بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض (جبر)

عنوان:

گروههای متناهی با پوششهای هال

دانشجو:

حامد مولائیان

استاد راهنما:

دکتر بهروز خسروی و دکتر داریوش کیانی

استاد مشاور:

دکتر خدیجه احمدی آملی

مهر ۱۳۸۶

بسمه تعالي

دانشگاه صنعتی امیر کبیر

معاونت پژوهشی

فرم اطلاعات پایان نامه

کارشناسی ارشد و دکترا

(پلی تکنیک تهران)

تاریخ :

پیوست :

نام و نام خانوادگی :حامد مولائیان **دانشجوی آزا د** ■ **بورسیه** ☐ **معادل** ☐

شمارهٔ دانشجوئی : 84113028 **دانشکده :** ریاضی و علوم کامپیوتر **رشتهٔ تحصیلی :** ریاضی

نام و نام خانوادگی اساتید راهنما : دکتر بهروز خسروی و دکتر داریوش کیانی

عنوان پایان نامه به فارسی: گروههای متناهی با پوشش هال

عنوان پایان نامه به انگلیسی: Finite groups with Hall covering

نوع پروژه : **کارشناسی ارشد :** ■ **دکتـــــری** ☐ **کاربردی** ☐ **بنیادی** ■ **توسعه ای** ☐ **نظری** ☐

تاریخ شروع : اسفند 85 **تاریخ خاتمه :** مهر 86 **تعداد واحد :** 6

سازمان تأمین کننده اعتبار :

واژه های کلیدی به فارسی: جبر لي – گروه شوالي – زيرگروه هال – پوشش هال -گراف اول

واژه های کلیدی به انگلیسی : **Lie Algebra- Chevalley group- Hall subgroup -Hall covering - Prime graph**

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیتهای پژوهشی دانشگاه :

اساتید راهنما : دکتر بهروز خسروی و دکتر داریوش کیانی

دانشجو :

امضاء استاد راهنما : **تاریخ :**

نسخهٔ 1 : معاونت پژوهشی

نسخهٔ 2: کتابخانه و به انضمام دوجلد پایان نامه به منظور تسویه حساب با کتابخانه و مرکز اسناد و مدارک علمی

چکیـــده

برای یک گروه متناهی G، پوششهای متفاوتی می‌توان تعریف کرد. در این پایان نامه به معرفی پوشش هال برای یک گروه متناهی پرداخته ویژگیهای این پوشش بررسی و با برخی از خصوصیات گروهی که دارای پوشش هال است آشنا می‌شویم. سپس گروههایی مشخص می‌شوند که دارای π_1–هال زیرگروه هستند که در آن π_1، مولفه همبندی از گراف اول G است که شامل عدد اول ۲ است. با استفاده از آنچه به دست می‌آید در نهایت گروههایی تعیین می‌شوند که دارای یک پوشش هال هستند.

کلمات کلیدی: زیرگروه هال – پوشش هال – گراف اول – جبر لی – گروه چوالی.

فهرست مندرجات

مقدمه

اگر G گروهی متناهی باشد، گراف اول آن گرافی است که رئوس آن شمارنده‌های اول $|G|$ هستند و دو راس p و q به هم متصلند اگر و تنها اگر G دارای عضوی از مرتبه pq باشد.

زیرگروه H از گروه متناهی G را یک زیرگروه هال G گوییم در صورتی که $|H|$ و $[G:H]$ نسبت به هم اول باشند.

ثابت شده است که اگر G یک گروه متناهی حلپذیر باشد، π–هال زیرگروههای G برای هر $\pi \subseteq \pi(G)$ وجود دارد. در حالتیکه G غیرحلپذیر است، π–هال زیرگروههای G لزوما وجود ندارند. در این حالت وجود برخی از π–هال زیرگروهها اثبات شده است. به عنوان مثال اگر G یک گروه غیرحلپذیر با گراف اول ناهمبند باشد و π_i، مولفه همبندی از گراف اول G باشد که $i > ۱$، در قضیه‌ای گرونبرگ [۱] و کگل [۲] ثابت کرده‌اند که π_i–هال زیرگروههای G وجود دارند. همچنین ثابت شده است که اگر G یک گروه غیرحلپذیر و فروبنیوس باشد، متمم فروبنیوس G یک $\pi_۱$–هال زیرگروه G است که $\pi_۱$، مولفه همبندی از گراف اول G است که شامل عدد اول ۲ است.

در این پایان نامه گروههای غیرحلپذیر و غیرفروبنیوس که دارای $\pi_۱$–هال زیرگروه هستند مشخص می‌شوند. تعیین این گروهها نقشی اساسی در برآورده شدن هدف اصلی پایان نامه، که مشخص کردن گروههای دارای پوشش هال است، دارد.

یک پوشش هال برای گروه متناهی G یک مجموعه $\mathcal{H} = \{H_۱, H_۲, \cdots, H_r\}$ از زیرگروههای هال G است که:

a) $\bigcup_{i=۱}^{r} H_i = G$،

b) برای هر $i, j = ۱, ۲, \cdots, r$، $|H_i| = |H_j|$ یا $(|H_i|, |H_j|) = ۱$.

