بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی

گرایش آنالیز عددی

روش‌های عناصر متناهی سازگار برای حل معادلات سنت–ونان

استاد راهنما: دکتر علی توکلی

اساتید مشاور:

دکتر مجید رحیم‌پور

دکتر سید محمد حسینی

تألیف و تدوین:

فاطمه زرمهی شهربابک

بهمن ۱۳۸۹

تقدیم به تمام ستارگان آسمان زندگی‌ام

به ویژه آن دو خورشید درخشان

پدر و مادر عزیزم

قدردانی و تشکر

چکیده

حل معادلات سنت–ونان با روش‌های عددی هم‌چون روش‌های تفاضل متناهی و عناصر متناهی، منجر به بعضی نوسانات نامطلوب در ارتفاع سطح آب می‌شود. دلیل این ارتعاشات به تقریب مؤلفه‌های غیرخطی و فضای متناهی‌البعد جواب مربوط می‌شود. یکی از روش‌های هموار کردن این ارتعاشات، اضافه کردن لزجت مصنوعی به طرح است. به‌علاوه زمان اجرای برنامه برای حل این معادلات با روش عناصر متناهی استاندارد طولانی است (حتی برای یک زمان کوتاه). هم‌چنین اگر طول کانال زیاد باشد، دستگاه منتج از گسسته‌سازی به‌طور مستقیم قابل حل نیست و باید از روش‌های عددی برای حل آن استفاده کرد. بنابراین خطای کل برابر خطای منتج از گسسته‌سازی و جواب تقریبی حاصل از روش‌های تکراری است. در این پایان‌نامه با یک گسسته‌سازی مناسب، معادلات سنت–ونان یک بعدی با روش عناصر متناهی حل و نوسانات نامطلوب بدون استفاده از لزجت مصنوعی حذف خواهند شد. هم‌چنین بحث اصلی به پایداری عددی جواب با استفاده از خواص M–ماتریس متمرکز شده است. در ادامه، سه روش عناصر متناهی سازگار را به‌کار بردیم که پایداری جواب را حفظ می‌کند و چنین مشکلاتی را نیز حل می‌کنند.

پیش‌گفتار

جریان‌های غیردائمی را می‌توان با معادلات سنت–ونان که دارای معادلات بقاء جرم و گشتاور هستند، توصیف کرد. این معادلات از خانواده معادلات غیرخطی هذلولوی با مشتقات جزئی هستند. در [۲] و [۷] این معادلات از معادلات تراکم‌ناپذیر نویر–استوکس[۱] به‌دست آمده‌اند. به غیر از موارد خیلی خاص، جواب کلی این معادلات موجود نیست. در چند سال اخیر، روش‌های عددی هم‌چون تفاضل متناهی [۳]، عناصر متناهی ([۱۲] و [۲۰]) و حجم متناهی [۴] برای حل این معادلات بکار رفته است. در سال ۲۰۰۹ کیلادز[۲] پایداری روش تفاضلات متناهی را برای معادلات سنت–ونان مورد بررسی قرار داده است (مرجع [۱۳] را ببینید). هم‌چنین در [۵]، باستین[۳] و همکارانش در همین سال پایداری نمایی جواب‌های کلاسیک معادلات سنت–ونان را برای کانال‌های شیب‌دار بررسی کردند. توآل[۴] و همکارانش در سال ۲۰۱۰ پایداری جریان‌های همگن و دائمی را بر اساس معادلات سنت–ونان یک بعدی برای سطوح آزاد و جریان‌های کم‌عمق آب با شیب ثابت به‌دست آوردند[۲۲]. هم‌چنین در سال ۲۰۰۷ دونه[۵] تقریب عناصر متناهی را برای برهم‌کنش ساختار سیالات، بر اساس فرم تغییراتی اویلر به‌دست آورد[۹]. در [۱۷] و [۱۴] نیز همانندسازی سازگاری از حرکت آب در یک کانال باز آورده شده است. ساختار این پایان نامه به‌صورت زیر می‌باشد:

