



وزارت فرهنگ و آموزش عالی
دانشگاه علوم و فنون مازندران

پایان نامه

مقطع کارشناسی ارشد

رشته: مهندسی عمران - سازه

عنوان: طراحی بهینه سازه های فضای کار

استاد راهنمای مشاور: دکتر عیسی سلاجقه

تکارش: مهدی مریدی

۱۴۰۸۴

نائبستان ۱۳۷۸

۲۷۸/۳

به قد همت و بهنای روح آرش بود
نشان عابری از کوچه سیاوش بود
حریم آینه ها بی غبار و بی خش بود

به یاد آن زمانی که مرزخانه ما
به یاد آن زمانی که رد پای شفق
به یاد آن زمانی که زیر سایه مهر

تقدیم به پدر ، مادر ، همسر ، روح مادر بزرگ
و تاریخ پرشکوه موتنم.

سپاسنامه

خوشبختی از آن اوست که به دیگران خوشبختی بخشد.

برایم جای بسی خوشبختی است که این کار تحقیقاتی به یاری یزدان پاک و مشاوره بسیار ارزشمند استاد گرانقدر آقای پروفسور عیسی سلاجقه به نتیجه رسیده و ما حاصل آن در این مجموعه گردآوری شده است.

جا دارد در همین فرصت به عنوان یک شهر وند کرمانی از خدمات شبانه روزی و بی دریغ ایشان در راه ارتقاء سطح علمی دانشگاه کرمان که مایه افتخار و مبارات همه همشهربان است کمال تشکر و قدردانی را به عمل آورم.

همچنین از کلیه مسئولین و اساتید محترم دانشگاه علوم و فنون مازندران که با فراهم آوردن امکانات لازم راه را برای ادامه تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد هموار کرده‌اند، سپاسگزاری می‌نمایم.

لازم است از بخش مرجع کتابخانه دانشکده فنی کرمان و دوست ارجمند آقای مهندس شکیبی نیز جهت همکاری دائم و مؤثر شان تشکر لازم را به عمل آورم. و در پایان چنانچه موفقیتی حاصل شده باشد سهم خود را ناچیز دانسته و همگی آن را مدیون موهای سفید پدری منقول، چروکهای دست مادری دلسرد و همراهی های همسری مهریان بوده و با تمام وجودبه همه احساس پاکشان درود می‌فرستم.

چکیده

امروزه استفاده از سازه های فضاکار برای دهانه های بزرگ به صورت یک ضرورت در آمده است. گرچه کارخانه های سوله سازی نیز به این منظور سازه های را جهت پوشاندن ساختمانهای صنعتی ارائه داده است، لیکن برای دهانه های بیش از ۶۰ متر تنها استفاده از سازه های فضا کار عملی می باشد. با توجه به هزینه روزافزون مصالح، لازم است جدیدترین تکنولوژیها در اختیار گرفته شود تا طراحیهای رعایت کامل ضوابط آئین نامه های با رگذاری و ساختمنی کاملاً اقتصادی صورت بگیرد.

در این رابطه تئوری های بهینه سازی می تواند به راحتی مورد استفاده قرار گیرد و فرایند طراحی نیز همچون تحلیل سازه کاملاً کامپیوترا شود. استفاده از این تکنولوژی این مزیت را نیز دارد که علاوه بر رعایت کلیه محدودیتهای آئین نامه ای سبک ترین یا ارزان ترین طرح را می توان بدست آورد.

این پایان نامه، نتیجه یک کار تحقیقاتی است که طی آن یک برنامه کامپیوترا به زبان فرترن جهت طراحی بهینه انواع خربها و شبکه های دو لایه فضا کار تهیه شده و به این منظور وزن و یا حجم سازه بعنوان تابع هدف در نظر گرفته شده است که باید کمینه (حداقل) گردد.