اگر مرتبه همه اعضای $\mathcal{H}$ توانی از یک عدد اول باشند، $\mathcal{H}$ یک پوشش سیلو از G نامیده می‌شود.

گروههای متناهی شامل یک پوشش سیلو، برای گروههای حلپذیر به طور مستقل توسط هیگمن[۳] [۱۴] و زاچر[۴] ([۳۸] و [۳۹])، برای G ساده توسط سوزوکی[۵] [۳۴]، و در حالت کلی تر توسط براندل[۶] [۴] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. دراین پایان نامه گروههایی تعیین می‌شوند که دارای پوشش هال هستند.

---

[۱] $Gruenberg$
[۲] $Kegel$
[۳] $Higman$
[۴] $Zacher$
[۵] $Suzuki$
[۶] $Brandl$

برای این منظور از آنجاییکه اگر G دارای پوشش هال باشد گراف اول آن ناهمبند است، از قضایای مرتبط با گروههای متناهی با گراف اول ناهمبند (مراجع [۳۷] و [۲۱]) استفاده شده، ابتدا گروههای با گراف اول ناهمبند که دارای یک $\pi_۱$–هال زیرگروه هستند مشخص می‌شوند، سپس ثابت می‌شود که اگر G دارای پوشش هال باشد دارای یک $\pi_۱$–هال زیرگروه است.

حال با استفاده ازگزاره‌های ذکر شده در بند قبل، قضیه اصلی زیر که تعیین کننده گروههایی است که دارای پوشش هال هستند اثبات می‌شود.

قضیه. اگر G گروهی باشد که گراف اول آن ناهمبند است، آنگاه G دارای پوشش هال است اگر و تنها اگر:

(i) G یک گروه فروبنیوس یا ۲–فروبنیوس باشد.

(ii) $\frac{G}{Fit(G)}$ با یکی از گروههای $\mathrm{PSL}(۲,q)$، $\mathrm{PSL}(۳,۴)$، $\mathrm{PSL}(۳,q)$ با $(۳,q-۱)=۱$، $sz(q)$، $A_۷$، $M_{۲۲}$ و $M(q)$ یکریخت باشد.

برای اثبات قضایای اصلی از قضیه رده‌بندی گروههای ساده متناهی استفاده شده است. این قضیه بیانگر این است که:

اگر G یک گروه ساده متناهی باشد، آنگاه G یکی از ساختارهای زیر را دارد:

(۱) G یک گروه دوری از مرتبه عددی اول است.

(۲) G گروه متناوب A_n است که $n \geq ۵$.

(۳) G یک گروه ساده پراکنده است.

(۴) G یک گروه ساده از نوع لی است.

همچنین در روند اثبات قضایا از مفاهیم، ساختار و قضایای گروههای ساده از نوع لی استفاده شده است. ضروری به نظر رسید که در فصل اول این پایان نامه مروری بر برخی مفاهیم و قضایای اصلی جبرهای لی و گروههای ساده از نوع لی شود. با اولویت استفاده، در این فصل از مراجع [٦]، [۷]، [۱۷]، [۱] و [۱۹] استفاده شده است.

مرجع اصلی این پایان نامه مقاله

“**Finite groups with Hall covering**”, **J. Aust. Math. Soc 78(2005), 1-17.**,

E. Jabara and M. S. Lucido

است.

همچنین مراجع زیر نقش مهمی در نگارش این پایان نامه داشته‌اند:

"**Simple groups of lie type**", **J. Willey and Sons, London, 1972.**,

R. W. Carter

"**On finite factorizable groups**", **J. Algebra 86 (1984), 522-548.**,

Z.Arad

"**Prime graph components of finite groups**", **J. Algebra 69(1981), 487-513.**,

J. S. Williams

فصل ۱

آشنایی با جبرهای لی و گروههای ساده از نوع لی

۱.۱ یادآوری

تعریف ۱.۱.۱ اگر F میدان اعداد حقیقی یا مختلط و $\mathcal{V}$ فضایی برداری روی F باشد، یک ضرب داخلی روی $\mathcal{V}$ تابعی است که به هر یک از بردارهای α و β در $\mathcal{V}$ اسکالری چون $\langle \alpha , \beta \rangle$ نسبت می‌دهد که برای هر اسکالر c در شرایط زیرصدق کند:

$$\begin{aligned} \langle . , . \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\to F \\ (\alpha , \beta) &\to \langle \alpha , \beta \rangle \end{aligned}$$

(i) $\langle \alpha + \beta , \gamma \rangle = \langle \alpha , \gamma \rangle + \langle \beta , \gamma \rangle$،

(ii) $\langle c\, \alpha , \beta \rangle = c \, \langle \alpha , \beta \rangle$،

(iii) $\langle \beta , \alpha \rangle = \overline{\langle \alpha , \beta \rangle}$،

(iv) هر گاه $\alpha \neq ۰$ داریم $۰ < \langle \alpha , \alpha \rangle$.

تعریف ۲.۱.۱ بنا بر تعریف فضای ضرب داخلی عبارتست از یک فضای برداری حقیقی یا مختلط همراه با یک ضرب داخلی مشخص روی آن فضا.