در فصل اول انواع جریان‌ها در یک کانال باز و معادلات پیوستگی و گشتاور را که به معادلات سنت–ونان معروف هستند، معرفی خواهیم کرد. در فصل دوم روش گالرکین که یک روش شناخته شده در حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد بیان خواهد شد. هم‌چنین به بیان روش‌های پتروف–گالرکین، باقی‌مانده وزنی و هم‌محلی نیز خواهیم پرداخت. بیان مبانی روش عناصر متناهی و هم‌چنین روش عناصر متناهی آمیخته در فصل سوم آورده خواهد شد. در فصل چهارم با استفاده از یک گسسته‌سازی مناسب معادلات سنت–ونان به روش عناصر متناهی حل و پایداری جواب مورد بررسی قرار خواهد گرفت. سه روش عناصر متناهی سازگار را نیز در فصل پنجم معرفی خواهیم کرد. خواهیم دید که روش‌های عناصر متناهی سازگار کاراتر

---

[۱] Navier-Stokes
[۲] Kiladze
[۳] Bastin
[۴] Thual
[۵] Dunne

و کم هزینه‌تر از روش عناصر متناهی استاندارد برای حل معادلات سنت–ونان هستند. در فصل آخر نیز نتیجه‌گیری کلی و برخی پیشنهادها را بیان کردیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

جریان کانال باز

مایعات به‌طور طبیعی از یک مکان به مکان دیگر جابه‌جا می‌شوند و یک ساختار انتقالی را تشکیل می‌دهند. سطح مقطع این ساختارها می‌تواند از بالا باز یا بسته باشد. اگر سطح مقطع ساختار از بالا بسته باشد آن ساختار مجرای بسته و در غیر این‌صورت کانال باز نامیده می‌شود. به عنوان مثال تونل‌ها و رودخانه‌ها به‌ترتیب نمونه‌هایی از مجاری بسته و کانال‌های بازند. به جریان در یک کانال باز یا در یک مجرای بسته، به‌دلیل داشتن سطح آزاد، جریان سطح آزاد یا جریان کانال باز می‌گوییم. لازم به ذکر است که مایعات تراکم‌ناپذیر، چگالی جرمی ثابتی دارند. در این فصل ابتدا به بیان تعاریف و مفاهیم اولیه می‌پردازیم و سپس طریقه به‌دست آوردن معادلات پیوستگی و گشتاور را که به معادلات سنت–ونان معروف هستند، توضیح می‌دهیم. برای مطالعه بیشتر خواننده را به مرجع [۶] ارجاع می‌دهیم.

۱.۱ انواع جریان‌ها

در این بخش بعضی از انواع جریان‌های سطح آزاد و ملاک تقسیم‌بندی آن‌ها را بیان می‌کنیم.

۱.۱.۱ جریان‌های دائمی و غیردائمی

جریان دائمی جریانی است که سرعت جریان در یک مکان نسبت به زمان تغییر نکند. اگر سرعت جریان در یک مکان نسبت به زمان تغییر کند، آن‌گاه جریان یک جریان غیردائمی است. از این‌رو ملاک این تقسیم‌بندی براساس تغییرات زمانی سرعت v در یک مکان مشخص

است. بنابراین برای یک جریان دائمی $\frac{\partial v}{\partial t}$ برابر با صفر است.

۲.۱.۱ جریان‌های یکنواخت و غیریکنواخت

جریان سطح آزاد یک جریان یکنواخت است هرگاه، سرعت جریان در یک زمان نسبت به مکان تغییر نکند. در صورت تغییر سرعت جریان در یک زمان نسبت به مکان، جریان غیریکنواخت نامیده می‌شود. از این‌رو تغییرات مکانی در یک زمان، ملاک تقسیم‌بندی این نوع جریان‌ها است.

۳.۱.۱ جریان‌های بحرانی، فوق بحرانی و زیربحرانی

جریانی که سرعت آن برابر با سرعت یک موج گرانشی با پهنای کم باشد، یک جریان بحرانی نامیده می‌شود. یک موج گرانشی می‌تواند توسط یک تغییر در عمق جریان رخ دهد. اگر سرعت جریان کمتر از سرعت بحرانی باشد، جریان زیر بحرانی و در صورت بیشتر بودن سرعت جریان از سرعت بحرانی، جریان فوق بحرانی است. عدد فرود[۱] $\mathbf{F}_r$، برابر با نسبت کسری نیروهای اینرسی و گرانشی است. برای یک کانال مستطیلی عدد فرود به صورت:

$$\mathbf{F}_r = \frac{V}{\sqrt{gy}},$$

تعریف می‌شود که y عمق جریان، V سرعت جریان و g شتاب گرانشی است. برای جریان‌های بحرانی $\mathbf{F}_r = ۱$، جریان‌های فوق بحرانی $\mathbf{F}_r > ۱$ و جریان‌های زیر بحرانی $\mathbf{F}_r < ۱$ است.