محدودیتهای اصلی حاکم بر مسئله بهینه سازی مذکور در این پایان نامه شامل کترلهای مربوط به تنشها، لاغری و تغییر شکل سازه مطابق با ضوابط آئین نامه AISC می باشد.

از آنجایی که شکل یک سازه از عوامل مؤثر در کاهش و یا افزایش وزن آن می باشد. در این پایان نامه علاوه بر بهینه سازی سطح مقطع اعضا به بهینه یابی شکل سازه نیز توجه شده است. به نحوی که مختصات گره ها و یا ارتفاع شبکه دو لایه نیز در کنار ابعاد مقطع عرضی اعضاء به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته شده اند.

همچنین کاهش تعداد تحلیلهای لازم جهت کمینه کردن وزن، یکی از اهداف اصلی این پایان نامه می باشد. برای رسیدن به این هدف از اصول تقریب سازی برای محاسبه نیروها، تغییر مکانها و در نتیجه توابع محدودیت (قیدها) استفاده شده است.

باجایگذاری توابع تقریبی استفاده مکرر از تحلیل سازه، لازم نمی باشد و در نتیجه زمان بسیار کمتری برای بهینه سازی مصرف می شود. در برنامه نوشته شده جهت بالابردن کیفیت تقریب ، از بازه های متحرک (MOVE LIMITS) برای متغیرهای طراحی استفاده شده است.

در ضمن جهت بررسی کارائی برنامه نوشته شده تعدادی خربما و شبکه دو لایه به عنوان مثال، بهینه یابی شکل و سطح مقطع شده اند.

فهرست مطالب

صفحه		عنوان
	فصل اول - بهینه سازی و برنامه DOT	
۱	۱-۱- مقدمه
۲	۲-۱- کاربردهای بهینه سازی در مهندسی
۳	۳-۱- بیان یک مسئله بهینه سازی و تعاریف
۴	۴-۱- بردار طراحی
۴	۴-۲- قیدهای طراحی
۴	۴-۳- سطح قید
۶	۶-۱- تابع هدف
۶	۶-۲- سطوح تابع هدف
۷	۷-۱- دسته بندی مسائل بهینه سازی
۸	۸-۱- روش‌های بهینه سازی
۱۰	۱۰-۱- معرفی برنامه ریزی خطی
۱۱	۱۱-۱- روش جهات امکان پذیر
۱۴	۱۴-۱- برنامه بهینه سازی DOT
۱۵	۱۵-۱- برنامه DOT و بهینه یابی سازه ای
۱۵	۱۵-۲- بردار طراحی
۱۶	۱۶-۱- تابع هدف $f(x)$
۱۶	۱۶-۲- قیدها $g(x)$
۱۷	۱۷-۱- مثالهای مربوطه
	فصل دوم- تحلیل کامپیوتری سازه ها	
۲۸	۲-۱- مقدمه
۲۹	۲-۲- تحلیل ماتریسی و روش‌های آن
۲۹	۲-۲-۱- ماتریس سختی
۳۰	۲-۲-۲- سرهم بندی ماتریس سختی