تعریف ۳.۱.۱ یک فضای ضرب داخلی حقیقی با بعد متناهی را فضای اقلیدسی می‌گوییم.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم $\mathcal{V}$ یک فضای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ باشد، یک فرم دو خطی روی $\mathcal{V}$ تابعی چو ن f است که به هر زوج مرتب از بردارهای α و β در $\mathcal{V}$ یک اسکالر $f(\alpha , \beta)$ در $\mathbb{F}$ را چنان تخصیص می‌دهد که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$f(c\alpha_1+\alpha_2\,,\beta)=cf(\alpha_1\,,\beta)+f(\alpha_2\,,\beta)$$

$$f(\alpha\,,c\beta_1+\beta_2)=cf(\alpha\,,\beta_1)+f(\alpha\,,\beta_2)$$

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم $\mathcal{V}$ یک فضای برداری با بعد متناهی و $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ پایه مرتبی برای $\mathcal{V}$ و f فرمی دوخطی روی $\mathcal{V}$ باشد. ماتریس f در پایه مرتب $\mathcal{B}$ عبارتست از ماتریس $A_{n\times n}$ با درایه‌های $A_{ij}=f(\alpha_i,\alpha_j)$.

گاهی این ماتریس با $[f]$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنیم f فرمی دو خطی روی یک فضای برداری $\mathcal{V}$ باشد، گوییم f ناتبهگون است هرگاه چنانچه به ازای هر v از $\mathcal{V}$، $f(u\,,v)=0$، آنگاه $u=0$.

قضیه ۷.۱.۱ با مفروضات فوق f نا تبهگون است اگر وتنها اگر ماتریس آن در پایه مرتبی برای $\mathcal{V}$ یک ماتریس منفرد باشد.

اثبات. رجوع کنید به [۴۳] نتیجه ۲ صفحات ۴۶۸ و ۴۶۹.

تعریف ۸.۱.۱ گوییم فرم دو خطی f بر فضای برداری $\mathcal{V}$ متقارن است هرگاه به ازای هر دو بردار α و β از $\mathcal{V}$ داشته باشیم $f(\alpha\,,\beta)=f(\beta\,,\alpha)$.

لذا فرم دو خطی f متقارن است اگر و تنها اگر ماتریس آن در یک پایه مرتب متقارن باشد.

دقت کنید بنا بر تعریف فوق اگر $\mathcal{V}$ یک فضای برداری حقیقی باشد یک ضرب داخلی روی $\mathcal{V}$ فرم دوخطی متقارنی چون f بر $\mathcal{V}$ است که اگر $\alpha\neq 0$ آنگاه $f(\alpha\,,\alpha)>0$.

یک فرم دوخطی که در رابطه فوق صدق کند مثبت معین نامیده می‌شود.

قرارداد ۹.۱.۱ از این به بعد از نماد $(,)$ به جای $\langle .\,,.\rangle$ استفاده می‌کنیم.

۲.۱ سیستم ریشه

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم $\mathcal{V}$ یک فضای اقلیدسی از بعد ℓ باشد. برای هر بردار ناصفر r از $\mathcal{V}$، w_r را نگاشتی از $\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ تعریف می‌کنیم که برای هر $s\in\mathcal{V}$، $w_r(s)$ باز تاب s نسبت به ابر صفحه عمود بر r باشد.

بنا بر تعریف فوق $w_r(r)=-r$ و $w_r(s)=s$ برای هر s که $(r\,,s)=0$. در حالت کلی

$$w_r(s)=s-\frac{2(r\,,s)}{(r\,,r)}r$$

تعریف ۲.۲.۱ یک زیر مجموعه Φ از $\mathcal{V}$ را یک سیستم ریشه در $\mathcal{V}$ گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(i) Φ یک مجموعه متناهی از بردارهای ناصفر باشد،

(ii) Φ ، $\mathcal{V}$ را تولید کند،

(iii) برای هر $r, s \in \Phi$ ، $w_r(s) \in \Phi$،

(iv) برای هر $r, s \in \Phi$، $\frac{۲(r\,,s)}{(r\,,r)}$ یک عدد صحیح باشد،

(v) اگر $r, \lambda r \in \Phi$ که $\lambda \in \mathbb{R}$، دراین صورت $\lambda = \pm ۱$.

در این حالت هر عضو Φ را یک ریشه می‌گوییم.

نکته ۳.۲.۱ شرط چهارم، زاویه بین دو عضو دلخواه از Φ را محدود می‌کند. به طور دقیق‌تر اگر r و s دو عضو دلخواه از Φ و θ زاویه بین آنها باشد، می‌دانیم که $\frac{۲(r\,,s)}{(r\,,r)}$ و $\frac{۲(r\,,s)}{(s\,,s)}$ هر دو اعدادی صحیح هستند. با توجه به اینکه $\cos\theta = \frac{(r\,,s)}{\|r\|\,\|s\|}$ داریم:

$$۲\cos\theta\frac{\|r\|}{\|s\|} \in \mathbb{Z}, \qquad ۲\cos\theta\frac{\|s\|}{\|r\|} \in \mathbb{Z} \qquad (\star)$$

بنابراین $۴\cos^۲\theta \in \mathbb{Z}$. اما $۱ \leq \cos^۲\theta \leq ۰$ و لذا $۴ \leq ۴\cos^۲\theta \leq ۰$، پس مقادیر ممکن برای $\cos^۲\theta$ یکی از اعداد ۰، $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۳}{۴}$، ۱ است.

