر از راستای درون‌صفحه‌ای ورق است.

عدم در نظر گرفتن اثرات تغییرشکل‌های برشی عرضی، کاربرد تئوری کلاسیک ورق را به ورق‌های نازک و ورق‌هایی با نسبت مدول الاستیسیته به مدول برشی نه چندان زیاد محدود می‌کند. لیکن در بسیاری از کاربردهای مهندسی، مثلاً سیلندرهای راکتورهای هسته‌ای، لزوم استفاده از دیواره‌های ضخیم امری گریزناپذیر است. در این موارد نتایج آنالیز تئوری کلاسیک قابل اعتماد نخواهد بود و موجب حصول مقادیر تغییر شکل کم‌تر و فرکانس طبیعی و بار بحرانی بیشتری در جهت عدم اطمینان می‌شود. از این‌رو به منظور در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل برشی عرضی در رفتار ورق‌ها و پوسته‌ها، دسته جدیدی از تئوری‌ها موسوم به تئوری‌های تغییر شکل برشی توسعه داده شد.

ب) تئوری‌های تغییر شکل برشی[1]

اولین تحقیقات در زمینه بررسی رفتار ورق‌های ضخیم در اواسط دهه ۱۹۴۰ و اوایل دهه ۱۹۵۰ توسط ریسنر [۳] و میندلین [۴] صورت گرفت. تئوری تغییر شکل برشی درجه اول ریسنر و میندلین بر اساس میدان جابجایی زیر بیان می‌گردد

$$u(x,y,z,t)=u_0(x,y,t)+z\,\phi_x(x,y,t)$$
$$v(x,y,z,t)=v_0(x,y,t)+z\,\phi_y(x,y,t) \qquad (٤-۱)$$
$$w(x,y,z,t)=w_0(x,y,t)$$

که در آن (u_0,v_0,w_0) مؤلفه‌های تغییر مکان در راستای x و y و z دستگاه مختصات، در یک نقطه از میان-صفحه $(z=0)$ است. ϕ_x و ϕ_y چرخش‌های مستقل یک المان خطی عمود بر میان‌صفحه حول محورهای y و x است.

در این تئوری المان خطی عمود بر میان‌صفحه پس از تغییر شکل ورق همچنان خطی می‌ماند، لیکن بر خلاف تئوری کلاسیک ورق عمود نخواهد ماند بلکه نسبت به صفحه قائم بر محور x زاویه ϕ_x و نسبت به صفحه قائم بر

[1] Shear Deformation Theories

محور y زاویه ϕ_y می‌گیرد (شکل ۱-۴-ب). این تئوری موجب حصول کرنش‌ها و تنش‌های برشی عرضی ثابت در راستای ضخامت ورق می‌شود که در تناقض با فرض صفر بودن این تنش‌ها در سطوح بالایی و پایینی ورق است. برای جبران این نقص در محاسبه تنش‌های برشی عرضی از ضریب اصلاح برشی k_s استفاده می‌شود. البته برآورد ضریب اصلاح برشی برای یک ورق کامپوزیت لایه‌ای بسیار مشکل است، چراکه این ضریب به آرایش لایه‌ای ورق، شکل هندسی آن، بارگذاری و شرایط مرزی وابسته است.

تئوری تغییر شکل برشی درجه اول توسط ویتنی و پاگانو [۵] برای مطالعه رفتار ارتعاشی و خمشی ورق‌های غیر ایزوتروپیک و توسط لیو و همکارانش [۶] برای تحلیل ورق‌های ضخیم به کار رفته است.

به منظور تقریب دقیق‌تری از تغییر شکل برشی و تغییر شکل عمودی ورق‌ها، تئوری‌های درجات بالاتر بر اساس بسط تیلور مرتبه بالاتر مولفه‌های میدان جابجایی در راستای ضخامت ورق توسعه پیدا کرد. در این دسته از تئوری‌ها دو فرض خطی ماندن المان خطی عمود بر میان‌صفحه و عدم تغییر طول آن بعد از تغییر شکل ورق لزوماً بر قرار نخواهد بود. از میان تئوری‌های درجات بالاتر می‌توان به تئوری مرتبه دوم ویتنی و سان [۷]، گوتام و گانسان [۸] و تئوری‌های مرتبه سوم [۹-۱۱] اشاره نمود. در میان تئوری‌های مرتبه سوم، تئوری لوینسون [۱۰] و ردی [۱۱] بیش از سایر تئوری‌های درجات بالاتر در مطالعه ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای به کار رفته است.

