دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

آمار ریاضی

کنکاشی در رده توزیع‌های طول عمر

استاد راهنما

دکتر غلامرضا محتشمی برزادران

استاد مشاور

دکتر محمد امینی

نگارش

علی چرخی

شهریور ۱۳۹۱

پیش از همه، سپاس برای او که بیش از همه رهین هدایتش هستم. مهربان خدایی که نبودنم را بودکرد و خنکای بودنش آرامش بخش قلبم بود در هنگامه دشواری‌ها. پروردگاری که جان و دلم را با مهر خودش آمیخت و هر آنچه از دانش است به حقیقت او به من آموخت.

دوم سپاس برای استاد گرانقدرم دکتر غلامرضا محتشمی برزادران؛ از آن رو که با پندهای پدرانه‌ی خود پابه پای من بود تا این پژوهش به ثمر برسد و بی‌دریغ کوله‌بار تجربه‌ی خویش را در اختیارم گذاشت.

و نیز قدردان همراهی‌های استاد مشاور خود دکتر محمد امینی هستم که قلم صحت بر خطاهایم کشید و این نگاشته را استوار ساخت.

از اساتید بزرگوار هیأت داوران آقایان دکتر عبدالحمید رضایی رکن آبادی و مصطفی رزمخواه که با نهایت حوصله و دقت رساله اینجانب را بررسی نمودند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

به رسم ادب تشکری ویژه و از صمیم قلب دارم از استاد بزرگوارم دکتر ناصررضا ارقامی که بی شک یکی از افتخارات دوران تحصیلم استفاده از محضر این استاد بزرگوار و توانمند است و از خداوند منان برای ایشان آرزوی سلامتی و طول عمر را دارم.

در هنگامه‌ی نگارش این پژوهش، بی‌نیاز نبودم از گام زدن در میان قفسه‌های مملو از کتاب‌هایی که سطر سطر دلهای کاغذین خود را دربرابرم می‌گشودند و در کوچه پس کوچه‌های دانش رهنمونم بودند. از این رو سپاسگزارم از سرکار خانم صادقی مسئول کتابخانه‌ی دانشکده که درِ این خانه‌ی دنج کتابها را به رویم گشود.

و کمال امتنان را دارم از سرکار خانم سلیمانی، کارشناس گروه آمار که با همراهی‌های خود، دشواری‌های کار را برایم آسان نمود.

حسن ختام این نامه‌ی تقدیر، از آن عزیزترین‌هایم؛ مادرم و پدرم و برادرم. همان‌ها که با مهربانی‌هایی که رنگ رحمانیت خدا را داشت از اولین گامها و کلامها با من بودند و هرگز تنهایم نگذاشتند. آنانکه دستانی مملو از عشق و پاکی و چشمانی سرشار از محبت و کلامی دلنشین و روشنی بخش دارند و هرچه دارم و خواهم داشت از دعای خیر آنهاست. آنانی که نگاه نگران و خسته‌شان هماره بدرقه راهم و لبخند پر مهرشان گرمی‌بخش لحظه لحظه‌های زندگی‌ام بوده است. سپید موی گشتند تا سپیدروی بمانم، توانشان رفت تا به توانایی برسم. نشستند تا پای بگیرم. آنانکه آفتاب مهرشان در آسمان دلم هرگز غروب نخواهد کرد و تا هستم دست‌بوسشان خواهم بود و در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب به زمین می‌نهم و بهترین دعاهای خالخانه را تقدیمشان می‌کنم.

چکیده

در این پایان نامه در فصل اول مفاهیم قابلیت اعتماد در حالت گسسته و پیوسته ارائه گردیده است. سپس رده توزیع‌های مختلف قابلیت اعتماد به تفصیل مورد بحث قرار گرفته و روابط بین آنها تبیین گشته است. در فصل سوم اشکال متفاوتی که نرخ خطر اختیار می‌کند ترسیم و راه‌کارهایی برای تعیین شکل تابع نرخ خطر یک توزیع ارائه شده است. فصل چهارم، به بیان کاربردهایی از قابلیت اعتماد در اقتصاد و صنعت اختصاص یافته و دو رده از توزیع‌ها که اخیرا معرفی شده اند، بررسی شده است. همچنین مشخصه‌سازی‌هایی برای این رده توزیع‌ها صورت گرفته است. در پایان نیز مفاهیم قابلیت اعتماد را به حالت چند متغیره تعمیم داده و رده توزیع‌های متفاوت در این حالت ارائه شده است. همچنین ارتباط آنها با تابع مفصل نیز مختصرا مورد توجه قرار گرفته است.

پیش‌گفتار

در جهانی که در آن زندگی می‌کنیم، هیچ چیز از جمله اشیاء و موجودات باقی و ثابت نیستند و در نهایت فانی خواهند شد. بنابراین از جمله خواسته‌های بشر نیاز به دانستن وضعیت طول عمر موجودات و اشیاء اطراف اوست تا بتواند به طور بهینه و حداکثر از آن برای پیشبرد اهداف خود استفاده کند. این نیاز طبیعی بشر، امروزه منجر به ایجاد شاخه‌ای بزرگ و گسترده در تمامی علوم به نام ''قابلیت اعتماد'' شده است. مطالعه و تحقیق در مورد قابلیت اعتماد در علوم مختلفی از جمله انواع شاخه‌های مهندسی، پزشکی و اقتصادی از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است.

