بسم الله الرحمن الرحیم

۱۰۷۵۸۳

# دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

بخش ریاضی


پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

---

## مقدمه ای بر برنامه ریزی خطی دو سطحی

---


**استاد راهنما:**

دکتر محمدعلی یعقوبی

**مؤلف:**

مهدی معماری




بهمن ماه ۱۳۸۶

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

**بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و کامپیوتر**

**دانشگاه شهید باهنر کرمان**

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : مهدی معماری

استاد راهنما : دکترمحمدعلی یعقوبی

داور ۱ : دکتر ماشاالله ماشین چی

داور ۲ : دکترمحمودمحسنی مقدم

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکترسید ناصر حسینی

**تقدیم به :**

پدر و مادر عزیزتر از جانم

و برادر و خواهران مهربانم

## تشکر و قدردانی

حمد و سپاس پروردگار بلند مرتبه را که به من توفیق تحصیل عنایت فرمود، که اگر پرتوی فضل او نبود هرگز موفق به انجام این مهم نمی شدم. ابتدا لازم می دانم از مرحوم پدرم و مادرعزیزم که من را همواره با صبر و دلسوزی مورد مهر و حمایت خود قرار دادند، تشکر کنم و همچنین از خواهرانم و برادرم که شادی بخش و مایه‌ی دلگرمی من هستند نیز سپاسگزارم و از خدای بزرگ برای آنان سلامتی و سعادت طلب می کنم.

از استاد ارجمند و مهربانم جناب آقای دکتر محمدعلی یعقوبی به عنوان یک استاد کامل به خاطر راهنمایی های ارزنده و دقت نظر فوق العاده‌ی ایشان در تمام امور و صبر و حوصله‌ای که صرف این پایان‌نامه کردند، کمال تشکر و قدردانی را دارم و امیدوارم سایه‌ی ایشان همواره بر سر ما دانشجویان باشد. از اساتید عالی مقام جناب آقای دکتر ماشین‌چی و جناب آقای دکتر محسنی مقدم که دعوت و داوری این پایان نامه را پذیرفتند نیز بسیار سپاسگزارم. توفیق روزافزون ،سلامتی و سعادت همه‌ی اساتید بزرگوار را از خداوند متعال خواستارم.

در پایان لازم می دانم از زحمات شبانه روزی خانم مرجان کمالی‌فر بخاطر تایپ پایان‌نامه اینجانب تشکر کنم و از خداوند برای ایشان طلب سلامتی، موفقیت و خوشبختی می کنم.

# چکیده

مسائل برنامه ریزی خطی دو سطحی، نوعی تعمیم از مسائل برنامه ریزی خطی می باشند و به علت اهمیت موضوع، سالهاست که نظر محققین بسیاری را به خود جلب کرده اند. در حقیقت، مسائل برنامه ریزی دو سطحی مسائل بهینه سازی سلسله مراتبی هستند که در هر مرتبه یک تصمیم گیرنده وجود دارد و هر تصمیم گیرنده بدنبال بهینه کردن تابع هدف خود می باشد.

الگوریتمهای بسیاری برای حل انواع مختلف این دسته از مسائل بوجود آمده است که در این پایان نامه برخی از آنها بررسی می شوند. برای این منظور ابتدا در فصل اول مفاهیم اولیه لازم از برنامه ریزی خطی و روش سیمپلکس مطرح می شود. سپس در فصل دوم مسأله برنامه ریزی خطی دو سطحی، تعاریف و قضایای مربوطه و الگوریتمهایی برای حل این دسته از مسائل در حالتی که متغیرهای تصمیم گیری پیوسته باشند، بیان می شوند. در فصل سوم، مسأله برنامه ریزی خطی دو سطحی با متغیرهای گسسته، انواع رایج آن و الگوریتمهای موجود برای حل آنها بهمراه یک مثال کاربردی از این نوع مسائل مطرح می شود. سرانجام در فصل چهارم مفهوم جواب بهینه کارا برای یک مسأله برنامه ریزی خطی دو سطحی و نحوه محاسبه آن مورد بررسی قرار می گیرد.

از حمایتهای مالی قطب جبر خطی و بهینه سازی دانشگاه شهید باهنر کرمان تشکر و قدردانی می نمایم.

