بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی
گروه آمار
(گرایش ریاضی)

عنوان :

برآورد نیمه پارامتری مفصل شرطی

از:

سیده آزاده فلاح مرتضی نژاد

استاد راهنما:

دکتر امیر زینل

شهریور ۱۳۹۳

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

تقدیر و تشکر...

سپاس خداوندگار عظیم و حکیم را که نعمت بی‌کران علم را به آدمیان آموخت.
در ابتدا از زحمات بسیار استاد راهنمای خود جناب آقای دکتر امیر زینل صمیمانه تشکر می‌کنم که با راهنمایی‌های حکیمانه ایشان این مجموعه به پایان رسید. همچنین از کلیه اساتیدی که تا این مرحله افتخار شاگردی آنان را داشتم و از علم آنان آموختم کمال تشکر را می‌نمایم.
در پایان از زحمات بی دریغ پدر و مادر عزیزم که مرا در مراحل سخت زندگی یاری نمودند قدردانی می‌نمایم.

چکیده:

برآورد نیمه پارامتری مفصل شرطی

سیده آزاده فلاح مرتضی‌نژاد

چگونگی تاثیر دو متغیر تصادفی اغلب وابسته به متغیر کمکی را در اینجا بررسی می کنیم. یک روش برای مدل سازی این وابستگی تابع مفصل شرطی است. این پایان نامه به مطالعه برآورد نیمه پارامتری مفصل شرطی به وسیله شروع از تابع مفصل کمک می کند و پارامتر را با یک متغیر کمکی تغییر می‌دهد و با حاشیه‌های تعیین نشده کاری ندارد. در نتیجه بخش قسمت‌های مجهول در این مدل تابع پارامتری و حاشیه‌ها مجهول هستند. در اینجا از یک شبه درستنمایی موضعی با برآورد نیمه پارامتری حاشیه‌ها استفاده می کنیم. برای تقریب تابع موضعی پارامتر مجهول به وسیله یک چند جمله‌ای تحت مبحث کلی سازگاری، برآوردگرهای تابع پارامتر را به خوبی مشتقات‌شان ثابت می کنیم. همچنین نرمال بودن مجانبی بودن را نشان می‌دهیم. به علاوه یک بیان برای پهنای باند بهینه نظری نتیجه گیری می کنیم و همچنین انتخاب پهنای باند عملی را بیان خواهیم کرد.

کلید واژه: نرمال مجانبی، مفصل شرطی، سازگاری، مناسب چند جمله‌ایی، برآورد نیمه پارامتری.

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

پیشگفتار:

این پایان نامه شامل سه فصل می‌باشد. در فصل اول به تعاریف و قضایای مقدماتی برای معرفی کلی مفصل می‌پردازیم که در فصل های بعدی بسیار مورد نیاز هستند. فصل دوم شامل دو بخش می‌باشد که در بخش اول آن روش های کرنل را بیان می کنیم و بخش دوم آن شامل روش کندال و اسپیرمن است. در فصل سوم روشی را برای برآورد نیمه پارامتری مفصل های شرطی بیان می کنیم که برای این کار نیاز به برخی از قضایای نرمال بودن مجانبی و روش های ذکر شده در فصول قبلی داریم.

لازم به ذکر است که در این پایان نامه همه تعریف ها، لم ها، قضایا، ملاحظه ها و نتایج، شماره متوالی دارند. به عنوان مثال، در بخش ۳ از فصل اول، چهارمین عنوان دارای شماره ۱-۳-۴ می باشد

.

فصل ۱

معرفی مفصل

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی مربوط به مفصل‌ها می‌پردازیم و در ادامه مفاهیمی را که برای درک بهتر فصل‌های دیگر مورد نیاز است می‌آوریم.