قابلیت اعتماد یک کلمه با معنی‌های مختلفی است. هنگامی که این کلمه را برای انسان‌ها به‌کار می‌بریم مفهوم آن به توانایی انسان در انجام یک کار معین طبق استانداردهای موجود برمی‌گردد و هنگامی که آن را برای قطعه‌ای از یک دستگاه و یا مولفه‌ای از یک سیستم به‌کار می‌بریم، مفاهیمی چون توانایی آن قطعه یا مولفه برای ایفای نقش در آن دستگاه یا سیستم را در بر می‌گیرد.

در ابتدای امر استفاده اصلی از کلمه قابلیت اعتماد به صورت یک مفهوم کیفی بوده است. اما امروزه قابلیت اعتماد تقریبا در اکثر موارد یک مفهوم کمی و مقداری به خود گرفته است و در نتیجه نیاز به روش‌هایی برای اندازه‌گیری آن احساس می‌شود. مهم‌ترین دلیل اینکه چرا بایستی قابلیت اعتماد به عنوان یک متغیر کمی محاسبه شود، شاید مسائل اقتصادی باشد. در بسیاری از مسائل وقتی یک قطعه سالم باشد، متوسط زمان باقیمانده عمر یک پارامتر مهم و حیاتی بشمار می‌رود. در این‌گونه موارد نیاز به یک تعریف احتمالی از قابلیت اعتماد مناسب به نظر می‌رسد.

دلیل دیگری که می‌توان برای کمی بودن مقدار قابلیت اعتماد بیان کرد این است که استانداردهای مختلفی از قابلیت اعتماد در مکان‌ها و کاربردهای مختلف وجود دارد. به هر حال قابلیت اعتماد بایستی اندازه‌گیری شود و این امر، نیاز به روش‌های آماری را دوچندان می‌کند.

تاریخچه قابلیت اعتماد را می‌توان به سال‌های قبل از ۱۹۳۰ و از آن پس دوره‌های تقریبا ده ساله تا به امروز مورد مطالعه قرار داد. اولین مطالعات اصولی حدود ۱۰۰ سال قبل، در رابطه با افزایش طول عمر قطعات خطوط راه‌آهن انجام گرفته که نتیجه چنین مطالعاتی معرفی سیستم‌هایی با مولفه‌های موازی و سیستم‌هایی با

مولفه‌های مازاد بود که قبل از سال‌های ۱۹۳۰ به عنوان یک پیشرفت قابل توجه به حساب می‌آمد. در دهه ۱۹۴۰ نظریه احتمال برای محاسبه توان سیستم‌های توزیع الکتریسیته، با هدف تامین برق قابل اعتماد مصرف کنندگان استفاده گردید و موضوع افزایش کیفیت قطعات تشکیل دهنده یک سیستم نیز روشی برای افزایش اعتماد و ایمنی و همچنین افزایش طول عمر در سیستم‌های صنعتی بکارگرفته شد.

قابلیت اعتماد به عنوان شاخه‌ای از مهندسی، در ایالت متحده به خصوص در صنایع الکترونیک در دهه ۱۹۵۰ به وجود آمد. در این دهه پیچیدگی سیستم‌های الکترونیکی به خصوص تجهیزات نظامی به عنوان عامل مهمی در کاهش در دسترس بودن قطعات و افزایش هزینه‌های تعمیراتی آن‌ها در رابطه با هزینه تشخیص خرابی، هزینه تعمیرکار ماهر و ... به حساب می‌آمد به طوری که در دهه ۱۹۶۰که هجوم تکنیک‌های جدید قابلیت اعتماد و کاربرد وسیع آن می‌باشد، اولین مطالعه روی تاثیر شکست قطعات و کارکرد سیستم‌ها و ایمنی آنها انجام گرفت و موجب شروع به کارگیری نتایجی در صنایع هوایی به خصوص سفینه‌های فضایی گردید. اوج بکارگیری تکنیک‌های قابلیت اعتماد در رابطه با مسائل ایمنی در این دهه می‌باشد. در این دهه اولین نشریه علمی در زمینه قابلیت اعتماد توسط مهندسین برق و الکترونیک منتشر گردید. ریاضیدانان و آماردانان معروفی مانند بیرن بوم[۱]، بارلو[۲] و پروشان[۳] و ایساری[۴] در این دوره نقش موثری در پیشبرد و توسعه نظریه قابلیت اعتماد بر عهده داشتند.