۴.۱.۱ جریان‌های لایه‌ای و آشفته

جریانی را که ذرات مایع در مسیر هموار معینی حرکت کنند و جریان به‌صورت حرکت لایه‌های نازک روی یکدیگر به‌نظر برسد، یک جریان لایه‌ای نامیده می‌شود. جریانی که ذرات مایع در مسیر نامنظمی حرکت کنند، یک جریان آشفته است.

---

[۱] Froude number

۲.۱ مفاهیم پایه‌ای

اگر در سرتاسر کانال سطح مقطع و شیب کف آن تغییر نکند، کانال منشوری و در غیر این‌صورت کانال غیرمنشوری است. یک کانال می‌تواند شامل چندین کانال منشوری باشد. اگر در یک کانال جریان از سمت چپ به راست حرکت کند، منظور از انتهای بالادست، سمت چپ کانال است. سطح مقطعی از کانال که عمود بر مسیر جریان است، یک مقطع کانال نامیده می‌شود. شعاع هیدرولیکی R و عمق هیدرولیکی D به‌ترتیب به‌صورت:

$$R = \frac{A}{P},$$

$$D = \frac{A}{B},$$

تعریف می‌شوند که A سطح جریان، P محیط مرطوب و B عرض سطح آزاد است. به‌دلیل سطح آزاد کانال، تنش‌های برشی در کف و اطراف کانال به‌وجود می‌آید که این تنش‌ها باعث تغییر سرعت جریان در یک سطح مقطع کانال می‌شود. بنابراین برای تغییر سرعت در یک سطح مقطع کانال، ضریب انرژی α یا ضریب تصحیح سرعت تعریف می‌شود. هم‌چنین شبیه ضریب انرژی، ضریب گشتاور β که ضریبی برای انتقال گشتاور گذرنده از یک سطح مقطع کانال است، در نظر گرفته می‌شود.

قضیه ۱.۲.۱. (قضیه مقدار میانی[۱]) اگر f یک تابع پیوسته حقیقی بر $[a,b]$ باشد که در (a,b) مشتق‌پذیر است، آن‌گاه نقطه‌ای مانند $\zeta \in (a,b)$ یافت می‌شود به‌طوری‌که:

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\zeta)$$

به‌علاوه اگر $F(x) = f'(x)$ باشد آن‌گاه:

$$\int_a^b F(x)dx = (b-a)F(\zeta), \qquad a < \zeta < b.$$

قضیه ۲.۲.۱. (قاعده لایبنیتز[۲])

$$\frac{d}{dt}\int_{f_1(t)}^{f_2(t)} F(x,t)dx = \int_{f_1(t)}^{f_2(t)} \frac{\partial}{\partial t}F(x,t)dx + F(f_2(t),t)\frac{df_2}{dt} - F(f_1(t),t)\frac{df_1}{dt}.$$

---

[۱] Mean value theorem

[۲] Leibnitz's rule

۱.۲.۱ قضیه انتقال رینولدز

قضیه انتقال رینولدز برای یک ناحیه معلوم از جریان، مربوط به متغیرهای جریان یک جرم مشخصی از شار است. به جرم مشخص شار، سیستم و به ناحیه مشخص، حجم کنترل[1] می‌گوییم. فرض کنید B و β، به‌ترتیب خاصیت گسترده و خاصیت متمرکز یک سیستم را نشان دهند. برای جریان یک بعدی، معادله:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{cv} \beta\rho d\mathcal{V} + (\beta\rho AV)_{out} - (\beta\rho AV)_{in}, \qquad (۱.۲.۱)$$

خواص سیستم را به حجم کنترل مربوط می‌کند، که در آن cv حجم کنترل، ρ چگالی جرم، اندیس‌های in و out به‌ترتیب نشان‌دهنده جریان ورودی و خروجی، $\mathcal{V}$ حجم شار و V سرعت جریان است.