۱ - ۱ مقدمات

تمرکز این بخش بر یک تابع شبه افزایشی دو بعدی مانند یک تابع غیر کاهشی یک متغیره است. اما در ابتدا نیاز به معرفی برخی از نمادها داریم. فرض خواهیم کرد R نشان دهنده خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ و Ω نشان دهنده خط حقیقی توسعه داده شد $[-\infty, \infty]$ باشد. یک تابع حقیقی دو متغیره H تابعی است که دامنه‌اش، $DomH$، یک زیر مجموعه‌ی Ω^2 باشد و برد آن $RanH$ یک زیر مجموعه‌ی R است.

تعریف ۱ - ۱ - ۱. فرض کنید S_1, S_2 زیر مجموعه‌های غیر تهی Ω باشند و H یک تابع حقیقی دو متغیره باشد که $DomH = S_1 \times S_2$. با در نظر گرفتن $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ به عنوان یک مستطیل که تمام راس‌های آن در $DomH$ است، حجم H به صورت زیر به دست می‌آید.

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1). \qquad (۱-۱)$$

با توجه به این اگر اختلاف مرتبه اول بر مستطیل B را مانند زیر تعریف کنیم.

$$\triangle_{x_1}^{x_2} H(x, y) = H(x_2, y) - H(x_1, y).$$

پس B - حجم نسبت به H اختلاف مرتبه دوم H بر B است.

$$V_H(B) = \triangle_{y_1}^{y_2} \triangle_{x_1}^{x_2} H(x, y).$$

تعریف ۱ - ۱ - ۲. یک تابع حقیقی دو متغیره H برای تمام مستطیل‌های B که راس‌های آن در $DomH$ قرار دارد، شبه افزایشی است اگر $V_H(B) \geq 0$.

وقتی H شبه افزایشی است بعضی اوقات آن را به صورت H - حجم یک مستطیل یا H - اندازه بیان می‌کنیم. بعضی نویسندگان به توابع افزایشی دوبعدی مانند تابع شبه یکنواخت ارجاع می‌دهند. توجه کنید که شبه افزایشی بودن دلیلی بر غیر کاهشی بودن نیست و برعکس آن نیز برقرار نمی‌باشد ($\not\Leftrightarrow$).

مثال ۱ - ۱ - ۳. فرض کنید H تابع تعریف شده بر I^2 به وسیله $H(x, y) = max(x, y)$ باشد. H یک تابع غیر کاهشی برحسب x و y است. بنا به تعریف ۱ - ۱ - ۱، $V_H(I^2) = -1$ بنابراین H شبه افزایشی نیست.

لم‌هایی که در ادامه گفته می‌شود در ساختن زیر مفصل‌ها و مفصل‌ها بسیار مفید خواهند بود. لم اول نتیجه مستقیم تعاریف گفته شده می‌باشد.

لم ۱-۱-۴. **فرض کنید S_1 و S_2 زیر مجموعه‌های غیر تهی Ω باشند و H را یک تابع شبه افزایشی با دامنه $S_1 \times S_2$ قرار دهید. فرض کنید x_1 و x_2 در S_1 با $x_1 \leqslant x_2$ باشد و همچنین فرض کنید که y_1 و y_2 در S_2 با $y_1 \leqslant y_2$ باشند. آنگاه تابع $t \to H(t, y_2) - H(t, y_1)$ غیر کاهشی بر S_1 و تابع $t \to H(x_2, t) - H(x_1, t)$ غیر کاهشی بر S_2 هستند.**

برهان. به دلیل افزایشی بودن تابع H لم مورد نظر به سادگی ثابت می‌شود. □

به عنوان یک کاربرد سریع از این لم می‌توانیم با یک فرض اضافی نشان دهیم که یک تابع شبه افزایشی H نسبت به هر مولفه‌اش غیر کاهشی است. فرض کنید S_1 حداقل یک عنصر a_1 و S_2 حداقل یک عنصر a_2 داشته باشند. گوییم یک تابع H از $S_1 \times S_2$ به R جهت‌دار است برای تمام (x, y) در $S_1 \times S_2$ اگر

$$H(x, a_2) = 0 = H(a_1, y)$$

.