# فهرست

عنوان صفحه

## فصل اول: مقد مه ای بر برنامه ریزی خطی



## فصل دوم: برنامه ریزی خطی دو سطحی

## فصل سوم: برنامه ریزی خطی دو سطحی با متغیر های گسسته



## فصل چهارم: جواب های کارا برای مسائل برنامه ریزی خطی دو سطحی

# فصل اول

## مقدمه ای بر برنامه ریزی خطی

## ۱ـ۱ مقدمه

مسائل برنامه ریزی بـه کاربردهـای کارآمـد یـا تخـصیص منـابع محـدودی بـرای نیـل بـه هـدفهای دلخواهی مربوط می شوند. این مسائل معمولاً شـامل تعـداد زیـادی جـواب هـستند کـه در شـرایط بنیادی آن مسأله صدق می کنند. انتخاب یک جواب ویژه به عنوان بهترین جواب برای یک مـساله به مقصود و یا هدف اصلی که در بیان مساله منظور شده، بستگی دارد. جوابی کـه هـم در شـرایط مسأله صدق می‌کند و هم هدف مورد نظر را برآورده نماید یک جواب بهینه نامیده می‌شـود. یـک دسته بسیار خاص از مسائل برنامه ریزی، مسائل برنامه ریزی خطی نامیده می‌شوند [ ۲۹ ] و [۳۰]. برنامه‌ریزی خطی اصولاً با بهینه‌سازی (بیشینه‌سازی یا کمینه‌سازی ) یک تابع خطی تحـت تعـدادی محدودیت بصورت معادله یا نامعادله ریاضی سروکار دارد. مسأله برنامه‌ریـزی خطـی ابتـدا توسـط جرج دانتزیک[۱]، در حدود سال ۱۹۴۷ زمانی که به عنوان مـشاور ریاضـی اداره بازرسـی و نظـارت نیروی هوایی ایالات متحده خدمت می کرد، ابداع شد. نیروی هوایی طرح‌ها و برنامه‌های خـود را که باید اجرا می‌شد با عنوان «برنامه‌ها» نام می‌برد، به همین خاطر دانتزیک اولـین مقالـه ای کـه بـه چاپ رساند این مسأله را با عنـوان «برنامـه ریـزی بـا سـاختار خطـی» مطـرح کـرد [ ۲۸ ]. در واقـع اصطلاح برنامه ریزی خطی در تابستان ۱۹۴۸ توسط کوپمنز[۲] اقتصاد دان و ریاضی دان ابداع شد.

۱- G. B. Dantzing
۲ - T. C. Koopmans

در سال ۱۹۴۹ جرج دانتزیک «روش سیمپلکس» را برای حل برنامه های خطی به چاپ رساند. از آن زمان به بعد افراد زیادی به روشهای بسیار متعددی از جمله بسط و توسعه نظری، دیدگاه محاسباتی و به کارگیری کاربردهای جدید آن، در این حوزه وارد شده اند. روش سیمپلکس به دلایل زیر در برنامه ریزی خطی کاربردهای وسیعی یافته است :

- توانایی مدل بندی مسائل مهم و پیچیده مدیریتی.
- توانمندی حل مسائل در مدت زمان معقول.

در بخش های بعدی این فصل مدل برنامه ریزی خطی، روش سیمپلکس برای حل مسائل برنامه ریزی خطی و شرایط بهینگی یک مساله برنامه ریزی خطی بحث خواهند شد. در پایان برنامه‌ریزی با اعداد صحیح و روش شاخه و کران مطرح خواهند شد.

## ۱ـ۲ مدل برنامه ریزی خطی و فرضیات آن

هر مساله برنامه ریزی خطی را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$
\begin{aligned}
&\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
&s.t. \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\
&\qquad x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0.
\end{aligned}
\tag{۱-۱}
$$

در مدل (۱ـ۱)، $z$ تابع هدف (تابع معیار) است که باید بهینه شود و ضـرایب $c_1,c_2,\ldots,c_n$ ضـرایب هزینه بوده که اعداد معلوم و مشخصی می‌باشند. $x_1,x_2,\ldots,x_n$ متغیرهای تصمیم گیری (متغیرهـای ساختاری یا سطوح فعالیت) هستند که بایـد مقـدار آنهـا تعیین شـود. نامساوی $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ ، iامین محدودیت (شرط ساختاری یا فنی) را نشان می‌دهد و ضرایب $a_{ij}$ بـه ازای $i=1,2,\ldots,m$ و $j=1,2,\ldots,n$ را ضـرایب فنـی مـی‌نامنـد کـه ایـن ضـرایب، مـاتریس فنـی (تکنولـوژی) A را بصورت زیرتشکیل می‌دهند:

$$
A = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{12} & \ldots & a_{2n} \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{bmatrix}.
$$