در این پایان نامه، با اندازه‌های مختلف اندازه‌گیری قابلیت اعتماد یک سیستم در حالت پیوسته و گسسته و با برخی از کاربردهای این علم آشنا می‌شویم. فصل دوم به معرفی رده توزیع‌های مختلف قابلیت اعتماد و روابط آنها اختصاص یافته است. همچنین اشاره‌ای به حالت وزنی این رده توزیع‌ها گردیده است. در فصل سوم به بررسی شکل یکی از مهمترین توابع موجود در قابلیت اعتماد یعنی نرخ خطر پرداختیم و شکل نرخ خطر برخی توزیع‌ها را مورد بررسی قرار دادیم. در فصل چهارم دو رده توزیع جدید که در سالهای ۲۰۰۱ و ۲۰۰۴ توسط لارویر و پرتئوس[۵] و کنوپیک[۶] معرفی شدند، بیان و برخی مشخصه‌سازی‌ها برای آن‌ها انجام گرفت. سرانجام، در بخش آخر به صورت خلاصه قابلیت اعتماد را در حالت چند متغیره بررسی کرده و رده توزیع‌های مختلفی که در این حالت معرفی شده‌اند، بیان گردیده است. بیان برخی مقدمات از تابع مفصل و ارتباط آن با قابلیت اعتماد، پایان بخش این تحقیق است.

شایان ذکر است مطالبی که با ** نشان داده شده‌اند، توسط نگارنده ارائه و یا اثبات شده‌اند.

[۱] Birn baum

[۲] Barlow

[۳] Proschan

[۴] Esary

[۵] Larviere and Porteus

[۶] Knopik

فهرست مطالب

۱ مروری بر مفاهیم قابلیت اعتماد در توزیع‌های پیوسته و گسسته ۱
۱.۱ مقدمه ۱
۲.۱ آشنایی با توابع قابلیت اعتماد ۳
۱.۲.۱ تابع بقا ۳
۲.۲.۱ تابع نرخ خطر ۴
۳.۲.۱ میانگین زمان شکست ۷
۴.۲.۱ تابع نرخ خطر معکوس ۱۱
۵.۲.۱ زمان سپری شده از شکست ۱۲
۶.۲.۱ میانگین زمان سپری شده از شکست ۱۳
۳.۱ توزیع‌های طول عمر پیوسته در قابلیت اعتماد ۱۶
۴.۱ کاربردهایی از قابلیت اعتماد ۲۱
۱.۴.۱ سیستم سری ۲۲
۲.۴.۱ سیستم موازی ۲۳
۳.۴.۱ سیستم k از n ۲۵
۴.۴.۱ سیستم منسجم ۲۷
۵.۴.۱ میانگین باقیمانده عمر در یک سیستم $n-k+۱$ از n ۲۸
۶.۴.۱ میانگین زمان سپری شده از شکست در سیستم $n-k+۱$ از n ۲۹

۲ رده توزیع‌های متعارف طول عمر پیوسته و گسسته ۳۲
۱.۲ مقدمه ۳۲
۲.۲ رده توزیع‌های قابلیت اعتماد و روابط آنها ۳۳

۱.۲.۲ رده توزیع‌های دارای خاصیت (IFR) و (DFR) ۳۳
۲.۲.۲ رده توزیع‌های دارای خاصیت (IFRA) و (DFRA) ۴۳
۳.۲.۲ رده توزیع‌های دارای خاصیت (NBU) و (NWU) ۴۵
۴.۲.۲ رده توزیع‌های دارای خاصیت (NBUE) و (NWUE) ۴۶
۵.۲.۲ رده توزیع‌های دارای خاصیت (DMRL) و (IMRL) ۴۷
۶.۲.۲ رده توزیع‌های غیر متعارف در حالت پیوسته ۴۸
۳.۲ روابط بین رده توزیع‌های طول عمر در حالت‌های پیوسته و گسسته ۵۰
۱.۳.۲ اثبات روابط بین رده توزیع‌های پیوسته ۵۱
۲.۳.۲ مثال نقض ۵۳
۴.۲ بررسی توزیع‌های وزنی برای برخی از رده توزیع‌های قابلیت اعتماد ۵۹
۱.۴.۲ توزیع‌های وزنی و منحنی لورنتس ۶۲
۲.۴.۲ توزیع‌های وزنی با نرخ خطر یکنوا ۶۳

۳ تشخیص رفتار نرخ خطر در حالت کلی ۶۸
۱.۳ مقدمه ۶۸
۲.۳ راهکارهایی برای تشخیص شکل تابع نرخ خطر ۶۹
۳.۳ روش گلیزر برای تعیین شکل تابع نرخ خطر ۷۰
۱.۳.۳ ناکارآمدی روش گلیزر در برخی موارد ۷۶
۴.۳ تعمیم روش گلیزر برای تعیین رفتار تابع نرخ خطر ۷۹
۱.۴.۳ بررسی مثال نقض در توزیع وایبل آمیخته ۸۳
۵.۳ بررسی شکل تابع نرخ خطر برخی توزیع‌ها ۸۴
۱.۵.۳ برخی دیگر از رده توزیع‌های دارای نرخ خطر غیر یکنوا ۹۲

۴ قابلیت اعتماد، اقتصاد، صنعت ۹۷
۱.۴ مقدمه ۹۷
۲.۴ رده توزیع‌های دارای نرخ خطر تعمیم‌یافته صعودی ۹۸
۱.۲.۴ برخی مشخصه‌سازی‌های معرفی شده برای رده توزیع‌های $IGFR$ ۱۰۰
۲.۲.۴ **اصلاح برخی مثال‌های نقض اشتباه ۱۰۴
۳.۲.۴ ترتیب‌های تصادفی و رابطه آنها با رده توزیع‌های مختلف ۱۰۷
۴.۲.۴ **ترتیب‌های تصادفی در خانواده توزیع‌های $IGFR$ ۱۰۹