لم ۱-۱-۵. **فرض کنید S_1 و S_2 زیر مجموعه‌های غیر تهی Ω باشند و H یک تابع شبه افزایشی جهت‌دار با دامنه $S_1 \times S_2$ باشد. در این صورت H نسبت به هر مولفه‌اش غیر کاهشی است.**

برهان. در لم ۱-۱-۴ فرض کنید a_1 و a_2 به ترتیب کوچکترین عنصرهای S_1 و S_2 باشند. قرار دهید $x_1 = a_1$ و $y_1 = a_2$. بنابراین حکم صادق است. برای مطالعه دقیق‌تر به مرجع [۳۴] رجوع کنید. □

حالا فرض کنید که S_1 دارای بزرگترین عنصر b_1 و S_2 نیز دارای بزرگترین عنصر b_2 باشد. گوییم یک تابع H از $S_1 \times S_2$ به R دارای حاشیه‌هایی است و حاشیه‌های آن توابع F و G به صورت زیر است.

$$DomF = S_1, F(x) = H(x, b_2)$$

برای تمام x در S_1 و

$$DomG = S_2, G(y) = H(b_1, y)$$

برای تمام y در S_2.

مثال ۱-۱-۶. یک تابع H با دامنه $[-1, 1] \times [0, \infty]$ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$H(x, y) = \frac{(x+1)(e^y - 1)}{x + 2e^y - 1}$$

بنابراین H جهت‌دار است زیرا $H(x, 0) = 0 = H(-1, y)$ و H دارای حاشیه‌های $F(x)$ و $G(y)$ به صورت زیر است.

$$F(x) = H(x, \infty) = \frac{x+1}{2}$$

و

$$G(y) = H(1, y) = 1 - e^{-y}$$

این بخش را با یک لم مهم درباره توابع شبه افزایشی جهت‌دار با حاشیه‌هایش خاتمه می‌دهیم.

لم ۱-۱-۷. **فرض کنید S_1 و S_2 زیر مجموعه‌های غیر تهی Ω باشند و H را یک تابع شبه افزایشی جهت‌دار قرار دهید که دامنه‌اش $S_1 \times S_1$ است و حاشیه‌هایش را در نظر بگیرید. فرض کنید (x_1, y_1) و (x_2, y_2) هر نقطه‌ایی در $S_1 \times S_2$ باشند. در این صورت**

$$| H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1) | \leqslant | F(x_2) - F(x_1) | + | G(y_2) - G(y_1) | .$$

برهان. با استفاده از نامساوی مثلثی داریم

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leqslant |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| + |H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)|$$

حال بدون از دست دادن کلیت اثبات فرض کنید $x_1 \leqslant x_2$. به دلیل اینکه H شبه افزایشی جهت‌دار است و نیز دارای حاشیه‌هایی می‌باشد از لم‌های ۱-۱-۴ و ۱-۱-۵ نتیجه می گیریم

$$0 \leqslant H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \leqslant F(x_2) - F(x_1)$$

به هر حال برای هر x_1 و x_2 در S_1 داریم

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| \leqslant |F(x_2) - F(x_1)|$$

به طور مشابه برای هر y_1 و y_2 در S_2 داریم

$$|H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)| \leqslant |G(y_2) - G(y_1)|$$

که اثبات کامل می‌شود. برای مطالعه دقیق‌تر به مرجع [۳۴] رجوع شود. □

۱-۲ مفصل‌ها

حال در موقعیت تعریف توابع مفصل هستیم. برای این کار ابتدا زیر مفصل‌ها را به عنوان یک کلاس توابع شبه افزایشی جهت‌دار با حاشیه‌هایشان تعریف می کنیم. سپس مفصل‌ها را مانند زیر مفصل‌ها با دامنه I^2 تعریف خواهیم کرد.