بردار ستونی که i امین مولفه اش $b_i$ است، بردار سمت راست نامیده می شود که حداکثر مقدار قابل دسترس را برای برقراری تساوی i امین محدویت نشان می دهد. محدودیت های $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ را محدودیت های نامنفی بودن متغیر ها یا بطور اختصار محدودیت‌های نامنفی می‌نامند.

**تعریف ۱-۲-۱ :** یک بردار $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ که مؤلفه های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ آن در تمام محدودیت ها صدق می کند، یک جواب شدنی یا بردار شدنی نامیده می شود. مجموعه تمام جواب های شدنی، ناحیه شدنی یا فضای شدنی را تشکیل می‌دهند که با $X$ نشان داده می‌شود.

شایان ذکر است که برنامه‌ریزی خطی ممکن است از نوع بیشنه سازی یا کمینه سازی باشد. قیود می توانند از نوع $\leq$ ، $=$ یا $\geq$ باشند و متغیر ها ممکن است نامنفی و یا در علامت نامقید باشند. در واقع یک مسأله برنامه ریزی خطی می تواند با یک سری تبدیلات ساده از یک شکل به شکل دیگری تبدیل شود که این تبدیلات در زیر توضیح داده می شوند.

- **تبدیل نامساوی‌ها به تساوی‌ها و برعکس**

یک نامساوی می تواند به سادگی به تساوی تبدیل شود. مثلاً محدودیت $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ می‌توانـد با کم شدن متغیر مازاد یا کمکی $s_i$ به معادله $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i$ تبدیل شود بطوری که $s_i \geq 0$ می باشد. به همین طریق محدودیت $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ با اضافه کردن متغیر کمبود $s_i$ معادل است بـا $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i$ و $s_i \geq 0$. همچنین یک تساوی به شکل $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ در صـورت نیـاز می تواند به دو نامساوی $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ و $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ تبدیل شود.

- **تبدیل متغیرها به متغیرهای نامنفی**

در بیشتر مسائل عملی معمولا متغیرها نامنفی می باشـند و روش سـیمپلکس هـم بـرای حـل مـسائل برنامه ریزی خطی که متغیرهای نامنفی دارند طراحی شده است. ولی اگر متغیر $x_j$ منفـی باشـد آن وقت می توان آن را با متغیـر $x'_j = -x_j$ کـه $x'_j \geq 0$ مـی باشـد جـایگزین کـرد. اگـر متغیـر $x_j$ دارای قیـد علامـت نباشـد آن وقـت مـی تـوان آن را بـا $x'_j - x''_j$ کـه در آن $x'_j \geq 0, x''_j \geq 0$، جایگزین کرد. حتی اگر $x_j \geq l_j$ باشد آنگاه با تغییر متغیر $x'_j = x_j - l_j$، $x_j \geq l_j$ بـه $x'_j \geq 0$ تبدیل مـی‌شـود. همچنین اگـر $x_j \leq u_j$ باشـد آنگـاه بـا تغییـر متغیـر $x'_j = u_j - x_j$، $x_j \leq u_j$

به $x'_j \geq 0$ تبدیل می‌شود. در نتیجه اگر متغیری منفی، نامقید و یا کرانـدار باشـد بـا تغییـرات فـوق می‌توان آن را به شکل یک متغیر نامنفی در آورد.

**• تبدیل مسأله کمینه‌سازی به بیشینه‌سازی**

هر مسأله کمینه‌سازی را می‌توان به صورت زیر به یک مسأله بیشینه‌سازی تبدیل کرد و بر عکس:

$$\min\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \max\ -z=\sum_{j=1}^{n} -c_j x_j\ .$$

**• فرم‌های متعارفی و استاندارد مسأله برنامه‌ریزی خطی و تبدیل آنها به یکدیگر**

با توجه به مطالب گفته شده در بالا هر مسأله برنامه ریزی خطی بـا تغییـرات مناسـب مـی توانـد بـه فرم‌های متفاوت و معادل تبدیل شود که دو فرم استاندارد و متعارفی آن بسیار مفید می‌باشند. یـک برنامه خطی زمانی به فرم استاندارد می‌باشد که تمام محدودیتهای آن از نوع تساوی (معادله) بـوده و همه متغیرهای تصمیم‌گیری آن به صورت نامنفی باشند. این فرم از مسأله برنامـه‌ریـزی خطـی در روش سیمپلکس بکار برده می‌شود. در ضـمن در ایـن فـرم نـوع مـسأله مـی‌توانـد بیـشینه‌سـازی یـا کمینه‌سازی باشد.