بر اساس تئوری درجه سوم ردی المان خطی عمود بر میان‌صفحه بعد از تغییر شکل، توزیعی درجه سه در راستای ضخامت خواهد داشت ولی همچنان تغییر طولی در راستای ضخامت ندارد (شکل ۱-۴-ج). میدان جابجایی در این تئوری به فرم زیر بیان می‌گردد

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + z\,\phi_x(x,y,t) - \frac{4}{3h^2} z^3 (\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}) \\
v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + z\,\phi_y(x,y,t) - \frac{4}{3h^2} z^3 (\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}) \\
w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t)
\end{aligned}
\qquad (۵-۱)
$$

علت بیان میدان جابجایی بر اساس چند جمله‌ای درجه سه، بر آورد توزیع درجه دوم کرنش‌ها و تنش‌های برشی عرضی در راستای ضخامت ورق است. در این صورت دیگر نیازی به ضریب اصلاح برشی در محاسبه تنش-های برشی عرضی نیست.

تعداد پارامترهای مجهول در تئوری‌های فوق وابسته به تعداد لایه‌های ورق نیست و از این‌رو از تئوری‌های تک لایه‌معادل به حساب می‌آیند. در این نوع تئوری‌ها رفتار سینماتیکی ورق به تک تک لایه‌ها وابستگی محسوسی ندارد.

ج) تئوری‌های چند لایه‌ای

در صورت اهمیت جزئیات رفتار هر یک از لایه‌ها به صورت جداگانه و یا احتمال بروز تغییرات شدید گرادیان مولفه‌های میدان جابجایی در بین لایه‌ها، لزوم استفاده از تئوری‌های چند لایه‌ای قابل توجیه است. اگرچه کاربرد آن‌ها منجر به افزایش تعداد مجهولات مسئله و پیچیدگی بیشتر آن می‌گردد.

تئوری‌های چند لایه‌ای علی الرغم تئوری‌های تک لایه معادل امکان ارضاء پیوستگی تنش‌های عرضی در مرز بین لایه‌ها را فراهم می‌سازد. این تئوری‌ها به دو دسته عمده تقسیم می‌شوند:

الف) تئوری‌های چند لایه‌ای جزئی[1] که توزیع لایه‌ای تنها برای مولفه‌های درون‌صفحه‌ای میدان جابجایی در نظر گرفته می‌شود.

ب) تئوری‌های چندلایه‌ای کامل[2] که هرسه مولفه میدان جابجایی در هر لایه به صورت جداگانه تعریف می‌شوند.

تئوری‌های چند لایه‌ای قابلیت بیان تغییرات زیگزاگی مولفه‌های جابجایی درون‌صفحه‌ای را در راستای ضخامت ورق دارند. این رفتار زیگزاگی در ورق‌های لایه‌ای ضخیم که در آن‌ها مدول برشی عرضی تغییرات شدیدی در راستای ضخامت ورق دارد مشهودتر است. تعداد بسیاری از این دسته از تئوری‌ها در مراجع [۱۲-۱٤] یافت می‌شود. به عنوان نمونه کو، برت و استریز [۱۵] تئوری چند لایه‌ای درجات بالایی به فرم زیر را برای آنالیز دینامیکی ورق‌های لایه‌ای به‌کار برده‌اند

$$u_i^k(x,y,z)=u_{i0}^k-z_k u_{i1}^k+z_k^2 u_{i2}^k+\ldots+z_k^{N_l}u_{il}^k \quad i=1,2,3 \quad k=1,..,N_l \qquad (٦-١)$$

مدل‌های جابجایی که به فرم فوق بیان می‌شوند نیازمند ارضاء شرایط پیوستگی در مرز بین لایه‌هاست. نثیر، کاپانیا و ردی [۱٦] شکل تعمیم یافته‌ای از این نوع تئوری‌ها را با بیان متغییرهای جابجایی بر اساس چند جمله‌ای لاگرانژی به فرم زیر رائه داده‌اند

$$u_i^k(x,y,z)=L_1(z_k)u_i^k|_{h/2}+L_2(z_k)u_i^k|_{-h/2}+L_3(z_k)u_{i2}^k+\ldots+L_{N_l}(z_k)u_{iN_l}^k \qquad (٧-١)$$
$$i=1,2,3 \quad k=1,..,N_l$$

که درآن مقادیر بین‌لایه‌ای به عنوان مجهولات استفاده شده‌اند که ارضاء شرایط همسازی بین‌لایه‌ها را ساده‌تر می‌سازد.