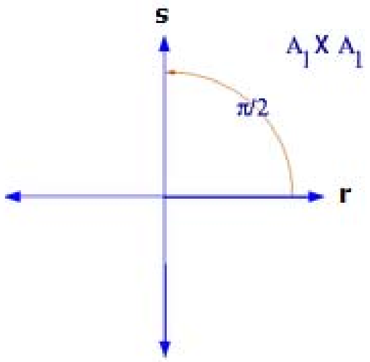
مثال ۴.۲.۱ در یک فضای اقلیدسی $\mathcal{V}$ از بعد ۱ یا ۲ سیستم ریشه‌های ممکن را می‌یابیم :

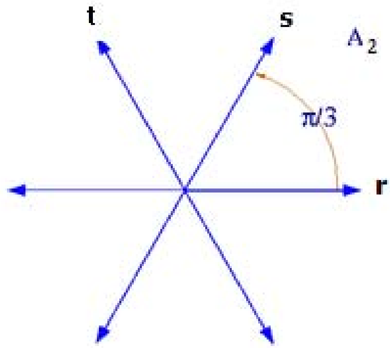
(i) $\mathcal{V}$ از بعد ۱ باشد:

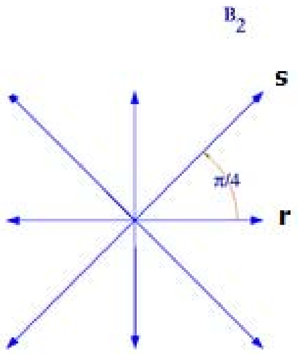
دراین حالت اگر Φ یک سیستم ریشه، α عضوی ناصفر از $\mathcal{V}$ و عضو Φ باشد، بنا بر قسمت چهارم و پنجم تعریف فوق، Φ به صو رت $\{\alpha, -\alpha\}$ است.

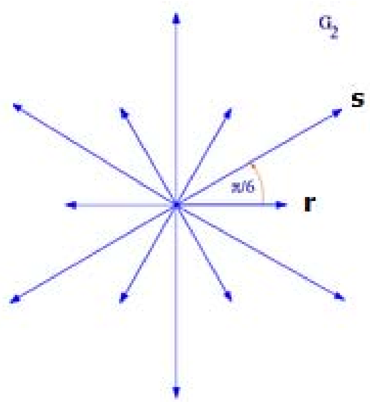
(ii) $\mathcal{V}$ از بعد ۲ باشد:

فرض کنیم Φ یک سیستم ریشه در $\mathcal{V}$ و $r \neq ۰$ عضوی ثابت از Φ باشد. برای عضو s از Φ زاویه و طول s نسبت به r را می‌یابیم. کافی است در بازه $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ این موضوع را بررسی کنیم. بنا بر ۳.۲.۱، اگر θ زاویه مورد نظر باشد داریم $\theta = ۰, \frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۲}$. حال اگر $\|s\| = k\|r\|$ که $k > ۰$، در حالت $\theta = \frac{\pi}{۲}$، k هر عددی می‌تواند باشد. بنا بر روابط $(\star)$، در بقیه حالات k مقادیر $\sqrt{۲}, \sqrt{۳}$ و ۱ را می‌گیرد. بنابراین حالات ممکن یکی از ۴ مورد زیر است:









تذکر ۵.۲.۱ توجه کنید Φ، $\mathcal{V}$ را تولید می‌کند ولی مستقل خطی نیست. البته به وضوح دارای یک پایه برای $\mathcal{V}$ است. در واقع بنا بر گزاره ۲.۱.۲ از [۶]، Φ شامل مجموعه‌ای مانند Π است که شرایط زیر را داراست:

(i) Π مجموعه‌ای مستقل خطی است.

(ii) هر عضوی از Φ یک ترکیب خطی از ریشه‌ها در Π است که ضرایب آن همه نامنفی یاهمه نامثبت هستند.

مجموعه $\Pi \subseteq \Phi$ را یک سیستم ریشه اساسی می‌نامیم، و اعضای آن را ریشه‌های اساسی می‌گوییم.

تعریف ۶.۲.۱ اگر Φ یک سیستم ریشه و Π یک سیستم ریشه اساسی در Φ باشد به مجموعه‌ای از اعضای Φ که به صورت ترکیب خطی با ضرایب نامنفی از اعضای Π هستند یک سیستم ریشه مثبت می‌گوییم و با Φ^+ نمایش می‌دهیم، به همین طریق Φ^- تعریف می‌شود و لذا $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$.

قضیه ۷.۲.۱ اگر $\Pi = \{r_۱, r_۲, \cdots, r_\ell\}$ یک سیستم ریشه اساسی در Φ باشد، برای هر $i \neq j$ داریم $(r_i, r_j) \leq ۰$.

اثبات. رجوع کنید به [٦] گزاره ۲.۱.۴

قضیه ۸.۲.۱ هر ریشه در Φ به صورت یک ترکیب خطی از ریشه‌ها در Π با ضرایب صحیح است.