تعریف ۱-۲-۱. یک زیر مفصل دو بعدی یک تابع C' دارای خواص زیر است.

- $DomC' = S_1 \times S_2$ که S_1 و S_2 زیر مجموعه‌های I شامل ۰ و ۱ هستند.
- تابع C' شبه افزایشی و جهت‌دار است.

- برای هر u در S_1 و هر v در S_2 داریم:

$$C'(u,1)=u, C'(1,v)=v.$$

توجه کنید که برای هر (u,v) در $DomC'$، $0 \leqslant C'(u,v) \leqslant 1$ بنابراین $RanC'$نیز یک زیر مجموعه I است.

تعریف ۱-۲-۲. یک مفصل دوبعدی یک زیر مفصل دوبعدی است که دامنه آن I باشد. به عبارت دیگر یک مفصل یک تابع C از I^2 به I با خاصیت‌های زیر است.

- برای هر u و v در I داریم

$$C(u,0)=0=C(0,v) \tag{۱-۲}$$

و

$$C(u,1)=u,\ C(1,v)=v. \tag{۱-۳}$$

- برای هر u_1، u_2، v_1، و v_2 در I که $u_1 \leqslant u_2$ و $v_1 \leqslant v_2$

$$C(u_2,v_2)-C(u_2,v_1)-C(u_1,v_2)+C(u_1,v_1) \geqslant 0. \tag{۱-۴}$$

فاصله بین یک زیر مفصل و یک مفصل (دامنه) ممکن است بسیار کوچک بنظر برسد اما در بخش بعد هنگامی که می‌خواهیم درباره قضیه اسکلار صحبت کنیم بیشتر مهم است. به علاوه بسیاری از خواص مهم مفصل‌ها حقیقتاً خاصیت‌های زیر مفصل‌ها می‌باشند.

قضیه ۱-۲-۳. فرض کنید C' یک زیر مفصل باشد. برای هر (u,v) در دامنه C' داریم

$$max(u+v-1,0) \leqslant C'(u,v) \leqslant min(u,v). \tag{۱-۵}$$

برهان. فرض کنید (u,v) یک نقطه دلخواه در $DomC'$ باشد. حال

$$C'(u,v) \leqslant C'(u,1)=u$$

و

$$C'(u,v) \leqslant C'(1,v)=v$$

نتیجه می‌دهد که

$$C'(u,v) \leqslant min(u,v)$$

به علاوه

$$V_{C'}([u,1]\times[v,1]) \geqslant 0$$

$$C(u,v) - C(u,1) - C(1,v) + C(1,1) \geqslant 0$$

$$\Longrightarrow \qquad C'(u,v) - u - v + 1 \geqslant 0$$

که ایجاب می‌کند

$$C'(u,v) \geqslant u + v - 1.$$

وقتی که با $C'(u,v) \geqslant 0$ ترکیب می‌کنیم خواهیم داشت

$$C'(u,v) \geqslant max(u+v-1, 0).$$

برای مطالعه دقیق‌تر به مرجع [۳۴] رجوع کنید. □

برای اینکه هر مفصل یک زیر مفصل است بنابراین نامساوی قضیه فوق برای مفصل‌ها نیز صادق است. براستی کران‌ها در ۱-۵ خودشان نیز مفصل می‌باشند و معمولا به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$M(u,v) = min(u,v), W(u,v) = max(u+v-1, 0).$$

بنابراین برای هر مفصل C و هر (u,v) در I^2 داریم

$$W(u,v) \leqslant C(u,v) \leqslant M(u,v). \qquad (۱-۶)$$

نامساوی بالا یک نسخه مفصل از نامساوی کران‌های فرچت- هوفدینگ [۱] است که باید در بررسی توابع توزیع با آنها مواجه شویم. به M به عنوان کران بالا و W به عنوان کران پایین فرچت- هوفدینگ رجوع می‌کنیم. سومین مفصل مهمی که با آن بسیار کار می‌کنیم مفصل $\Pi(u,v) = uv$ است. قضیه‌ایی که در ادامه بیان می‌شود به طور مستقیم نتیجه‌ایی از لم ۱-۱-۷ است.