۱-۳- تاریخچه‌ای بر روش‌های حل مسائل استاتیکی ورق‌ها

در حوزه تحلیل استاتیکی ورق‌های چند لایه‌ای کامپوزیتی بر پایه تئوری‌های تک لایه معادل، روش‌های تحلیلی و عددی متعددی تا کنون ارائه شده است.

روش‌های تحلیلی دقیق در این زمینه تنها به ورق‌هایی با شکل هندسی و شرایط مرزی ساده محدود می‌شود. روش ناویر در حل ورق‌های مستطیلی چهار طرف مفصل [۱۷-۱۸] و نیز روش لوی با استفاده از مفهوم فضای حالت[3] در حل ورق‌های مستطیلی که حداقل دارای دو ضلع مفصلی متقابل به هم می‌باشند [۱۹-۲۰]، از بارزترین این روش‌ها به شمار می‌آیند. در همین راستا تلاش‌هایی نیز برای حل ورق‌هایی با دیگر شرایط مرزی صورت گرفته است. به طور

---

[1] Partial Layer Wise Theories
[2] Full Layer Wise Theories
[3] State Space Approach

مثال لیو و لی در سال ۲۰۱۰ از فرم همیلتونی معادلات تعادل ورق نازک و تکنیک روی هم‌گذاری برای حل دقیق ورق‌هایی استفاده کردند که دو ضلع مجاور آن‌ها آزاد و دو ضلع دیگر مفصلی و یا گیردار هستند [۲۱].

پیچیدگی و محدودیت روش‌های تحلیلی دقیق در حل استاتیکی ورق‌های ضخیم بر پایه تئوری‌های ارتقا یافته از جمله تئوری‌های تغییر شکل برشی، عامل رویکرد محقیقین به استفاده از روش‌های عددی گردید. از آن جمله می‌توان به روش المان محدود[1] (FEM) اشاره کرد که از پیشینه‌ای طولانی در مسائل متعدد مکانیک جامدات بر خوردار است [۲۲-۲۳]. در این روش دامنه مسئله با مجموعه‌ای از المان‌های هندسی که در تعدادی گره به یکدیگر متصل‌اند گسسته‌سازی می‌شود. توابع شکل برای تقریب توابع میدان با استفاده از مقادیر گره‌ای هر المان ساخته می‌شوند و به دلیل دارا بودن خاصیت دلتای کرونکر امکان ارضای مستقیم شرایط مرزی سینماتیکی را فراهم می‌سازند. جهت تعیین سیستم معادلات جبری در این روش از اصل حداقل انرژی پتانسیل استفاده می‌گردد. تعداد المان‌ها، نوع و هندسه المان‌ها و توان آن‌ها در ارضای شرایط پیوستگی و همسازی بین المانی از عوامل تأثیر گذار در عملکرد این روش است. اخیراً بررسی جامعی در ارتباط با پیشرفت‌های این روش در حوزه تحلیل ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای توسط ژانگ و یانگ [۲۴] صورت گرفته است. لزوم شبکه بندی دامنه حل، وقوف بر اطلاعات اتصال المان‌ها به یکدیگر و نیز تغییر مجدد شبکه المان‌بندی در طول فرآیند حل در برخی مسائل امری است زمان‌بر و پرهزینه که ایده حذف المان را توجیه می‌کند. لذا مفهوم روش‌های بدون شبکه توسط محققین پیشنهاد گردید تا امکان تعریف میدان مسئله تنها بوسیله مجموعه‌ای از نقاط که به دلخواه توزیع شده‌اند فراهم گردد. در این گونه از روش‌ها، حل تقریبی بر اساس اطلاعات مجموعه گره‌ها بدست می‌آیند در حالیکه به هیچگونه اطلاعاتی که بیانگر چگونگی اتصال نقاط باشد نیاز نیست. از جمله مزایای روش‌های بدون شبکه می‌توان به افزایش سرعت، کاهش هزینه محاسبات، بر خورداری از نرخ‌های بالاتری از همگرایی، توانایی در ارائه حل‌هایی با درجات بالاتری از پیوستگی، غیر حساس بودن به تغییر شکل‌ها در مسائلی با تغییر مکان‌های بزرگ و توانایی مدل نمودن ناپیوستگی‌ها از طریق غنی‌سازی توابع پایه اشاره کرد.