اثبات. رجوع کنید به [٦] گزاره ۲.۱.٦

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنیم که Φ یک سیستم ریشه باشد. گروه تولید شده توسط تمام w_r هایی که $r \in \Phi$، را گروه ویل[1] از Φ می‌نامیم و آن را با $W(\Phi)$ نشان می‌دهیم.

تذکر ۱۰.۲.۱ گروه $W(\Phi)$ دارای چند ویژگی مهم است. اولا به وضوح برای هر $\alpha \in \Phi$ و $w \in W$ داریم $w(\alpha) \in \Phi$. در ضمن از آن جایی که Φ متناهی است W نیز متناهی است و همچنین بنا بر گزاره ۲.۱.۸ از [٦] داریم:

(i) $\Phi = W(\Pi)$،

(ii) W توسط تمام w_r هایی که $r \in \Pi$ تولید می‌شود.

مثال ۱۱.۲.۱ برای سیستم ریشه $\mathcal{A}_۲$ در ۴.۲.۱، گروه $W(\mathcal{A}_۲)$ را با توجه به شکل انتهای مثال ۴.۲.۱ می‌یابیم.

چون اثر w_i و w_{-i} برای $i = s, r, t$، روی هر عضو $\mathcal{V}$ یکسان است لذا $W(\mathcal{A}_۲) = \langle w_r, w_s, w_t \rangle$. فرض کنید $D = \langle w_r, w_s w_t \rangle$، ادعا می‌کنیم که $W(\mathcal{A}_۲) = D$. واضح است که $D \subseteq W(A_۲)$، از طرفی با توجه به شکل

$$w_s w_t = w_r w_s \Rightarrow w_s = w_r^{-۱}(w_s w_t) \Rightarrow w_s \in D$$

$$w_t w_r = w_s w_t \Rightarrow w_t = (w_s w_t) w_r^{-۱} \Rightarrow w_t \in D$$

لذا $W(\mathcal{A}_۲) = D$. از طرف دیگر $w_r^۲ = ۱$ و $(w_s w_t)^۳ = ۱$ (۱). ادعا می‌کنیم که $w_r(w_s w_t) = (w_s w_t)^۲ w_r$. زیرا بنا بر رابطه $w_s w_t = w_r w_s$ داریم

$$(w_s w_t)^۲ w_r = (w_r w_s)(w_r w_s) w_r = (w_r w_s)(w_t w_r) w_r = w_r w_s w_t \qquad (۲)$$

بنا بر روابط (۱) و (۲) گروه D، گروه دو وجهی $D_٦$ است و لذا $W(\mathcal{A}_۲)$ گروه $D_٦$ یا گروه متقارن $S_۳$ است.

[1] $Weyl$

تعریف ۱۲.۲.۱ سیستم ریشه Φ را تحویلناپذیر گوییم هرگاه نتوان Φ را به اجتماع دو زیرمجموعه از آن تجزیه کرد به طوری که هر عضو یکی بر هر عضو دیگری عمود باشد.
به عنوان مثال سیستم ریشه های $\mathcal{A}_1$،$\mathcal{A}_2$، $\mathcal{B}_2$ و $\mathcal{G}_2$ تحویلناپذیرند ولی $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ چنین نیست.

قضیه ۱۳.۲.۱ Φ تحویلناپذیر است اگر و تنها اگر Π تحویلناپذیر باشد.

اثبات. فرض کنیم Π تحویلناپذیر باشد ولی $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ که $(\Phi_1\,,\Phi_2) = 0$. اگر تمام Π مشمول در یکی از Φ_1 یا Φ_2 نباشد به تناقض با فرض می‌رسیم، پس $\Pi \subset \Phi_1$ یا $\Pi \subset \Phi_2$. در حالت اول $(\Pi, \Phi_2) = 0$. اما چون Π، $\mathcal{V}$ را تولید می کند، خواهیم داشت $(\mathcal{V}, \Phi_2) = 0$ که تناقض است،به همین طریق در حالت دوم به تناقض می‌رسیم، پس Φ تحویلناپذیراست. برعکس فرض کنیم Φ تحویلناپذیر باشد ولی $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$ که $(\Pi_1\,,\Pi_2) = 0$. بنا بر ۱۰.۲.۱:(i)، برای هر ریشه $r \in \Phi$ داریم که $s \in \Pi$ و $w \in W$ هست که $r = w(s)$. فرض کنیم $\Phi_i = \{r \in \Phi : r = w(s),\ w \in W, s \in \Pi_i\}$ دراین صورت $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$، بدون خلل به کلیت فرض کنیم $r \in \Phi_1$، بنا بر ۱۰.۲.۱:(ii)، چون W توسط تمام w_α هایی که $\alpha \in \Pi$ تولید می‌شود و در ضمن می‌دانیم که اگر $(\alpha\,,\beta) = 0$ آنگاه $w_\alpha w_\beta = w_\beta w_\alpha$، لذا α_1، $\cdots$، α_k ای از Π هست که $r = (w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_i} w_{\alpha_{i+1}} \cdots w_{\alpha_k})(s)$ که $\{\alpha_1 \cdots \alpha_i\} \subset \Pi_2$ و $\{\alpha_{i+1} \cdots \alpha_k\} \subset \Pi_2$. با توجه به رابطه $w_r(s) = s - \frac{2(r\,,s)}{(r\,,r)}r \quad (\star)$ و اینکه $s \in \Pi_1$ و $(\Pi_1\,,\Pi_2) = 0$ خواهیم داشت $r = w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_i}(s)$. لذا بنا بر رابطه $(\star)$، Φ_1 مشمول در زیرفضایی از $\mathcal{V}$ تولید شده توسط Π_1 می‌شود و به طور مشابه برای Φ_2، پس $(\Phi_1\,,\Phi_2) = 0$ که تناقض است.