قضیه ۱-۲-۴. **فرض کنید که C' یک زیر مفصل باشد. برای هر (u_1, u_2) و (v_1, v_2) در دامنه C' داریم**

$$| C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_1) | \leqslant | u_2 - u_1 | + | v_2 - v_1 | \qquad (۱-۷)$$

در نتیجه C' به طور یکنواخت بر دامنه خود پیوسته است.

تعریف ۱-۲-۵. فرض کنید C یک مفصل و a یک عدد در I باشد. بخش افقی C در a یک تابع از I به I به صورت $t \mapsto C(t,a)$ است. بخش عمودی C در a یک تابع از I به I به صورت $t \mapsto C(a,t)$ است و بخش اریب C تابع δ_C از I به I به صورت $\delta_C(t) = C(t,t)$ تعریف می‌شود.

لمی که در ادامه گفته می‌شود یک نتیجه سریع از لم ۱-۱-۵ و قضیه ۱-۲-۴ است.

[۱] Fréchet-Hoeffding bounds inequality

لم ۱-۲-۶. **بخش‌های افقی، عمودی، و اریب a در مفصل C همگی غیر کاهشی و به طور یکنواخت پیوسته بر I هستند.**

کاربردهای مختلف مفصل که در بخش‌های بعد با آنها مواجه خواهیم شد شامل شکل‌های گرافیکی مفصل $z = C(u,v)$ است. از تعریف ۱-۲-۲ و قضیه ۱-۲-۴ نتیجه می‌شود که نمودار هر مفصل یک سطح پیوسته بر مکعب واحد $I^۳$ است که کران‌های آن چهار ضلعی چوله با راس‌های $(۱,۱,۱)$، $(۱,\circ,\circ)$، $(\circ,\circ,\circ)$ و $(\circ,۱,\circ)$ می‌باشد. از قضیه ۱-۲-۳ نتیجه می‌شود که خطوط این نمودار بین کران‌های فرچت-هوفدینگ است.

قضیه ۱-۲-۷. **فرض کنید C یک مفصل باشد. برای هر v در I مشتق جزیی $\partial C(u,v)/\partial u$ برای تقریبا همه u ها وجود دارد و برای چنین u و v داریم**

$$\circ \leqslant \frac{\partial}{\partial u}C(u,v) \leqslant ۱. \qquad (۱\text{-}۸)$$

به طور مشابه برای هر u در I مشتق جزیی $\partial C(u,v)/\partial v$ برای تقریبا همه v وجود دارد و برای چنان u و v داریم

$$\circ \leqslant \frac{\partial}{\partial v}C(u,v) \leqslant ۱. \qquad (۱\text{-}۹)$$

به علاوه توابع $u \mapsto \partial C(u,v)/\partial v$ و $v \mapsto \partial C(u,v)/\partial u$ تعریف شده و تقریبا همه جا بر I غیر کاهشی هستند.

برهان. مرجع [۳۴]. □

قضیه ۱-۲-۸. **فرض کنید C یک مفصل باشد. اگر $\partial C(u,v)/\partial v$ و $\partial^۲ C(u,v)/\partial u\partial v$ پیوسته بر $I^۲$ باشند و $\partial C(u,v)/\partial u$ برای تمام $u \in (\circ,۱)$ وقتی که $v = \circ$ وجود داشته باشد. آنگاه $\partial C(u,v)/\partial u$ و $\partial^۲ C(u,v)/\partial v\partial u$ بر $(\circ,۱)^۲$ وجود دارد و**

$$\partial^۲ C(u,v)/\partial u\partial v = \partial^۲ C(u,v)/\partial v\partial u.$$