۲۱	۱-۳-۲-۲-۲ اعمال شرایط مرزی
۲۱	۲-۴-۲-۲ بردار بارهای خارجی
۲۱	۲-۵-۲-۲ حل معادلات و تحلیل سازه
۲۲	۲-۲-برنامه کامپیوتری ANALYSIS و خصوصیات مربوطه
	فصل سوم - بهینه سازه ای - ادغام برنامه بهینه سازی و تحلیل کامپیوتری
۲۷	۳-۱-مقدمه
۲۸	۳-۲-۱-اجزاء مورد نیاز
۴۰	۳-۳-تعريف مسئله بهینه سازه ای
۴۰	۳-۳-۱-متغير های طراحی وتابع هدف
۴۰	۳-۳-۲-تابع محدودیت (قید ها)
۴۰	۳-۳-۳-۱-محدودیت تنش
۴۱	۳-۳-۳-۲-محدودیت کمانش
۴۱	۳-۳-۳-۳-محدودیت تغیر مکان
۴۱	۳-۳-۳-۴-محدودیت های لاغری
۴۲	۳-۳-۳-۵-فرمولاسیون استاندارد طراحی بهینه سازه ها
۴۲	۴-۳-روشهای حل بهینه سازه ها
	فصل چهارم - تقریب سازی و روش های آن
۴۵	۴-۱-مقدمه
۴۶	۴-۲-تحلیل حساسیت
۴۶	۴-۲-۱-روش تفاضلات محدود
۴۷	۴-۲-۲-روش دقیق
۴۹	۴-۳-روشهای تقریب سازی طرح بهینه
۴۹	۴-۳-۱-تقریب سازی یک نقطه ای
۵۰	۴-۳-۱-۱-۱-تقریب خطی
۵۱	۴-۳-۱-۲-تقریب معکوس
۵۲	۴-۳-۲-تقریب سازی دونقطه ای

۵۲	-۱-۲-۳-۴- تقریب معکوس اصلاح شده.
۵۳	-۲-۲-۳-۴- تقریب توانی
۵۴	-۳-۳-۴- سایر روش‌های تقریب سازی
	فصل پنجم- طراحی بهینه خربه‌های دو بعدی و سه بعدی
۵۶	-۱- مقدمه
۵۷	-۲- بهینه سازی از روش مستقیم برنامه ADOT
۵۷	-۲-۱- زیر بنا و نحوه عمل برنامه ADOT
۵۹	-۲-۲- محاسبه تقریبی نیروها و تغییر مکانها
۵۹	-۲-۳-۰- محاسبه مشتقات برنامه ROUND
۶۱	-۲-۳-۰- محاسبه تقریبی نیروها و برنامه APPROX
۶۱	-۲-۳-۰- محاسبه تقریبی تغییر مکانها و برنامه APPROX
۶۲	-۴-۰- بهینه سازی با استفاده از تقریب سازی و برنامه DESIGN
۶۴	-۴-۰-۱- زیر بنا و نحوه عمل برنامه DESIGN
۶۶	-۵-۰- بهینه سازی شکل سازه ها
۶۷	-۶-۰- مثالهای حل شده
	فصل ششم- معرفی سازه های فضاکار و تولید داده ها
۸۳	-۱- مقدمه
۸۴	-۲- شبکه های تحت یک لایه ای
۸۶	-۳- شبکه های دو لایه
۸۷	-۳-۱- تقسیم بندی شبکه های دو لایه ای
۹۱	-۴-۰- تکیه گاهها در شبکه های دو لایه ای
۹۲	-۵- گره ها
۹۴	-۶- مثالهایی از شبکه های دو لایه ای اجرا شده
۹۴	-۷- شبکه های سه لایه
۹۵	-۸- گنبدها
۹۷	-۹- سازه های استوانه ای

۹۸.....	۱۰-۶- انواع دیگر سازه های فضای کار
۹۸.....	۶-۱۱- تولید داده ها در سازه های فضای کار
	فصل هفتم - طراحی بهینه سازه های فضای کار
۱۰۱.....	۱-۷- مقدمه
۱۰۲.....	۲-۷- برنامه های نوشته شده و نحوه عملکرد آنها
۱۰۲.....	۳-۷- متغیر های طراحی
۱۰۳.....	۴-۷- توابع محدودیت (قیدها)
۱۰۳.....	۴-۱- قیدهای تنشی
۱۰۴.....	۴-۲- قیدهای لاغری
۱۰۵.....	۴-۳- قیدهای تغییر شکلی
۱۰۵.....	۵-۱- بهینه یابی ارتفاع و راه حل های موجود
۱۰۵.....	۵-۲- معرفی ارتفاع شبکه دو لایه به عنوان متغیر طراحی و محاسبه ارتفاع بهینه
۱۰۶.....	۵-۳- راه حل سعی و خطای جهت محاسبه محدوده ارتفاع بهینه
۱۰۷.....	۵-۴- مثالهای حل شده
۱۲۶.....	فهرست مراجع