۲.۲.۱ قوانین اصل بقاء

قوانین اصل بقای جرم، انرژی و گشتاور پایداری را برای سطح آزاد توصیف می‌کنند. در چند سطح مقطع کانال، به‌دلیل ثابت بودن چگالی جرمی مایعات تراکم‌ناپذیر و قانون اصل بقای جرم، نرخ حجمی جریان ثابت است. ازاین‌رو بر اساس این اصل، بین دو سطح مقطع یک کانال باز می‌توان تساوی:

$$Q_۱ = Q_۲, \qquad (۲.۲.۱)$$

را نتیجه گرفت که Q نرخ حجمی جریان است. معادله (۲.۲.۱) به معادله پیوستگی معروف است.

۳.۱ معادلات سنت–ونان

دو متغیر عمق کانال و سرعت جریان، یا عمق کانال و سرعت تخلیه آب، برای بیان شرایط جریان در یک سطح مقطع از کانال کافی است. بنابراین برای توصیف جریان می‌توان از دو معادله پیوستگی و معادله گشتاور یا انرژی استفاده کرد. با صرف‌نظر از ضریب تصحیح سرعت

---
[1] Control volume

α و ضریب گشتاور β، هنگامی که عمق جریان و سرعت پیوسته باشند، معادلات گشتاور و انرژی هم‌ارزند. پیوستگی به این منظور است که هیچ سوراخی در کانال یا جهشی در جریان موجود نباشد. اگر به دلایلی در جریان ناپیوستگی باشد، معادله گشتاور مورد استفاده قرار می‌گیرد، زیرا برخلاف معادله انرژی، در این معادله نیازی به دانستن مقدار از دست رفته در ناپیوستگی نیست. در این فصل معادلات پیوستگی و گشتاور را که به معادلات سنت–ونان معروفند، معرفی می‌شوند. در [۶] روش‌های متفاوتی برای به‌دست آوردن معادلات سنت–ونان وجود دارد؛ در این بخش برای به‌دست آوردن این معادلات از قضیه انتقال رینولدز برای کانال‌هایی که دریچه ورودی یا خروجی جانبی دارند استفاده می‌شود. برای محاسبه این معادلات باید شرایط زیر برقرار باشد:

۱) توزیع فشار در کانال هیدرواستاتیکی باشد. این فرض برای کانال‌هایی که خط جریان آن‌ها دارای خمیدگی تندی نباشد، برقرار است.

۲) شیب کف کانال کم باشد به‌طوری‌که عمق جریان بر کف کانال عمود باشد.

۳) سرعت جریان در کل سطح مقطع کانال یکنواخت باشد.

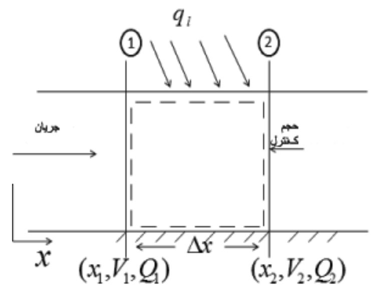
۴) کانال منشوری باشد. ممکن است تغییرات سطح مقطع یا شیب کف کانال به‌دلیل مرتبط بودن کانال با چندین منشور رخ دهد.

۱.۳.۱ معادله پیوستگی

در جریان‌های کانال باز، اغلب جریان آبی را که تراکم‌ناپذیر است و چگالی جرمی ثابتی دارد در نظر گرفته می‌شود. طبق این فرض‌ها، قانون اصل بقای جرم معادل با معادله پیوستگی است. فرض کنید یک حجم کنترل که مرزهای آن مشخص هستند، مطابق با شکل ۱.۱ در نظر گرفته شده باشد. اگر جریان بین قسمت‌های ۱ و ۲ غیریکنواخت باشد، سرعت تخلیه آب Q، جریان V و عمق جریان y، توابعی از مکان x (با اندازه‌ای مثبت در جهت پایین‌دست) و زمان t هستند. با استفاده از قضیه انتقال رینولدز برای حجم کنترل، خاصیت گسترده B برابر با جرم M و خاصیت متمرکز $\beta = \frac{\Delta m}{\Delta m} = ۱$ است. طبق قانون اصل بقای جرم،

$\frac{dM}{dt} = ۰$ است. با جایگذاری $B = M$ و $\beta = ۱$ در معادله (۱.۲.۱) معادله:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{x_۱}^{x_۲} \rho A dx + \rho A_۲ V_۲ - \rho A_۱ V_۱ - \rho q_l (x_۲ - x_۱) = ۰, \qquad (۳.۳.۱)$$



شکل ۱.۱ : مشخصات طرحی ساده از یک جریان کانال باز برای معادله پیوستگی.