۳.۴ میانگین باقیمانده عمر باجایگذاری ۱۱۱
۱.۳.۴ ارتباط رده‌توزیع‌های $MTFR$ با دیگر رده توزیع‌ها ۱۱۳
۲.۳.۴ سیستم سری و موازی با اجزاء دارای خاصیت MTFR ۱۱۴
۳.۳.۴ توزیع آمیخته و توزیع مجموع ۱۱۷

۵ مروری بر رده توزیع‌های قابلیت اعتماد در حالت بیش از یک متغیر ۱۲۰
۱.۵ مقدمه ۱۲۰
۲.۵ اندازه‌های قابلیت اعتماد در حالت بیش از یک متغیره ۱۲۱
۱.۲.۵ نمایش نمایی توزیع‌های دو متغیره ۱۲۴
۳.۵ رده توزیع‌های قابلیت اعتماد در حالت چند متغیره ۱۲۷
۱.۳.۵ رده توزیع‌های دارای خاصیت MIFR ۱۲۸
۲.۳.۵ رده توزیع‌های دارای خاصیت MIFRA ۱۳۴
۳.۳.۵ رده توزیع‌های دارای خاصیت MNBU و MNBUE ۱۳۶
۴.۳.۵ رده توزیع‌های دارای خاصیت MDMRL ۱۴۰
۴.۵ توزیع‌های قابلیت اعتماد در حالت چند متغیره گسسته ۱۴۲
۵.۵ قابلیت اعتماد از دیدگاه تابع مفصل ۱۴۹

۶ نتیجه‌گیری و آینده تحقیق ۱۵۶

کتاب‌نامه ۱۵۸

لیست تصاویر

۱.۱ ساختار مهاربندها و پایه‌های سکو ۲۵
۲.۱ تصویر یک سکوی نفتی به صورت سیستماتیک ۲۶

۱.۲ تابع نرخ خطر توزیع آمیخته $f(x)$ در مثال ۳.۲ ۳۷
۲.۲ تابع نرخ خطر توزیع آمیخته $f(x)$ در مثال ۴.۲ ۳۷
۳.۲ تابع نرخ خطر توزیع آمیخته $f(x)$ در مثال ۵.۲ ۳۸
۴.۲ تابع نرخ خطر توزیع آمیخته $f(x)$ در مثال ۶.۲ ۳۸
۵.۲ تابع نرخ خطر توزیع آمیخته $f(x)$ در مثال ۷.۲ ۳۹
۶.۲ تابع نرخ خطر $f(x)$ در مثال ۸.۲ ۴۳
۷.۲ بررسی خاصیت IFR و $IFRA$ در مثال ۱۰.۲ ۵۴
۸.۲ بررسی خاصیت $DMRL$ و $IFRA$ در مثال ۱.۲ ۵۸
۹.۲ تابع نرخ خطر توزیع وزنی در مثال ۲۵.۲ ۶۴

۱.۳ اشکال متفاوت نرخ خطر ۷۱
۲.۳ شکل تابع نرخ خطر در مثال ۴.۳ ۷۹
۳.۳ شکل تابع نرخ خطر در مثال ۵.۳ ۸۴
۴.۳ شکل تابع نرخ خطر توزیع جی شکل ۹۳
۵.۳ شکل تابع نرخ خطر توزیع وایبل تعمیم یافته ۹۴
۶.۳ شکل تابع نرخ خطر در مثال ۶.۳ ۹۶

۱.۴ بررسی خاصیت IFR و $IGFR$ در توزیع گاما با $k=$ ۰/۱ ۹۹
۲.۴ بررسی شکل توابع $r(x)$ و $g(x)$ در مثال ۴.۳ ۱۰۰
۳.۴ بررسی خاصیت $IGFR$ در مثال ۳.۴ ۱۰۵

۴.۴ بررسی خاصیت $IGFR$ برای متغیرهای تصادفی X و W در مثال ۴.۴ . . . . ۱۰۶
۵.۴ بررسی خاصیت $IGFR$ در مثال ۵.۴ . . . . ۱۰۷
۶.۴ بررسی خاصیت $MTFR$ در مثال ۲.۴ . . . . ۱۱۷

لیست جداول

۱.۱ روابط بین توابع $f(x)$، $F(x)$، $R(x)$، $r(x)$ و $m(x)$ در حالت گسسته ۱۱
۲.۱ روابط بین اندازه های قابلیت اعتماد در حالت پیوسته ۱۵
۳.۱ اندازه‌های قابلیت اعتماد برخی از توزیع‌ها ۱۹
۴.۱ تابع نرخ خطر برخی از توزیع‌های گسسته ۲۰

۱.۲ برخی توزیع‌های متعلق به خانواده کاتز تعمیم‌یافته ۴۲
۲.۲ روابط بین رده توزیع‌های گسسته و پیوسته ۵۱