پیدایش روش‌های بدون شبکه به سال ۱۹۷۷ باز می‌گردد، زمانی که گینگلد و لوسی روشی لاگرانژی را بر پایه نمایش انتگرالی یا تقریب کرنل برای تحلیل پدیده‌های بدون مرز نجومی ابداع کردند [۲۵]. این روش که تحت عنوان روش هیدرودینامیکی ذره هموار[2] (SPH) نام‌گذاری گردید، مقدمه‌ای برای پیشرفت‌های آتی در ساخت توابع پایه ایده‌آل‌تر در روش‌های بدون شبکه به شمار می‌آید. پس از گذشت یک دهه از روش SPH ، اولین نسخه روش‌های نمایش سری محدود توابع مجهول با نام روش حداقل مربعات متحرک توسط نایرولز در روشی موسوم به روش المان‌های پراکنده[3] (DEM) معرفی شد [۲۶]. وی از روش گالرکین برای تشکیل سیستم معادلات جبری استفاده کرد. در سال ۱۹۹۴ بلیچکو و همکاران این روش را اصلاح نمودند و آن را روش بدون المان گالرکین[4] (EFG) نامیدند [۲۷]. در این روش ارضاء شرایط مرزی به صورت مستقیم امکان‌پذیر نیست، بلکه در فرم ضعیف گالرکین از

[1] Finite Element Method
[2] Smoothed Particle Hydrodynamics
[3] Diffuse Element Method
[4] Element-Free Galerkin

ضرایب لاگرانژ برای ارضاء آن‌ها استفاده می‌شود. این روش در حل مسائل مختلفی از جمله حل تیرها و ورق‌های لایه‌ای بر اساس تئوری‌های تغییر شکل برشی مورد استقبال قرار گرفت [۲۸-۳۰]. علی‌الرغم دقت بالای این روش، لزوم استفاده از شبکه المان برای محاسبه انتگرال‌های عددی از سهولت و سرعت این روش می‌کاهد. از این‌رو در سال ۱۹۹۸ آتلوری روش بدون شبکه موضعی پترو-گالرکین[1] (MLPG) را ابداع کرد که بر خلاف روش بدون المان گالرکین، صورت ضعیف معادلات حاکم بر المان‌هایی که پیرامون هر گره لحاظ می‌گردد اعمال می‌شوند [۳۱]. در این روش ابتدا از تقریب حداقل مربعات متحرک استفاده شد ولی آتلوری با بهره از دیگر روش‌های تقریب توابع، این روش را تعمیم داد.

به موازات این پیشرفت‌ها اونیاته و همکارانش روش نقاط محدود[2] (FPM) را ابداع کردند که در آن از یکی از تکنیک‌های حداقل مربعات (LSQ)، حداقل مربعات وزن‌دار (WLS) و حداقل مربعات متحرک (MLS) برای تقریب توابع حول هر گره استفاده می‌شود. در این روش فرم قوی معادلات در زیر ناحیه هر گره اعمال می‌شود و شرایط مرزی ضروری در گره‌های مرزی به صورت دقیق بر آورده می‌شود [۳۲]. برخی محققین برای بهبود الگوریتم درونیابی حداقل مربعات از توابع پایه شعاعی (RBF) به جای توابع پایه چند جمله‌ای استفاده کردند [۳۳]. به عنوان مثال فریرا از توابع شعاعی در تحلیل ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای بر اساس تئوری تغییر شکل برشی درجه اول [۳۴] و درجه سوم [۳۵] استفاده کرد.

روش درونیابی نقطه‌ای[3] (PIM) که برای اولین بار در سال ۲۰۰۱ توسط لیو معرفی شد، از تکنیک درونیابی چند جمله‌ای به جای روش حداقل مربعات متحرک در تقریب توابع استفاده می‌کند [۳۶]. از بزرگ‌ترین نواقص نسخه اولیه این روش که بر پایه روش گالرکین بود، می‌توان به تکین بودن ماتریس درونیابی و نیز عدم قطعیت در پیوستگی تابع تقریب اشاره کرد. بررسی‌های متعددی توسط لیو صورت گرفت که منجر به بهبود نسبی این روش با استفاده از توابع پایه شعاعی به صورت محلی شد [۳۷]. از این رو این روش اکنون تحت عنوان روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی موضعی[4] (LRPIM) شناخته می‌شود.