به‌دست می‌آید که اندیس‌های ۱ و ۲ به‌ترتیب نشان‌دهنده متغیرهای جریان در نقاط ۱ و ۲، A سطح جریان، ρ چگالی جریان و q_l نرخ حجمی جریان ورودی یا خروجی در هر طول واحد بین مقاطع ۱ و ۲ را نشان می‌دهد. توجه کنید که جریان ورودی و خروجی به‌ترتیب مثبت و منفی در نظر گرفته می‌شوند. چون آب تراکم‌ناپذیر فرض شده است چگالی جرمی آن ثابت است، از این‌رو معادله (۳.۳.۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_۱}^{x_۲} A dx + A_۲ V_۲ - A_۱ V_۱ - q_l (x_۲ - x_۱) = ۰. \qquad (۴.۳.۱)$$

از معادله فوق، دو فرم انتگرالی یا دیفرانسیلی برای معادله پیوستگی به‌دست می‌آید. به‌منظور به‌دست آوردن شکل دیفرانسیلی بایستی متغیرهای جریان پیوسته باشند در حالی که برای شکل انتگرالی نیاز به هیچ محدودیتی نیست. در این بخش شکل دیفرانسیلی معادله پیوستگی به‌دست آورده می‌شود. به‌منظور جزئیات بیشتر شکل انتگرالی این معادله می‌توان به فصل ۵ از مرجع [۶] رجوع کرد. برای ساده‌سازی عبارت اول سمت چپ معادله (۴.۳.۱) می‌توان از قاعده لایبنیتز استفاده نمود. برای این منظور نیاز است که A و $\frac{\partial A}{\partial t}$، نسبت به زمان و مکان پیوسته باشند. به‌عبارت دیگر بین $x_۱$ و $x_۲$ هیچ ناپیوستگی در سطح مقطع کانال رخ ندهد. بنابراین با استفاده از این قاعده و توجه به این‌که $\frac{dx_۱}{dt} = ۰$ و $\frac{dx_۲}{dt} = ۰$ است (مرزهای حجم کنترل ثابتند) نتیجه می‌شود که:

$$\int_{x_۱}^{x_۲} \frac{\partial A}{\partial t} dx + Q_۲ - Q_۱ - q_l (x_۲ - x_۱) = ۰, \qquad (۵.۳.۱)$$

که در آن $Q_۱ = A_۱V_۱$ و $Q_۲ = A_۲V_۲$ است. از طرفی با فرض پیوستگی Q و $\frac{\partial Q}{\partial x}$، بر طبق قضیه مقدار میانی معادله (۵.۳.۱) را می‌توان به شکل:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_l, \tag{۶.۳.۱}$$

نوشت که به معادله پیوستگی با شکل واگرایی[1] یا شکل اصل بقا معروف است. اگر سمت راست معادله (۶.۳.۱) صفر باشد، در طول هر مسیر بسته جرم محفوظ می‌ماند. در غیراین‌صورت، علامت q_l نشان‌دهنده این است که این عامل شبیه چاه یا مخزن عمل می‌کند. برای یک کانال که سطح مقطع یکسانی دارد، تغییرات سطح جریان ΔA را برای یک تغییر کوچک عمق جریان Δy، به‌صورت $B\Delta y$ در گرفته می‌شود، که در حالت حدی وقتی $\Delta y \longrightarrow ۰$، آن‌گاه $B = \frac{dA}{dy}$. از این‌رو معادله (۶.۳.۱) را می‌توان به‌صورت:

$$B\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_l, \tag{۷.۳.۱}$$

نوشت. به طریق مشابه با جایگزین کردن $Q = AV$ در (۷.۳.۱) و توجه به این که $\frac{\partial A}{\partial x} = B\frac{\partial y}{\partial x}$، معادله:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + D\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{q_l}{B} = ۰, \tag{۸.۳.۱}$$

نتیجه می‌شود که $D = \frac{A}{B}$ عمق هیدرولیکی را نشان می‌دهد.