۱.۳ بررسی شکل توابع $\eta(x)$ و $r(x)$ برای توزیع $EGIG$ ۸۷
۲.۳ معرفی نماد برخی از توزیع‌ها ۸۸
۳.۳ تابع چگالی و نرخ خطر برخی از توزیع‌ها ۸۹
۴.۳ تابع $\eta(x)$ برای توزیع GG، GB۱ و GB۲. ۹۱
۵.۳ شکل تابع نرخ خطر در توزیع GG . ۹۲

۱.۵ تعاریف ارائه شده برای رده توزیع‌های $MNBU$ ۱۳۷

نمادها

$f(.)$	Probability density (mass) function	تابع چگالی (جرم) احتمال
$F(.)$	Distribution function	تابع توزیع
$R(.)$	Reliability function	تابع بقا
$r(.)$	Failure rate function	تابع نرخ خطر
$H(.)$	Cumulative hazard rate function	تابع مخاطره تجمعی
$MRL(.) = m(.)$	Mean residual life function	تابع میانگین باقیمانده عمر
$\rho(.)$	Reversed failure rate function	تابع نرخ خطر معکوس
X_w	Waiting time	زمان سپری شده از شکست
$m_w(.)$	Mean Waiting time	میانگین زمان سپری شده از شکست
IFR (DFR)	Increasing (Decreasing) failure rate	نرخ خطر صعودی (نزولی)
$IFRA$ $(DFRA)$	Increasing (Decreasing) failure rate in average	میانگین نرخ خطر صعودی (نزولی)
NBU (NWU)	New better (worse) than used	نو بهتر (بدتر) از کهنه
$NBUE$ $(NWUE)$	New better (worse) than used in expectation	امید نو بهتر (بدتر) از کهنه
$DMRL$ $(IMRL)$	Decreasing (Increasing) mean residual life	میانگین باقیمانده عمر نزولی (صعودی)
$HNBUE$ $(HNWUE)$	Harmonically new better (worse) than used in expectation	امید هماهنگی نو بهتر (بدتر) از کهنه
$NBUFR$ $(NWUFR)$	New better (worse) than used in failure rate	نو بهتر (بدتر) از کهنه در نرخ خطر
$NBUFRA$ $(NWUFRA)$	New better (worse) than used in failure rate average	میانگین نو بهتر (بدتر) از کهنه در نرخ خطر
$NBUC$ $(NWUC)$	New better (worse) than used in convex ordering	نو بهتر (بدتر) از کهنه در ترتیب محدب
$\hat{F}_w(.)$	Weighted distribution function	تابع توزیع وزنی
$L(.)$	Lorenz curve	منحنی لورنتس
$g(.)$	Generalized Failure rate function	تابع نرخ خطر تعمیم یافته
$IGFR$ $(DGFR)$	Increasing (Decreasing) generalized failure rate	نرخ خطر تعمیم یافته صعودی (نزولی)
$\leq_{disp}$	Dispersive order	ترتیب متفرق کننده
$\leq_{*}$	Star order	ترتیب ستاره
$\leq_{icv}$	Increasing concave order	ترتیب مقعر صعودی
$\leq_{icx}$	Increasing convex order	ترتیب محدب صعودی
$MTBF$	Mean time between failure	میانگین زمان مورد انتظار اولین خرابی
$MTFR$	Mean time to failure with replacement	میانگین باقیمانده با جایگذاری
$F(.,.)$	Bivariate distribution function	تابع توزیع دومتغیره
$R(.,.)$	Bivariate reliability function	تابع بقا دومتغیره
$MIFR$ $(MDFR)$	Multivariate increasing (decreasing) failure rate	نرخ خطر صعودی (نزولی) چندمتغیره
$MIFRA$	Multivariate increasing failure rate in average	میانگین نرخ خطر صعودی چند متغیره
$MNBU$	Multivariate new better than used	نو بهتر از کهنه چند متغیره
$MNBUE$	Multivariate new better than used in expectation	نو بهتر از کهنه در میانگین چند متغیره

$MDMRL$	Multivariate decreasing mean residual life	میانگین باقیمانده نزولی چندمتغیره
$C(.,.)$	Copula function	تابع مفصل

فصل ۱

مروری بر مفاهیم قابلیت اعتماد در توزیع‌های پیوسته و گسسته

۱.۱ مقدمه

شیوه‌های ارزیابی قابلیت اعتماد از نظر تاریخچه پیدایش به صنایع هوافضا و کاربردهای نظامی برمی‌گردد ولی این مقوله به سرعت توسط سایر صنایع مانند صنایع هسته‌ای، فولاد و صنایع شیمیایی که هر ساعت از توقف آنها به علت نقص فنی موجب خسارات بزرگ مالی، جانی و آلودگی محیط زیست می‌شود مورد توجه قرار گرفت.