پیوست

۱۳۱.....	ضمیمه ۱- برنامه کامپیوتری DOT
۱۳۸.....	ضمیمه ۲- برنامه کامپیوتری تحلیل سازه
۱۴۸.....	ضمیمه ۳- برنامه های بهینه سازی ADOT و DESIGN
۱۶۲.....	ضمیمه ۴- تولید داده های در سازه های فضای کار
۱۷۹.....	ضمیمه ۵- برنامه های بهینه سازی GRID و SPACE

فهرست جداول

جدول (۱-۱) مشخصات مربوط به مثال (۲-۱)	۲۱
جدول (۲-۱) نتایج مثال (۲-۱)	۲۱
جدول (۳-۱) محاسبات مربوط به تحلیل ماتریسی مثال (۲-۱)	۲۲
جدول (۴-۱) نتایج مربوط به مثال (۳-۱)	۲۶
جدول (۱-۵) حالات بارگذاری مثال (۱-۵)	۶۷
جدول (۲-۵) خواص مصالح مثال (۳-۵)	۷۲
جدول (۳-۵) نتایج بهینه شده مثال (۳-۵)	۷۲
جدول (۴-۵) مقادیر حجم بهینه شده در هر آنالیز مثال (۳-۵)	۷۳
جدول (۵-۵) بارگذاری مربوط به مثال (۴-۵)	۷۴
جدول (۶-۵) خواص مصالح مثال (۴-۵)	۷۴
جدول (۷-۵) نتایج بهینه شده مثال (۴-۵)	۷۵
جدول (۸-۵) مقادیر حجم بهینه شده در هر آنالیز مثال (۴-۵)	۷۶
جدول (۹-۵) مقادیر اولیه و نتایج بهینه شده مثال (۵-۵)	۷۷
جدول (۱۰-۵) مقادیر حجم سازه در هر آنالیز مثال (۵-۵)	۷۸
جدول (۱۱-۵) خواص مصالح مثال (۴-۵)	۷۹
جدول (۱۲-۵) مشخصات اعضاء خرپای مثال (۴-۵)	۸۰
جدول (۱۳-۵) مشخصات گره های خرپای مثال (۴-۵)	۸۰
جدول (۱۴-۵) حالات بارگذاری مثال (۶-۵)	۸۰
جدول (۱۵-۵) نتایج بهینه سازی مثال (۶-۵)	۸۱
جدول (۱۶-۵) مقادیر وزن بهینه شده در هر آنالیز مثال (۶-۵)	۸۱
جدول (۱-۷) خواص مصالح مثال (۱-۷)	۱۰۷
جدول (۲-۷) نتایج مربوط به مثال (۱-۷)	۱۱۰
جدول (۳-۷) تکرار عملیات بهینه سازی	۱۱۰