تمامی روش‌های بدون شبکه فوق از ایده روش اجزا محدود پیروی می‌کنند، یعنی در همه آن‌ها کل دامنه حل گسسته‌سازی می‌شود و بدین سبب به آن‌ها روش‌های بدون شبکه نوع میدانی اطلاق می‌گردد. روش‌های دیگر بدون شبکه که از ایده روش المان‌های مرزی پیروی می‌کنند یعنی در آن‌ها مرز مسئله گسسته‌سازی می‌شود، روش‌های بدون المان مرزی نامیده می‌شوند. از بارزترین این روش‌ها می‌توان به روش حل‌های اساسی[5] (FMS) اشاره نمود [۳۸]. در این روش توابع مجهول به صورت ترکیب خطی از چند حل اساسی معادله دیفرانسیل تقریب زده می‌شوند و ضرایب آن‌ها با روش حداقل مربعات به‌گونه‌ای بدست می‌آیند که شرایط مرزی تا حد امکان بر آورده شود. در این نوع روش‌ها معمولاً نقاط تکین حل‌های اساسی خارج از دامنه حل در نظر گرفته می‌شوند که محل دقیق قرارگیری

---

[1] Meshless Local Petrov-Galerkin
[2] Finite Point Method
[3] Point Interpolation Method
[4] Local Radial Point Interpolation Method
[5] Fundamental Solutions Method

آن‌ها نقش به سزایی در دقت حل دارند. روش ترفتز[1] نیز از دیگر روش‌های بدون شبکه مرزی است که تقریب توابع بر اساس یک ترکیب خطی از توابعی که معادله دیفرانسیل را صرفنظر از شرایط مرزی بر آورده می‌کند نوشته می‌شود. در این روش با صفر قرار دادن تقریبی باقیمانده معادله دیفرانسیل روی مرز و حل دستگاه معادلات خطی حاصل ضرایب توابع پایه بدست می‌آید. این روش نیز مانند روش المان‌های مرزی و روش حل‌های اساسی نیاز به یک دسته حل از معادله دیفرانسیل است که معمولاً دارای نقاط تکین هستند.

۱-۴- تاریخچه‌ای بر روش‌های حل مسائل ارتعاش آزاد ورق‌ها

شروع مطالعه رفتار ارتعاشی ورق‌ها به اواخر دهه ۱۸۰۰ باز می‌گردد، زمانی که ریلی روش معروف خود را برای بررسی ارتعاش آزاد سازه‌ها ارائه داد [۳۹]. پس از آن ریتز در سال ۱۹۰۹ روش ریلی را با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از توابع شکل آزمون که هر کدام ضرایب دامنه مستقلی دارند، بهبود بخشید [۴۰]. بدین ترتیب روش ریلی-ریتز به یکی از روش‌های تقریبی پرکاربرد در زمینه بررسی رفتار ارتعاشی سازه‌ها تبدیل شد. پس از آن، تحقیقات گسترده‌ای در زمینه ارتعاش ورق‌هایی با اشکال مختلف، شرایط مرزی و بار گذاری متفاوت صورت گرفت. بخش عمده‌ای از این مطالعات به ورق‌های نازک محدود می‌شود که در آن‌ها از اثر تغییر شکل‌های برشی صرفنظر شده است [۴۱].

بر خلاف ورق‌های نازک، اثر تغییر شکل‌های برشی در ورق‌های ضخیم قابل ملاحظه است. صرفنظر کردن از اثرات برش در این نوع ورق‌ها، منجر به افزایش قابل ملاحظه مقادیر فرکانس‌های ارتعاش در جهت عدم اطمینان می‌شود. از این رو تئوری‌های تغییر شکل برشی از جمله تئوری ریسنر-میندلین و دیگر تئوری‌های درجات بالاتر توسط محققین مختلف برای بررسی رفتار ارتعاشی ورق‌ها مورد استفاده قرار گرفته است.

میندلین وهمکارانش ارتعاش ورق‌های مستطیلی ضخیم با شرایط مرزی چهار طرف مفصل و شرایط لوی را بررسی کردند و حل تحلیلی آن‌ها را ارئه دادند. ایشان به این نتیجه رسیدند که در ورق‌های چهار طرف مفصل سه دسته مود مستقل قابل حصول است. همچنین در هم کنش سایر مودها برای ورقی با یک جفت مرز آزاد و جفت دیگر مفصلی مورد مطالعه قرار گرفت [۴۲].