۳.۱ گراف کاگستر و نمودار داینکین

در این بخش به معرفی گراف کاگستر[۲] و نمودار داینکین[۳] می‌پردازیم.

مقدمه ۱.۳.۱ فرض کنیم p_i و p_j، دو ریشه اساسی از سیستم ریشه Φ و θ_{ij} زاویه بین آنها باشد. بنا بر ۷.۲.۱ داریم $(p_i\,,p_j) \leq 0$، لذا زاویه بین آن دو غیر حاده است. بنا بر استدلالی که در ۳.۲.۱ مطرح شد داریم $4\cos^2\theta_{ij} = 0, 1, 2, 3, 4$. چون θij غیر حاده است لذا برابر یکی از زوایای $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$ یا π می‌شود. از آن جایی که p_i و p_j مستقل خطی هستند لذا $\theta_{ij} \neq \pi$. قرار می‌دهیم $n_{ij} = 4\cos^2\theta_{ij}$ از اینرو $n_{ij} = 0, 1, 2, 3$ که $i \neq j$. n_{ij} دارای تجزیه $n_{ij} = \frac{2(p_i\,,p_j)}{(p_i\,,p_i)}.\frac{2(p_j\,,p_i)}{(p_j\,,p_j)}$ است که عوامل تجزیه اعداد صحیح نامثبت هستند. حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم:

---

[۲] Coxter
[۳] Dynkin

(i) اگر $n_{ij} = ۱$ داریم $(-۱) \times (-۱) = ۱$ از اینرو $(p_j\,, p_j) = (p_i\,, p_i)$ و ریشه‌ها طول یکسان دارند.

(ii) اگر $n_{ij} = ۲$ داریم $(-۲) \times (-۱) = ۲$ از اینرو یکی از p_i یا p_j طولش $\sqrt{۲}$ برابر دیگری است.

(iii) اگر $n_{ij} = ۳$ داریم $(-۳) \times (-۱) = ۳$ از اینرو یکی از p_i یا p_j طولش $\sqrt{۳}$ برابر دیگری است.

(iv) اگر $n_{ij} = ۰$ هیچ اطلاعی در مورد طول این دو از این رابطه به دست نمی‌آید.

تعریف ۲.۳.۱ فرض کنیم Φ یک سیستم ریشه از فضای اقلیدسی $\mathcal{V}$ با بعد ℓ باشد، گراف کاگستر از Φ، گرافی با ℓ راس است که هر راس متناظر با یک p_i است، و راس i ام به راس j ام که $i \neq j$، به وسیله n_{ij} یال متصل می‌شود.

تعریف ۳.۳.۱ اگر Φ یک سیستم ریشه از فضای اقلیدسی $\mathcal{V}$ بابعد ℓ باشد، نمودار داینکین از آن از گراف کاگستر آن با اضافه کردن پیکانی از ریشه کوتاهتر به ریشه بلندتر به دست می آید.

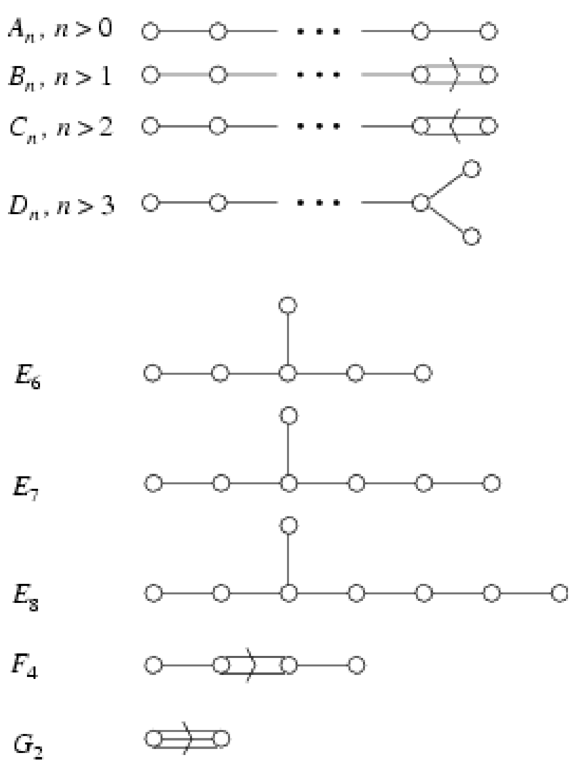
نتیجه ۴.۳.۱ سیستم ریشه Φ تحویلناپذیر است اگر و تنها اگر گراف کاگستر آن همبند باشد.