۲.۳.۱ معادله گشتاور

در معادله گشتاور، خاصیت گسترده برابر با $\mathcal{B}$ می‌باشد که نشان‌دهنده گشتاور آب در حجم کنترل یا همان mV است و خاصیت متمرکز نیز برابر با $\beta = \frac{V\Delta m}{\Delta m} = V$ است. هم‌چنین طبق قانون دوم نیوتن برای حرکت، سرعت تغییر گشتاور برابر با مجموع نیروهای وارده به حجم کنترل است؛ یعنی

$$\sum F = \frac{d\mathcal{B}}{dt}.$$

با جایگذاری روابط فوق در (۱.۲.۱) نتیجه می‌شود که:

$$\sum F = \frac{d}{dt}\int_{x_۱}^{x_۲} V\rho A dx + V_۲\rho A_۲V_۲ - V_۱\rho A_۱V_۱ - V_x\rho q_l(x_۲ - x_۱), \tag{۹.۳.۱}$$

---
[1] Divergence form

که V_x مولفه سرعت جریان ورودی در مسیر x است. توجه کنید که q_l برای جریان ورودی مثبت و برای جریان خروجی منفی است، از این‌رو طبق قاعده لایبنیتز معادله (۹.۳.۱) را می‌توان به‌صورت:

$$\sum F = \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial Q}{\partial t} dx + \rho Q_2 V_2 - \rho Q_1 V_1 - V_x \rho q_l (x_2 - x_1) \qquad (۱۰.۳.۱)$$

نوشت که $Q = AV$ است. با تقسیم طرفین بر $\rho(x_2 - x_1)$ و استفاده از قضیه مقدار میانی نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\sum F}{\rho(x_2 - x_1)} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (QV)}{\partial x} - V_x q_l. \qquad (۱۱.۳.۱)$$

برای سادگی از تنش‌های برشی روی آب نظیر باد صرف‌نظر می‌شود. این فرض‌ها برای انواع کاربردها در مهندسی هیدرولیک معتبر هستند. به‌دلیل منشوری بودن کانال، نیروهای موثر بیرونی روی حجم کنترل برای تغییر سطح مقطع کانال وجود ندارد. از این‌رو با توجه به شکل ۱.۲ نیروهای زیر روی حجم کنترل اثر می‌کنند:

۱) نیروی فشار F_1، در انتهای بالادست فعال و برابر با $\rho g A_1 \bar{y}_1$ است که $\bar{y}_1$ عمق مرکز هندسی سطح جریان A_1 است.

۲) نیروی فشار $F_2 = \rho g A_2 \bar{y}_2$ که در انتهای پایین‌دست فعال است.

۳) مولفه وزن آب حجم کنترل را در مسیر x می‌توان به‌صورت:

$$F_3 = \rho g \int_{x_1}^{x_2} AS_\circ dx,$$

در نظر گرفت که $S_\circ$ شیب کف کانال است. در این‌جا فرض می‌شود که شیب به طرف پایین و مثبت باشد.

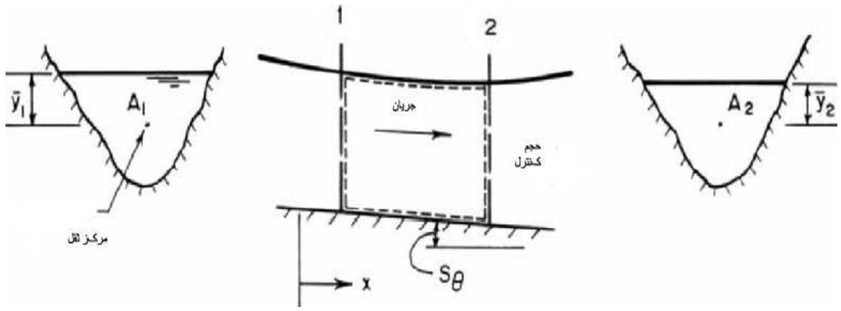
۴) نیروی اصطکاک F_4، که این نیرو به‌صورت

$$F_4 = \rho g \int_{x_1}^{x_2} AS_f dx,$$

نشان داده می‌شود، که S_f شیب اصطکاکی نامیده می‌شود و به‌صورت:

$$S_f = \frac{CV \mid V \mid^{m-1}}{R^p},$$

محاسبه می‌شود که ضریب‌های C و p، به نوع فرمول بستگی دارند و R شعاع هیدرولیکی و m وابسته به نوع جریان است. به‌طور مثال برای جریان لایه‌ای $m = ۱$ و برای جریان آشفته هموار $m = ۱/۷۵$ است.



شکل ۱.۲ : مشخصات طرحی ساده از یک جریان کانال باز برای معادله گشتاور.