یک مـسأله کمینـه‌سـازی زمـانی بـه فـرم متعـارفی اسـت کـه همـه متغیرهـا در آن نـامنفی و همـه محدودیت‌های آن از نوع $\geq$ باشند. همچنین یک مسأله بیشینه‌سازی بـه فـرم متعـارفی اسـت اگـر

همه متغیرها نامنفی و همه محدودیت‌های آن از نوع $\leq$ باشند. باتوجه به تبدیلاتی که در بالا بیان شد براحتی می‌توان فرم‌های استاندارد و متعارفی را به یکدیگر تبدیل کرد.

مدل برنامه ریزی خطی(۱ـ۱) را می توان با نماد ماتریسی به صورت خلاصه زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} &\max z = \boldsymbol{cx} \\ &s.t. \\ &\quad \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b} \\ &\quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{۲ـ۱}$$

که در آن $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ و $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ و $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

یک مسأله بهینه‌سازی زمانی به صورت یک مسأله برنامه ریزی خطی است که چند فرض الزامی زیر در فرمول بندی آن وجود داشته باشد.

**۱ ـ تناسب**

سهم متغیر مفروض $x_j$ در هزینه $c_j x_j$ و در i امین محدودیت $a_{ij} x_j$ است. این بدان معنی است که اگر مثلاً، $x_j$ دو برابر شود، نسبت سهمش در هزینه و در هر یک از محدودیت ها نیز دو برابر می‌شود. مثلا اگر $x_j$ مقدار فعالیت $j$ام باشد و $x_j = 5$، آن وقت هزینه آن $5c_j$ می باشد. این بدان معنی است که استفاده بیشتر از فعالیت j ام هزینه بیشتری را در بر دارد. یعنی هیچ گونه صرفه‌جویی، در آمد یا پس اندازی بر آن مترتب نیست. همچنین هیچ گونه هزینه راه اندازی برای شروع این فعالیت منظور نمی شود.

## ۲ ـ جمع پذیری

این فرض تضمین می کند که هزینه یا سود کل برابر با مجموع هزینه ها یا سودها باشد همچنین این فرض ایجاب می کند که سمت چپ هر محدودیت بصورت مجموع عبارات $a_{ij}x_j (i=1,...,m \;,\; j=1,...,n)$ باشد.

## ۳ ـ بخش پذیری

این فرض به این معنی است که متغیر های تصمیم گیری می‌توانند هر مقداری داشته باشند. حتی مجازند مقادیر ناصحیح بگیرند.

## ٤ ـ قطعیت

ضرایب $c_j, a_{ij}, b_i$، $(j=1,...,n \;;\; i=1,...,m)$ همه به طور قطعی معلوم هستند. فرض می‌شود هر عنصر احتمالی یا تصادفی که بطور ذاتی در تقاضا، هزینه، قیمت ها، منابع موجود، کاربردها و غیره وجود دارد با معادل قطعی اش با این ضرایب تقریب زده می شود.

توضیح اینکه وقتی از یک مسأله برنامه ریزی خطی برای مدل بندی یک وضعیت مفروض استفاده می شود، تشخیص برقراری فرض های مذکور از اهمیت به سزایی برخوردار است.

## ۱ ـ۳ روش سیمپلکس برای حل مسائل برنامه ریزی خطی

در بخش قبل مدل برنامه ریزی خطی معرفی شد. دراین بخش روش سیمپلکس برای حل آن مطرح می‌شود. روش سیمپلکس برای حل مسائل برنامه ریزی خطی یکی از روشهای مرسوم و سودمند می‌باشد[ ۲۹ ].

**تعریف ۱ـ۳ـ۱ :** مدل برنامه ریزی خطی (۲ـ۱) را در نظر بگیرید. جواب $x^* = (x_1^*,...,x_n^*)'$ را یک جواب بهینه برای مدل (۲ـ۱) گوییم هرگاه $\forall \; x \in X \;\; cx^* \geq cx$ .