نظریه قابلیت اعتماد را می توان بعنوان زیر مجموعه‌ای از نظریه کنترل کیفیت در نظر گرفت. در قابلیت اعتماد مشخصه مورد بررسی، از نوع مرتبط با سنجش ابعاد مانند طول و عرض یک جسم یا دستگاه نبوده و درنتیجه دسترس پذیر نمی باشد و هدف بررسی طول عمر کالای مورد نظر است. اولین مطالعه اصولی حدود صد سال پیش در رابطه با افزایش طول عمرقطعات خطوط راه آهن انجام گرفت که نتیجه آن معرفی سیستم های با اجزای موازی و با اجزای ذخیره بود که در آن زمان به عنوان یك پیشرفت قابل ملاحظه محسوب می شد.بعضی شروع قابلیت اعتماد را از اواخر دهه ۱۹۲۰ میدانند، چون در آن زمان بود که کنترل کیفیت آماری که بسیار نزدیک به قابلیت اعتماد است به صورتی علمی پایه گذاری شد. بعضی هم نقطه شروع واقعی تاریخ قابلیت اعتماد را انتشار گزارش AGREE[۱] می‌دانند. این گروه در سال ۱۹۵۲ باکوشش مشترک وزارت دفاع و صنایع الکترونیک آمریکا به وجود آمد و در سال ۱۹۵۷ گزارش فوق را ارایه داد. این گزارش قابلیت اعتماد را تعریف کرد و روش های اندازه گیری آن را بیان نمود و نیز نشان داد که می توان آن را در صنایع الکترونیک

[۱] Advisory Group on Reliability of Electronic Equipment

هدف قرار داد و می توان به آن هدف رسید. اولین مجله مربوط به قابلیت اعتماد نیز در سال ۱۹۶۹ با عنوان قابلیت اعتماد و کنترل کیفیت آماری منتشر گردید.

اولین دفعاتی که مساله شانس در طراحی ابزار مهندسی مطرح گردید، زمان جنگ جهانی دوم بود. در واقع نخستین مدل پیش بینی کننده قابلیت اعتماد توسط فون براون[۲] در آلمان در ارتباط با پروژه های موشکی، ارائه گردید. در دهه ۱۹۴۰ نظریه احتمال برای محاسبه توان سیستم های الکتریسیته به منظور تامین برق قابل اعتماد مصرف کنندگان مورد استفاده قرار گرفت. قابلیت اعتماد به عنوان شاخه ای از مهندسی در ایالات متحده به خصوص درصنایع الکترونیك در دهه ۱۹۵۰ متولد گردید. در این دهه افزایش پیچیدگی سیستم های الکترونیکی به خصوص تجهیزات نظامی به عنوان عامل مهمی در کاهش در دسترس بودن قطعات وافزایش هزینه های تعمیراتی آنها در رابطه با هزینه تشخیص خرابی، هزینه تعمیرکار ماهرو ... به حساب می آمد. دهه ۱۹۶۰ شاهد هجوم تکنیك های جدید قابلیت اعتماد و کاربرد های وسیع آن می باشد. اولین مطالعه‌ی مشروح روی تاثیرشکست قطعات روی کارکرد سیستم ها و ایمنی استفاده از آنها انجام گرفت و موجب شروع بکارگیری نتایج درصنایع هوایی به خصوص سفینه های فضایی گردید. اوج به کار گیری روشهای قابلیت اعتماد در ارتباط با مسائل ایمنی ، در این دهه می باشد. در این دهه نخستین نشریه علمی در این زمینه، توسط مهندسین برق و الکترونیك منتشر گردید[۳].

یک سوال اساسی که ذهن مدیران و مسئولین فنی را به خود مشغول کرده است این است که قابلیت اعتماد سیستم در طول عمرکاری آینده‌اش به چه میزان است که پاسخ آن را می‌توان توسط قابلیت اعتماد تا حدودی بیان نمود.

کتاب‌ها و مقالات بسیاری در زمینه قابلیت اعتماد و رده توزیع‌های مختلف در قابلیت موجود است که از آن جمله می‌توان به بارلو و پروشان[۴](۱۹۸۱)، لای و سای[۵](۲۰۰۶)، فینکنشتاین[۶](۲۰۰۸) ، مارشال و الکین[۷](۲۰۰۷)، شیکد و همکاران[۸](۱۹۹۵) اشاره کرد. در این فصل علاوه بر معرفی توابع مقدماتی از قابلیت اعتماد بر اساس منابع معرفی شده، به کاربردهایی از آن نیز اشاره خواهیم کرد.

---

[۲] Von Broun

[۳] IEEE Transactions on Reliability

[۴] Barlow and Proschan

[۵] Lai and Xie

[۶] Finkelstein

[۷] Marshall and Olkin

[۸] Shaked

۲.۱ آشنایی با توابع قابلیت اعتماد

توابع متفاوتی در قابلیت اعتماد مورد استفاده قرار می‌گیرند که در این بخش با برخی از آنها مانند تابع بقا[۹]، نرخ خطر[۱۰]، میانگین زمان شکست[۱۱]، میانگین باقیمانده عمر[۱۲] در حالت پیوسته و گسسته آشنا می‌شویم.
پیش از اینکه به معرفی توابع فوق بپردازیم، ابتدا تعریف تابع مطلقا پیوسته را که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرد را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ که $0 \leq a \leq b \leq \infty$ ، مطلقا پیوسته می‌باشد هرگاه برای هر مقدار مثبت ϵ ، $\delta > 0$ ای وجود داشته باشد به طوریکه برای زیردنباله‌های مجزای $[x_k, y_k] \quad ; k = 1, 2, \cdots, n$ که در شرط

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k| < \delta,$$

صدق می‌کنند، داشته باشیم:

$$\sum_{k=1}^{n} |g(y_k) - g(x_k)| < \epsilon.$$

۱.۲.۱ تابع بقا

اولین تعریفی که در قابلیت اعتماد با آن مواجه می‌شویم، تابع قابلیت اعتماد است. بسیاری از توابعی که در ادامه معرفی می‌گردند را می‌توان بر اساس این تابع بیان نمود.