نور در سال ۱۹۷۳ به بررسی ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای پرداخت. وی نتایج حاصل از تئوری کلاسیک ورق، تئوری میندلین و تئوری الاستیسیته سه بعدی را با یکدیگر مقایسه کرد و به این نتیجه رسید که تئوری کلاسیک ورق برای تخمین رفتار ارتعاشی ورق‌هایی با درجه ارتوتروپی بالا و نسبت ضخامت به طول بیشتر از ۱/۱۰ مناسب نیست. این در حالیست که نتایج تئوری میندلین برای برآورد فرکانس‌های ارتعاشی پایین در ورق‌های نسبتاً ضخیم لایه‌ای با نسبت ضخامت به طول کمتر از ۰/۲ رضایت‌بخش است [۴۳].

روش ریلی- ریتز در سال ۱۹۸۰ توسط داو و رافائل برای ارتعاش آزاد ورق میندلین به کار برده شد [۴۴]. ایشان از توابع تیر تیموشینکوف به عنوان توابع شکل استفاده کردند و ورق‌های مربعی با پنج ترکیب مختلف از شرایط مرزی را بررسی کردند. ایشان همچنین این روش را برای حالتی که ورق تحت تنش‌های درون صفحه ایست

[1] Trefttz Method

بسط دادند. بر اساس این روش لیو و همکارانش ارتعاش ورق‌های دایره‌ای و حلقوی شکل را برای شرایط مرزی متفاوت بررسی کردند [۴۵]. این روش همچنین در مطالعه ارتعاش ورق‌های متوازی الاضلاع و مثلثی با شرایط مرزی مختلف مورد توجه قرار گرفت.

تعداد کثیری از محققین از روش اجزا محدود در بررسی ارتعاش آزاد ورق‌ها بهره جستند. به عنوان مثال راک وهینتون [۴۶] المان‌های خمشی چهار ضلعی هم‌پارامتری را به منظور تحلیل ارتعاشی ورق‌های ضخیم و نازک معرفی نمودند. چونگ و کواک [۴۷] المان‌های حلقوی و قطاع شکل را برای مطالعه ارتعاش آزاد ورق‌های لایه‌ای ضخیم با مرزهای منحنی شکل توسعه دادند. ردی و کوپا سامی [۴۸] روش اجزا محدودی را بر اساس تئوری الاستیسیته سه بعدی برای ارتعاش آزاد ورق‌های لایه‌ای غیر ایزوتروپیک مستطیلی ارائه داد.

روش نوار محدود[1] (FSM) نیز به عنوان یکی از روش‌های پرکاربرد در زمینه حل مسائل مقادیر ویژه توسط بسیاری از محققین مورد استفاده قرار گرفته است. از آن جمله می‌توان به مراجع [۴۹-۵۲] اشاره نمود که از تئوری‌های تغییر شکل برشی برای بررسی مسائل ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای استفاده شده است.

لیو و همکارانش از روش درونیابی نقطه‌ای و با استفاده از توابع پایه شعاعی[2] (RPIM) که یک روش بدون شبکه محسوب می‌شود، در حل ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای بر اساس تئوری تغییر شکل برشی درجه اول و سوم استفاده کردند [۵۳]. از دیگر روش‌های بدون شبکه می‌توان به روش تربیع دیفرانسیل اشاره نمود که توسط وو و لیو برای بررسی مسائل ارتعاش آزاد ورق‌های مربعی، دایروی و مثلثی بر اساس تئوری میندلین مورد استفاده قرار گرفته است [۵۴]. همچنین چن و همکارانش از روش المان آزاد گالرکین در تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های مربعی و بیضوی شکل بر اساس تئوری کلاسیک ورق استفاده نمودند [۵۵].