**تعریف ۱ـ۳ـ۲ :** مجموعه $X$ در $R^n$ محدب گفته می شود هرگاه

$$\forall x_1 , x_2 \in X \quad , \; \lambda \in [0 \; , \; 1] \quad , \; \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in X \; .$$

**تعریف ۱ـ۳ـ۳ :** نقطه $x$ در مجموعه محدب $X$ نقطه رأسی گفته می شود هر گاه $x$ را نتوان به صورت ترکیب محدب اکید دونقطه متمایز در $X$ نوشت. به عبارت دیگر اگر $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ ، $\lambda \in (0 \; , \; 1)$ و $x_1$ و $x_2 \in X$ آنگاه $x = x_1 = x_2$.

**تعریف ۱ـ۳ـ٤ :** k بردار $v_1, v_2, \ldots, v_k$ در $R^n$ مستقل خطی نامیده می‌شوند، اگر $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$ $(\alpha_i \in R, i = 1,2,\ldots,k)$ آنگاه $\alpha_i = 0 \;,\; \forall i = 1,\ldots,k$.

اگر بردارها مستقل خطی نباشند آنها را وابسته خطی می گویند.

**تعریف ۱ـ۳ـ ۵ :** کمینه حداکثر سطرهای مستقل خطی و حداکثر ستون های مستقل خطی یک ماتریس، رتبه ماتریس نامیده می شود. رتبه ماتریس A با rank(A) نشان داده می شود.

**تعریف ۱ـ۳ـ٦ :** دستگاه $Ax = b$ را در نظر بگیرید (A یک ماتریس $m \times n$ و b یک بردار $m \times 1$ است). فرض کنید که $rank\ (A\ ,b) = rank(A) = m$. بعد از تغییرستونهای $A$ در صورت لزوم، فرض کنید که $A = [B,\ N]$ که در آن $\mathbf{B}$ یک ماتریس معکوس پذیر $m \times m$ و $N$ یک ماتریس $m \times (n-m)$ است. جواب $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ را که در آن $x_B = B^{-1}b$ و $x_N = 0$ یک جواب پایه ای برای دستگاه مورد نظر می گویند. اگر $x_B \geq 0$ ، آن وقت $x$ را جواب پایه ای شدنی می‌گویند، $B$ را ماتریس پایه ای، $N$ را ماتریس غیرپایه ای، مؤلفه های $x_B$ را متغیرهای پایه ای و مؤلفه های $x_N$ را متغیرهای غیر پایه ای می نامند. ضرایب سطر تابع هدف متناظر با متغیرهای $x_B$ با $c_B$ نشان داده می‌شوند.

باتوجه به تعریف ۱ـ۳ـ۶ یک جواب پایه ای برای یک دستگاه $m$ معادله $n$ مجهولی خطی، با صفر قرار دادن $n$-$m$ متغیر و سپس حل $m$ معادله حاصل بر حسب $m$ مجهول، به شرطی که جواب حاصل یکتا باشد، معین می شود . که در این حالت $n$-$m$ متغیر صفر قرار داده شده را متغیرهای غیر پایه‌ای و $m$ متغیر باقیمانده را متغیرهای پایه ای می نامند. برای یک مسأله برنامه ریزی خطی به فرم استاندارد با $m$ محدودیت و $n$ مجهول، تعداد جواب های پایه ای شدنی حداکثر $\frac{n!}{m!(n-m)!}=\binom{n}{m}$ می باشد. نکته مهم اینکه مجموعه جواب های شدنی پایه ای ومجموعه نقاط رأسی متناظر هستند. یک جواب شدنی پایه ای یک نقطه رأسی است و برعکس [ ۲۹ ] .

### خلاصه شیوه محاسباتی روش سیمپلکس

مدل برنامه‌ریزی خطی (۲ـ۱) را در نظر بگیرید. برای بکاربردن روش سیمپلکس مراحل زیر به ترتیب انجام می‌شوند.

۱ ـ ابتدا مدل به فرم استاندارد زیر تبدیل می شود.

$$
\begin{aligned}
&\max : z = \boldsymbol{cx} \\
&s.t. \\
&\quad \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Is} = \boldsymbol{b} \\
&\quad \boldsymbol{x} \geq 0 \ , \ \boldsymbol{s} \geq 0
\end{aligned}
$$