تعریف ۵.۳.۱ اگر $(p_۱, p_۲ \cdots p_\ell)$ یک ترتیب ثابت از ریشه‌های ساده Φ و $A_{ij} = \frac{۲(p_i\,,p_j)}{(p_i\,,p_i)}$ و $A_{ji} = \frac{۲(p_j\,,p_i)}{(p_j\,,p_j)}$ باشد، ماتریس $\ell \times \ell$، A با درایه‌های A_{ij} را ماتریس کارتان[۴] Φ می‌نامیم. به عنوان مثال ماتریسهای کارتان در مثال (ii):۴.۲.۱ عبارتند از :

$$\mathcal{A}_۱ \times \mathcal{A}_۲ : \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_۲ : \begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_۲ : \begin{pmatrix} ۲ & -۲ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}_۲ : \begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ -۳ & ۲ \end{pmatrix}.$$

قضیه ۶.۳.۱ اگر Φ یک سیستم ریشه تحویلناپذیر از بعد n باشد، نمودار داینکین آن یکی از حالات زیر خواهد بود (در هر حالت n راس داریم):

[۴] $Cartan$



اثبات . رجوع کنید به [۱۷] بخش ۱۱.۴

همانطور که مشخص است گراف کاگستر بر نمودار داینکین به جز حالات B_n و C_n و $F_۴$ و $G_۲$ منطبق است.

قضیه ۷.۳.۱ برای هر نمودار داینکین یا ماتریس کارتان از نوع $A - G$ یک سیستم ریشه تحویلناپذیر متناظر با آن وجود دارد.

اثبات. رجوع کنید به [۱۷] بخش ۱۲.۱

۴.۱ جبر لی

تعریف ۱.۴.۱ یک جبر لی[۵]، یک فضای برداری $\pounds$ روی میدان $\mathbb{F}$ همراه با یک عملگر $\pounds \times \pounds \to \pounds\ :\ [\cdot,\cdot]$، به نام براکت لی است که برای هر a,b از $\mathbb{F}$ در شرایط زیر صدق کند:

$$(\mathrm{i})\ [ax+by,z]=a[x,z]+b[y,z],$$
$$[x,ay+bz]=a[x,y]+b[x,z],$$
$$(ii)\ [x,x]=\circ,$$
$$(iii)\ [[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=\circ$$

که رابطه آخر به اتحاد ژاکوپی معروف است.

تعاریف ۲.۴.۱

I. فرض کنیم $\pounds_{۱}$ و $\pounds_{۲}$ دو جبر لی بر میدان $\mathbb{F}$ باشند. یک همریختی از $\pounds_{۱}$ به $\pounds_{۲}$ نگاشت خطی $\theta:\pounds_{۱}\to\pounds_{۲}$ است به طوری که رابطه $\theta[x,y]=[\theta x,\theta y]$ برای هر $x,y\in\pounds_{۱}$ برقرار باشد. θ یک یکریختی است اگر یک همریختی یک به یک و پوشا باشد.

II. فرض کنیم $\pounds$ یک جبر لی و $\mathfrak{H}$ و $\mathfrak{K}$ زیر فضاهایی از $\pounds$ باشند، در این صورت $[\mathfrak{H},\mathfrak{K}]$ زیرفضای تولید شده توسط همه $[x,y]$ هایی است که $x\in\mathfrak{H}$ و $y\in\mathfrak{K}$. دقت کنید با توجه به اینکه $[x,y]=-[y,x]$، لذا $[\mathfrak{H},\mathfrak{K}]=[\mathfrak{K},\mathfrak{H}]$.

III. یک زیرجبر از جبر لی $\pounds$، یک زیرفضای $\mathfrak{H}$ از آن است که $[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]\subset\mathfrak{H}$.

IV. یک ایده‌آل از جبر لی $\pounds$ یک زیرفضای $\mathfrak{H}$ از آن است که $[\mathfrak{H},\pounds]\subset\mathfrak{H}$. دقت کنید فرقی بین ایده‌ال چپ و راست نیست.

V. جبر لی $\pounds$ را آبلی نامیم هرگاه $[\pounds,\pounds]=\circ$.

VI. مرکز جبر لی $\pounds$ که آن را با $Z(\pounds)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z(\pounds)=\{z\in\pounds:[x,z]=\circ\ \ \forall x\in\pounds\}$$

بنا براتحاد ژاکوپی $Z(\pounds)$ ایده‌آلی از $\pounds$ است و در ضمن $\pounds$ آبلی است اگر و تنها اگر $Z(\pounds)=\pounds$.

مثالها ۳.۴.۱

۱) اگر براکت لی را صفر تعریف کنیم، هر فضای برداری یک جبر لی آبلی می‌شود.

[۵] Lie

۲) با تعریف براکت لی به صورت ضرب خارجی دو بردار، فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{3}$ یک جبر لی آبلی است.
۳) مجموعه همه ماتریسهای $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ تحت براکت لی به صورت $[A,B] = AB - BA$ یک جبر لی است که با $\mathrm{gl(n,\mathbb{F})}$ نشان می‌دهیم .
۴) فرض کنیم $\pounds = \mathrm{sl}(2,\mathbb{F})$ فضای همه ماتریسهای 2×2 با رد 0 بر میدان $\mathbb{F}$ باشد که مشخصه میدان $\mathbb{F}$، ۲ نیست، دراین صورت ماتریسهای $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$، $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ پایه‌ای برای این فضا هستند. حال تعریف می‌کنیم :

$$[x,y] = h, \quad [h,x] = 2x, \quad [h,y] = -2y.$$

به راحتی دیده می‌شود که $\pounds$ تحت براکت لی تعریف شده یک جبر لی است.