برهان. مرجع [۳۴]. □

۱-۲-۱ معرفی برخی از خانواده‌های مفصل

- خانواده مفصل فرچت-ماردیا [1]

۱. فرض کنید که α و β در I باشند به‌طوری که $\alpha + \beta \leqslant ۱$ و قرار دهید

$$C_{\alpha,\beta}(u,v) = \alpha M(u,v) + (۱ - \alpha - \beta)\Pi(u,v) + \beta W(u,v) \qquad (۱\text{-}۱۰)$$

[1] The Fréchet and Mardia families of copulas

که در آن $C_{\alpha,\beta}$ یک مفصل است.در این صورت یک خانواده مفصل شامل مفصل‌های Π, W و M وسیع نامیده می‌شود. این خانواده وسیع دو پارامتری توسط فرچت مطرح شد.

۲. فرض کنید $\theta \in [-1,1]$ و قرار دهید

$$C_\theta(u,v) = \frac{\theta^2(1+\theta)}{2}M(u,v) + (1-\theta^2)\Pi(u,v) + \frac{\theta^2(1-\theta)}{2}W(u,v) \quad (۱-۱۱)$$

C_θ یک مفصل است. این خانواده وسیع یک پارامتری توسط ماردیا بیان شد.

- خانواده مفصل کادراس-اگ [1] برای $\theta \in I$ را تعریف می‌کنیم

$$C_\theta(u,v) = [min(u,v)]^\theta [uv]^{1-\theta} = \begin{cases} \mathbf{u}\,\mathbf{v}^{1-\theta} & u \leqslant v \\ \mathbf{u}^{1-\theta}v & \mathbf{u} \geqslant v \end{cases}$$

C_θ نیز یک مفصل است. توجه کنید که $C_0 = \Pi$ و $C_1 = M$. این خانواده(میانگین وزنی M و Π) توسط کادراس و اگ مطرح شد.

۱-۳ قضیه اسکلار

این قضیه که عنوان این بخش را تشکیل می‌دهد مرکز قضایای مفصل و شالوده بسیاری از مسایل مفصل می‌باشد. قضیه اسکلار [2] روشی را که مفصل‌ها در رابطه بین توابع توزیع چند متغیره و حاشیه‌های تک متغیره آنها دارند، بیان می‌کند. بنابراین این بخش را با یک بحث کوتاه در رابطه با توابع توزیع شروع می‌کنیم.

تعریف ۱-۳-۱. یک تابع توزیع یک تابع F با دامنه Ω به صورت زیر است:

۱. F غیر کاهشی است.

۲. $F(-\infty) = 0$ و $F(\infty) = 1$

۳. از راست پیوسته است.

مثال ۱-۳-۲. برای عدد a در R تابع توزیع ϵ_a در a به صورت زیر است.

$$\epsilon_a(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\infty, a) \\ 1 & x \in [a, \infty] \end{cases}$$

[1] The Cuadras-Augé family of copulas [2] Sklar's theorem

و برای تمام اعداد a وb در Ω با $a < b$ توزیع یکنواخت بر $[a,b]$ با تابع توزیع U_{ab} به صورت زیر است.

$$U_{ab}(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\infty, a) \\ \dfrac{x-a}{b-a} & x \in [a,b] \\ 1 & x \in (b, \infty] \end{cases}$$

تعریف ۱-۳-۳. یک تابع توزیع توام یک تابع H با دامنه Ω به صورت زیر است.

۱. H شبه افزایشی است.

۲. $H(x,-\infty) = H(-\infty, y) = 0$ و $H(\infty,\infty) = 1$.

بنابراین H جهت‌دار است و به دلیل $DomH = \Omega^2$، H حاشیه‌هایی به صورت $F(x) = H(x,\infty)$ و $G(y) = H(\infty, y)$ دارد. به واسطه لم ۱-۲-۶، F و G توابع توزیع هستند.