روش حل‌های اساسی نیز توسط برخی از محققین برای حل مسائل مقادیر ویژه ارتعاش آزاد به کار رفته است [۵۶-۵۸]. در این روش جواب معادلات دیفرانسیل به صورت یک ترکیب خطی از توابع پایه با ضرایب ثابت بیان می‌گردد که هر کدام جواب اساسی معادله دیفرانسیل هستند که در آن صدق می‌کنند. با ارضای شرایط مرزی، دستگاه معادلات همگنی حاصل خواهد شد که ماتریس ضرایب آن وابسته به مقادیر ویژه است. بنابراین در این روش مقادیر ویژه را نمی‌توان به صورت پارامتر وارد محاسبات کرد. از این رو می‌بایست با انتخاب معیاری مناسب و بررسی تغییرات آن معیار با تغییر در مقادیر ویژه، مقادیر ویژه صحیح را محاسبه نمود. دترمینان ماتریس ضرایب در برخی از مراجع به عنوان معیار بدست آوردن مقادیر ویژه در نظر گرفته شده است، به طوریکه نمودار تغییرات این معیار در مقادیر ویژه صحیح دارای مینیمم‌های نسبی خواهد بود. معیارهای دیگری نیز می‌توان برای این منظور استفاده کرد. به طور مثال در مرجع [۵۹] حاصل جمع قدر مطلق درایه‌های ماتریسی موسوم به ماتریس شبه نرمی که رابط بین بردار شرایط مرزی معلوم و بردار تغییر مکان‌های مجهول داخل دامنه است، به عنوان معیار محاسبه مقادیر ویژه معرفی شده است. نمودار تغییرات این معیار در مقادیر ویژه صحیح دارای ماکزیمم‌های نسبی است. لازمه چنین روش‌هایی بررسی

[1] Finite Strip Method
[2] Radial Point Interpolation Method

تغییرات معیار مورد نظر در محدوده‌ای از مقادیر ویژه است که در مسائلی همچون تئوری تغییر شکل برشی به دلیل حجم بالای عملیات، بسیار زمان‌بر خواهد بود.

۱-۵- روش حل و محتوای فصول آینده

اگرچه تا کنون روش‌های بدون شبکه متعددی در زمینه حل مسائل مختلف مکانیک جامدات توسعه داده شده است، لیکن هر یک از این روش‌ها به دلیل محدودیت‌های موجود، تنها در حوزه خاصی از مسائل قابل کاربرد هستند. کاربرد گسترده ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای ضخیم و پیچیدگی تئوری‌های حاکم بر آن‌ها نیازمند ادامه تحقیقات و ارائه روش‌هایی است که با کمترین محدودیت‌ها، قادر به حل طیف وسیعی از مسائل موجود در این حوزه باشند. در روش‌های ارائه شده در این پایان‌نامه سعی بر آن است که با حفظ کارایی و دقت آن‌ها، بتوان مسائل متعددی را در زمینه خمش و ارتعاش آزاد انواع ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای با اشکال هندسی و شرایط مرزی مختلف بر اساس سه تئوری مختلف پوشش داد.

بر این اساس در فصول دوم و سوم به ترتیب حل مسائل خمش ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای بر اساس تئوری کلاسیک و حل مسائل خمش بر اساس دو تئوری تغییر شکل برشی درجه اول و سوم مورد بررسی قرار گرفته است. روش مورد استفاده در این دو فصل، یک روش بدون شبکه مرزی است که با ارضای شرایط مرزی بر روی نقاط مرزی به حل همگن بر روی کل دامنه حل می‌رسد. این روش برای اولین بار در مراجع [۶۰-۶۱] برای حل مسائل الاستیسیته دو بعدی به کار گرفته شد. در فصل چهارم کارایی این روش با حل مسائل متعددی در زمینه مسائل خمشی ورق مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل پنجم فرم محلی روش فوق که مبتنی بر ارضای معادلات دیفرانسیل به صورت محلی است، ارائه خواهد شد و توانایی آن در حل مسائلی که روش اول قادر به حل آن نمی‌باشد، با ارائه چند مثال عددی بررسی خواهد شد. قابل ذکر است که نسخه اولیه این روش در مرجع [۶۲] بر ای حل معادلات هلمهولتز و پواسون معرفی شد.

در فصل ششم روشی برای حل مسائل ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای ارائه خواهد شد. اساس این روش مبتنی بر بیان توابع مجهول میدان جابجایی به صورت ترکیب مودهایی از نوع توابع نمایی است که شرایط مرزی را به صورت تقریبی ارضا می‌کنند و فرم تغییراتی معادلات دیفرانسیل حاکم با روندی سعی و خطا توسط این مودها برآورده می‌شوند. در نهایت در فصل هفتم مسائل متعددی برای بررسی کارایی این روش ارائه خواهد شد.