حالت پیوسته:

فرض کنید متغیر تصادفی نامنفی پیوسته X طول عمر یک قطعه باشد که دارای تابع توزیع F و تابع چگالی f باشد که در این صورت می‌توان نوشت،

$$F(x) = \begin{cases} P(X \leq x) = \int_0^x f(t)dt & \text{اگر} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{اگر} \quad x < 0. \end{cases} \qquad (۱.۱)$$

تعریف ۲.۲.۱. برای متغیر تصادفی نامنفی پیوسته X تابع نامنفی R را که در آن

$$R(x) = 1 - F(x) = \int_x^{\infty} f(t)dt, \qquad (۲.۱)$$

[۹] Survival function

[۱۰] Hazard rate

[۱۱] Mean time to failure (MTTF)

[۱۲] Mean residual life (MRL)

تابع قابلیت اعتماد یا تابع بقا گوییم. اگر تابع $F_X(.)$ مطلقا پیوسته باشد، آنگاه تابع چگالی متغیر تصادفی X وجود دارد و $f_X(x) = -R'_X(x)$. در واقع $R(x)$ احتمال عدم وقوع خرابی در بازه $(0, x]$ را نشان می‌دهد. همانند تابع توزیع می‌توان خواص چهارگانه تابع بقاء متغیر تصادفی X را به صورت زیر بیان نمود:

۱. $0 \leq R(x) \leq 1$ ؛ $\forall x \geq 0$.

۲. $R_X(0) = 1$ و $R(\infty) = \lim_{x\to\infty} R(x) = 0$.

۳. $R(x)$ تابعی یکنوا و غیر صعودی است.

۴. $R(x)$ تابعی از چپ پیوسته است.

حالت گسسته:

در حالت گسسته تعریف تابع قابلیت اعتماد به دو صورت معرفی شده است که در ادامه تعریف ۳.۲.۱ را ملاک تعاریف بعدی قرار داده و از آن استفاده می‌کنیم. با تبدیل انتگرال به سیگما، تعریف زیر برای متغیرهای تصادفی گسسته حاصل می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. تابع بقا در حالت گسسته که احتمال سالم بودن قطعه در زمان x را نشان می‌دهد و

$$\begin{aligned} R(x) &= P(X \geq x) \\ &= \sum_{i=x}^{\infty} P(X = i) \\ &= \sum_{i=x}^{\infty} f(i), \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

تعریف می‌گردد که $R(0) = 1$. تابع بقا را می‌توان روی تمام اعداد حقیقی مثبت نیز تعمیم داد:

$$R(t) = R(x); \quad 0 \leq x \leq t < x + 1, \quad t \in [0, \infty). \tag{۴.۱}$$

۲.۲.۱ تابع نرخ خطر

تابع نرخ خطر به دلیل تعبیر احتمالی که در تعریف آن نهفته است و در ادامه آن را بیان می‌کنیم، از اهمیت بالایی در قابلیت اعتماد برخوردار است. به عنوان مثال، استیفنسون[۱۳] (۱۹۳۰) در علم بیمه از این تابع تحت عنوان شدت میرایی نام برده است.

[۱۳] Steffensen

حالت پیوسته:

فاصله زمانی $(x, x+\Delta x]$ را در نظر می‌گیریم. احتمال خرابی قطعه در این فاصله به شرط اینکه در بازه $(0, x]$ خرابی اتفاق نیفتاده باشد عبارتست از،

$$\begin{aligned} P(x < X < x+\Delta x | X > x) &= \frac{P(x < X < x+\Delta x)}{P(X > x)} \\ &= \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{R(x)}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

تعریف ۴.۲.۱. با تقسیم رابطه (۵.۱) بر در فاصله زمانی به طول $\Delta x > 0$ وقتی که $\Delta x \to 0$، تابع نرخ خطر حاصل می‌شود و آن را با $r(t)$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر،

$$\begin{aligned} r(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{R(x)} \\ &= \frac{f(x)}{R(x)}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

تابع مخاطره تجمعی [14] با انتگرال گیری از رابطه (۶.۱) حاصل می‌شود.

$$H(x) = \int_0^x r(t)dt = -\log R(x). \tag{7.1}$$

حالت گسسته:

نرخ خطر گسسته اولین بار توسط بارلو و همکاران[15](۱۹۶۳) معرفی گردید و مورد توجه نویسندگان دیگری چون کمپ[16](۲۰۰۴) قرار گرفت.