مثال ۱-۳-۴. فرض کنید H یک تابع با دامنه Ω به صورت زیر باشد.

$$H(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1} & (x,y) \in [-1,1] \times [0,\infty] \\ 1 - \mathrm{e}^{-y} & (x,y) \in (1,\infty] \times [0,\infty] \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$H(\infty,\infty) = 1$ بنابراین H یک تابع توزیع توام است. حاشیه‌های H توابع توزیع F و G به صورت زیر هستند.

$$F = U_{-1,1}$$

$$G(y) = \begin{cases} 0 & y \in [-\infty, 0) \\ 1 - \mathrm{e}^{-y} & y \in [0, \infty] \end{cases}$$

توجه کنید که هیچ احتمالی در این تعاریف توابع توزیع وجود ندارد. تمام توابع توزیع یک یا چند متغیره تصادفی در آمار معمولا در یکی از تعاریف اول و یا دوم صدق می‌کنند. از این رو هر نتیجه‌ای که برای چنین توابع توزیعی به دست آوریم را تا وقتی که در مورد متغیرهای تصادفی (صرف نظر از هر گونه محدودیت اعمال شده) صحبت کنیم ، نگاه خواهیم داشت. استدلالی که در دو لم زیر بیان شده است بسیار ضروری می‌باشد.

لم ۱-۳-۵. **فرض کنید H یک تابع توزیع توام با حاشیه‌های F وG باشد. در این صورت یک زیر مفصل واحد وجود دارد به‌طوری‌که**

۱. $DomC' = RanF \times RanG$**.**

۲. برای تمام x و y در Ω، $H(x,y) = C'(F(x), G(y))$**.**

برهان. توزیع توام H در فرض لم ۱-۱-۷ با $S_1 = S_2 = \Omega$ صدق می‌کند. از این رو برای هر نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) در Ω^2

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leqslant |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|$$

اگر $F(x_1) = F(x_2)$ و $G(y_1) = G(y_2)$ داریم

$$H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2)$$

بنابراین برای مجموعه جفت‌های مرتب

$$\{((F(x), G(y)), H(x, y))|x, y \in \Omega\}$$

یک تابع حقیقی دو متغیره C' را که دامنه‌اش $RanF \times RanG$ است تعریف می‌کنیم. زیر مفصل بودن این تابع به طور مستقیم از خواص H به دست می‌آید. به عنوان مثال به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v),\ C(u, 1) = u,\ C(1, v) = v$$

ابتدا باید توجه کنیم که برای هر u در $RanF$ یک x در Ω وجود دارد به‌طوری‌که $F(x) = u$. بنابراین

$$C'(u, 1) = C'(F(x), G(\infty)) = H(x, \infty) = F(x) = u$$

اثبات شرایط دیگر تعریف ۱-۲-۱ به طور مشابه اثبات می‌شود. برای مطالعه دقیق‌تر به مرجع [۳۴] رجوع شود. □

لم ۱-۳-۶. **فرض کنید C' یک زیر مفصل باشد. پس یک مفصل مانند C وجود دارد به‌طوری‌که برای تمام (u, v) در $DomC'$**

$$C(u, v) = C'(u, v).$$

هر زیر مفصل یک مفصل تعمیم یافته است که عموما غیر یکتا می‌باشد.

برهان. مرجع [۳۴]. □

قضیه ۱-۳-۷. **(قضیه اسکلار) فرض کنید H یک تابع توزیع توام با حاشیه‌های F و G باشد. آنگاه یک مفصل C وجود دارد به‌طوری‌که برای تمام x و y ها در Ω**

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \tag{۱-۱۳}$$

اگر F و G پیوسته باشند آنگاه C یکتاست. در غیر این صورت C به صورت یکتا بر $RanF \times RanG$ تعریف می‌شود. برعکس اگر C یک مفصل و F و G توابع توزیع باشند آنگاه تابع H تعریف شده به وسیله ۱-۱۳ یک تابع توزیع توام با حاشیه‌های F و G است.