تعریف ۴.۴.۱ فرض کنیم $\pounds$ یک جبر لی باشد. زیر فضاهای $\pounds^{1}$، $\pounds^{2}$، $\cdots$ را از $\pounds$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\pounds^{1} = \pounds, \quad \pounds^{n+1} = [\pounds^{n}, \pounds]$$

اگر $\mathfrak{H}$ و $\mathfrak{K}$ ایده‌آلهایی از $\pounds$ باشند، $[\mathfrak{H},\mathfrak{K}]$ نیز چنین است لذا $\pounds^{i}$ ها ایده‌آلهایی از $\pounds$ هستند، پس $\pounds^{n+1} = [\pounds^{n}, \pounds] \subset \pounds^{n}$. بنابراین زنجیر زیر را داریم :

$$\pounds = \pounds^{1} \supset \pounds^{2} \supset \pounds^{3} \supset \cdots$$

حال جبر لی $\pounds$ را پوچتوان گوییم هر گاه i ای باشد که $\pounds^{i} = 0$.

مثالها ۵.۴.۱

۱) هر جبر لی آبلی پوچتوان است.
۲) مجموعه همه ماتریسهای $n \times n$، با درایه‌های a_{ij} که برای هر $i \geq j$، $a_{ij} = 0$، یک جبر لی پوچتوان تحت براکت لی $[A,B] = AB - BA$ است.

تعریف ۶.۴.۱ جبر لی $\pounds$ را ساده نامیم هر گاه هیچ ایده‌آلی غیر از $\pounds$ و صفر نداشته باشد.
با توجه به این تعریف هر جبر لی $\pounds$ از بعد ۱ ساده است. به هر جبر لی ساده از بعد ۱ جبر لی ساده

بدیهی می‌گوییم.

مثالها ۷.۴.۱

۱) فرض کنیم $\pounds = \mathrm{sl}(2,\mathbb{F})$، با مفروضات مثال ۴: ۳.۴.۱ فرض کنیم $I \neq \circ$ ایده‌آلی از $\pounds$ و $ax + by + ch$ عضو ناصفر دلخواهی از I باشد. داریم $[x, ax + by + ch] = bh - ۲cx$، چون طرف راست تساوی عضوی از I است لذا $[x, bh - ۲cx]$، یعنی $-۲bx$ عضوی از I است، به همین طریق به دست می‌آید که $-۲ay \in I$ و $-۲ah \in I$ و لذا $I = \pounds$.

بنابراین $\mathrm{sl}(2,\mathbb{F})$ ساده است.

به همین طریق ثابت می‌شود که $\mathrm{sl}(\mathrm{n},\mathbb{F})$ اگر $n \geq ۲$، ساده است.

۲) اگر $\pounds = \mathrm{sl}(\mathrm{n},\mathbb{C})$، آنگاه $\pounds$ ایده‌آلی از $\mathrm{gl}(\mathrm{n},\mathbb{C})$ است. چرا که اگر $A \in \mathrm{sl}(\mathrm{n},\mathbb{C})$ و $B \in \mathrm{gl}(\mathrm{n},\mathbb{C})$، داریم:

$$\mathrm{trac}[\mathrm{A}\,,\mathrm{B}] = \mathrm{trac}(\mathrm{AB} - \mathrm{BA}) = 0 \Rightarrow [\mathrm{A}\,,\mathrm{B}] \in \mathrm{sl}(\mathrm{n},\mathbb{C})$$

بنابراین $\mathrm{gl}(\mathrm{n},\mathbb{C})$ ساده نیست.

۵.۱ زیرجبرهای کارتان

تعریف ۱.۵.۱ فرض کنیم $\pounds$ یک جبر لی با بعد متناهی روی $\mathbb{C}$ باشد. برای هر زیرجبر $\mathfrak{H}$ از $\pounds$ تعریف می‌کنیم :

$$I(\mathfrak{H}) = \{x \in \pounds :\ \ [y\,,x] \in \mathfrak{H}\ \ \forall y \in \mathfrak{H}\}$$

بنا بر اتحاد ژاکوبی $I(\mathfrak{H})$ زیرجبری از $\pounds$ و شامل $\mathfrak{H}$ است. در ضمن $\mathfrak{H}$ ایده‌آلی از $I(\mathfrak{H})$ است و اگر $\mathfrak{H}$ ایده‌آلی از زیرجبر $\mathfrak{K}$ ای باشد، $\mathfrak{K}$ مشمول در $I(\mathfrak{H})$ است، پس $I(\mathfrak{H})$ بزرگترین زیرجبر از $\pounds$ است که $\mathfrak{H}$ ایده‌آلی از آن و مشمول در آن است.

تعریف ۲.۵.۱ یک زیرجبر $\mathfrak{H}$ از جبر لی $\pounds$ را یک زیرجبر کارتان گوییم اگر $\mathfrak{H}$ پوچتوان باشد و $\mathfrak{H} = I(\mathfrak{H})$.