از این‌رو برآیند نیروهای موثر روی حجم کنترل به‌صورت

$$\sum F = F_۱ - F_۲ + F_۳ - F_۴, \qquad (۱۲.۳.۱)$$

است. با جایگذاری عبارات $F_۱$ تا $F_۴$ در معادله (۱۲.۳.۱) و تقسیم طرفین بر $\rho(x_۲ - x_۱)$، رابطه:

$$\frac{\sum F}{\rho(x_۲ - x_۱)} = \frac{g(A_۱\bar{y}_۱ - A_۲\bar{y}_۲)}{x_۲ - x_۱} + \frac{g}{x_۲ - x_۱}\int_{x_۱}^{x_۲} A(S_. - S_f)dx \qquad (۱۳.۳.۱)$$

به‌دست می‌آید. از این‌رو با مقایسه معادله‌های (۱۱.۳.۱) و (۱۳.۳.۱) و استفاده از قضیه مقدار میانی نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(QV + gA\bar{y}) = gA(S_. - S_f) + V_x q_l. \qquad (۱۴.۳.۱)$$

معادله (۱۴.۳.۱) به معادله اصل بقای گشتاور معروف است. اگر طرف سمت راست این معادله صفر باشد، آن‌گاه گشتاور در طول هر مسیر بسته در صفحه $x - t$ حفظ می‌شود [۸] و در غیر این‌صورت عبارات ناصفر طرف سمت راست این معادله می‌توانند به‌عنوان چشمه یا چاه عمل کنند. بنابراین:

$$\Delta(A\bar{y}) = [A(\bar{y} + \Delta y) - \frac{۱}{۲}B(\Delta y)^۲] - A\bar{y}.$$

با صرف‌نظر از عبارات مرتبه بالاتر و فرض $\Delta y \longrightarrow ۰$، مقدار $\frac{\partial}{\partial y}(A\bar{y})$ برابر با A می‌شود. از این‌رو تساوی‌های زیر برقرار است:

$$\frac{\partial}{\partial x}(gA\bar{y}) = g\frac{\partial}{\partial y}(A\bar{y})\frac{\partial y}{\partial x} = gA\frac{\partial y}{\partial x}. \tag{۱۵.۳.۱}$$

بنابراین از روابط (۱۴.۳.۱) و (۱۵.۳.۱) معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (QV)}{\partial x} + gA\frac{\partial y}{\partial x} = V_x q_l + gA(S_{\cdot} - S_f). \tag{۱۶.۳.۱}$$

با بسط دو جمله اول سمت چپ معادله بالا و یک آرایش مجدد از آن معادله:

$$\begin{aligned} V(B\frac{\partial y}{\partial t} \quad &+ \quad A\frac{\partial V}{\partial x} + BV\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{V_x}{V}q_l) \\ &+ \quad A(\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} + g\frac{\partial y}{\partial x} + gS_f - gS_{\cdot}) = ۰ \end{aligned} \tag{۱۷.۳.۱}$$

به‌دست می‌آید. طبق معادله (۸.۳.۱) اگر $V_x = ۰$ یا $V_x = V$ باشد، آن‌گاه عبارت داخل پرانتز اول معادله بالا صفر می‌شود. از این‌رو رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g\frac{\partial}{\partial x}(\frac{V^۲}{۲g} + y) = g(S_{\cdot} - S_f), \tag{۱۸.۳.۱}$$

که به معادله گشتاور یا معادله حرکت معروف است.

۳.۳.۱ شکل ماتریسی معادلات سنت–ونان

معادلات پیوستگی و گشتاور یک مجموعه از معادلات غیرخطی با مشتقات جزئی را تشکیل می‌دهند. جواب کلی این معادلات فقط برای حالت‌های خیلی خاص و ساده موجود است. بنابراین روش‌های عددی، روش‌های مفیدی برای حل این معادلات هستند. به‌دست آوردن یک روش عددی مستلزم آن است که این معادلات از کدام نوع از انواع معادلات بیضوی یا سهموی یا هذلولوی در نظر گرفته شوند. معادلات (۸.۳.۱) و (۱۸.۳.۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{t}} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{S}, \tag{۱۹.۳.۱}$$

که در آن بردار $\mathbf{U}$ و ماتریس‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{S}$، به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} y \\ V \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} V & D \\ g & V \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\frac{q_l}{B} \\ g(S_{\cdot} - S_f) \end{bmatrix}.$$