تعریف ۵.۲.۱. تابع نرخ خطر گسسته $r(x)$ را اینگونه می‌توان بیان نمود که

$$\begin{aligned} r(x) &= P(X = x | X \geq x) \\ &= \frac{P(X = x)}{P(X \geq x)} \\ &= \frac{f(x)}{R(x)}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

[14] Cumulative hazard rate

[15] Barlow

[16] Kemp

و یا به طور معادل،

$$r(x) = \frac{R(x) - R(x+1)}{R(x)}. \tag{9.1}$$

در حقیقت در حالت گسسته می‌توان تابع نرخ خطر را به صورت دنباله عددی $\{r(x)\}_{x>0}$ در نظر گرفت. بدیهی است که این دنباله نامنفی و کمتر از یک است. با کمی محاسبات و استفاده از استقراء، شیکد و همکاران (۱۹۹۵) نشان دادند که،

$$\forall x \in \{1, 2, ...\}; \quad R(x) = \prod_{i=1}^{x-1}(1 - r(i)); \quad R(1) = 1; \tag{10.1}$$

همچنین با توجه به اینکه $f(0) = r(0)$، داریم،

$$\begin{aligned} \forall x \in \{1, 2, ...\}; \quad f(x) &= R(x) - R(x+1) \\ &= \prod_{i=0}^{x-1}(1 - r(i)) - \prod_{i=0}^{x}(1 - r(i)) \\ &= r(x)\prod_{x=0}^{x-1}(1 - r(i)). \end{aligned} \tag{11.1}$$

از آنجایی که نرخ خطر به طور کامل توزیع متغیر تصادفی طول عمر را مشخص می‌کند، سالویا و بولینگر[17] (۱۹۸۲) شرط لازم و کافی برای اینکه دنباله $\{r(x)\}_{x\geq 0}$ نرخ خطر باشد را به صورت زیر بیان کردند:

- در صورتی که توزیع طول عمر روی مجموعه متناهی $\{1, 2, ...m\}$ تعریف شده باشد، $\{r(x)\}_{x\geq 0}$ دنباله نرخ خطر است اگر و فقط اگر $r(m) = 1$, $\forall x < m; 0 < r(x) < 1$.

- وقتی توزیع بقا روی $N = 1, 2, ...$ تعریف شده باشد، دنباله $\{r(x)\}_{x\geq 0}$ دنباله نرخ خطر است اگر و فقط اگر

$$\forall x \in N, \quad r(x) \in [0, 1), \sum_{i=1}^{\infty} r(i) = \infty, \qquad .$$

مانند حالت پیوسته، تابع

$$H(x) = \sum_{i=1}^{x} r(i). \tag{12.1}$$

[17] Salvia and Bollinger

را می‌توان به عنوان تابع مخاطره تجمعی متغیر تصادفی گسسته X در نظر گرفت. اگر $\{r(x)\}_{x\geq 0}$ دنباله‌ای با مقادیر کوچک باشد، با توجه به بسط تیلور تابع $exp(.)$ که در رابطه (۱۰.۱) ظاهر می‌شود، تقریب زیر حاصل می‌شود:

$$R(x) \approx \exp\{-(r(1) + ... + r(x-1))\} = \exp\{-H(x-1)\}. \qquad (۱۳.۱)$$

۳.۲.۱ میانگین زمان شکست

مقایسه دو متغیر تصادفی طول عمر بر اساس توابع نرخ خطر آنها امکان‌پذیر نیست چرا که نمودار این توابع ممکن است همدیگر را قطع کنند. از این‌رو به دنبال معیاری هستیم تا بتوانیم دو متغیر طول عمر را مورد مقایسه قرار دهیم. یکی از این معیارها می‌تواند میانگین باقیمانده عمر و یا در حالت خاص میانگین زمان شکست باشد. از سوی دیگر این سوال اساسی ممکن است پیش بیاید که یک دستگاه که تا زمان x عمر کرده است، به طور متوسط تا چه زمانی به کارش ادامه می‌دهد؟ میانگین باقیمانده عمر پاسخگوی این سوال می‌باشد.

حالت پیوسته:

این مشخصه همانند تعریف عادی امید ریاضی قابل محاسبه می‌باشد.

تعریف ۶.۲.۱. میانگین زمان شکست m برای متغیر تصادفی طول عمر X، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$MTTF = m = E(X) = \int_0^\infty xf(x)dx. \qquad (۱۴.۱)$$

رابطه (۱۴.۱) را می‌توان بر حسب تابع بقا نیز بیان نمود. اگر $MTTF < \infty$، آنگاه:

$$\begin{aligned} MTTF &= \int_0^\infty xf(x)dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^x f(t)dtdx \\ &= \int_0^\infty R(x)dx. \end{aligned} \qquad (۱۵.۱)$$

هنگامی که یک قطعه تا زمان x کار کرده باشد ممکن است این سوال پیش آید که به طور متوسط این قطعه چقدر دیگر کار می‌کند؟ برای پاسخ به این سوال معیار دیگری را تحت عنوان میانگین باقیمانده عمر در زمان x ($MRL(x)$) به صورت زیر ارائه نموده و آن را با $m(x)$ نشان می‌دهیم:

$$MRL(x) = m(x) = E(X - x|X > x). \qquad (۱۶.۱)$$