جدول (۴-۷) نتایج بهینه سازی مثال (۱-۷)	
با اعمال محدودیتهای تغییر مکانی	111.....
جدول (۵-۷) مقادیر وزن بهینه شده در هر آنالیز (وضعیت الف) مثال (۱-۷)	112.....
جدول (۶-۷) مقادیر وزن بهینه شده در هر آنالیز (وضعیت ب) مثال (۱-۷)	112.....
جدول (۷-۷) مقادیر وزن بهینه شده به ازاء ارتفاع مربوطه در مثال (۱-۷)	113.....
جدول (۸-۷) نتایج بهینه یابی وارتفاع مثال (۱-۷)	114.....
جدول (۹-۷) مقادیر وزن بهینه شده در هر آنالیز مربوط به مثال (۱-۷)	114.....
جدول (۱۰-۷) نتایج بهینه سازی مثال (۲-۷)	117.....
جدول (۱۱-۷) مقادیر وزن در هر آنالیز برای حالت اول مثال (۲-۷)	118.....
جدول (۱۲-۷) مقادیر وزن بهینه شده ازاء ارتفاع مربوط در مثال (۲-۷)	118.....
جدول (۱۳-۷) مقادیر وزن در هر آنالیز بهینه یابی با ارتفاع مثال (۲-۷)	119.....
جدول (۱۴-۷) مقادیر وزن در هر آنالیز حالت (الف-۳)	119.....
جدول (۱۵-۷) مقادیر وزن در هر آنالیز حالت (ب-۳)	119.....
جدول (۱۶-۷) نتایج بهینه سازی مثال (۳-۷)	122.....
جدول (۱۷-۷) تغییرات وزن بهینه در هر آنالیز برای حالت اول مثال (۳-۷)	123.....
جدول (۱۸-۷) تغییرات وزن بهینه در هر آنالیز برای حالت دوم مثال (۳-۷)	123.....
جدول (۱۹-۷) بارگذاری مربوط به مثال (۴-۷)	124.....
جدول (۲۰-۷) نتایج بهینه شده مثال (۴-۷)	125.....

فهرست اشکال

..... شکل (۱-۱) سطوح قید در یک فضای طراحی دو بعدی.	۵
..... شکل (۲-۱) سطوح تابع هدف.	۷
..... شکل (۳-۱) روش تکراری بهینه سازی در فضای طراحی دو بعدی.	۹
..... شکل (۴-۱) مفهوم هندسی رابطه (۹-۱).	۱۲
..... شکل (۵-۱) ستون و مقطع مربوط به مثال (۱-۱).	۱۷
..... شکل (۶-۱) بهینه سازی ترسیمی مثال (۱-۱).	۲۰
..... شکل (۷-۱) خرپای مثال (۳-۱).	۲۲
..... شکل (۱-۲) تبدیل ماتریس سختی به ماتریس نواری.	۲۳
..... شکل (۲-۲) تأثیر شماره گذاری روی ابعاد ماتریس سختی.	۳۴
..... شکل (۳-۱) فلو چارت کلی برنامه بهینه یابی سازه ای.	۳۹
..... شکل (۴-۱) نمودار تقریب سازی خطی.	۵۱
..... شکل (۱-۵) فلو چارت کلی برنامه ADOT.	۵۸
..... شکل (۲-۵) فلو چارت کلی برنامه DESIGH.	۶۵
..... شکل (۳-۵) خرپای مثال (۱-۵).	۷۲
..... شکل (۴-۵) نمودار تکرار عملیات بهینه سازی مربوط به مثال (۳-۵).	۷۳
..... شکل (۵-۵) خرپای مثال (۴-۵).	۷۴
..... شکل (۶-۵) نمودار تکرار عملیات بهینه سازی مربوط به مثال (۴-۵).	۷۶
..... شکل (۷-۵) اشکال اولیه و بهینه شده خرپای مثال (۴-۵).	۷۸
..... شکل (۸-۵) نمودار تکرار عملیات بهینه سازی مربوط به مثال (۵-۵).	۷۸
..... شکل (۹-۵) خرپای مثال (۵-۵).	۷۹
..... شکل (۱۰-۵) نمودار تکرار عملیات بهینه سازی مربوط به مثال (۶-۵).	۸۱
..... شکل (۱-۶) شبکه دو طرفه مستطیلی.	۸۴
..... شکل (۲-۶) شبکه دو طرفه قطری.	۸۴

شکل (۳-۶) انواع شبکه های سه طرفه و چهار طرفه	۸۵
شکل (۴-۶) انواع شبکه های دو لایه ای	۸۹
شکل (۵-۶) تکیه گاههای شبکه های دو لایه ای و انواع آنها	۹۱
شکل (۶-۶) یکی از انواع گره های MERO	۹۳
شکل (۷-۶) انواعی از گنبدها	۹۶
شکل (۸-۶) انواعی از سازه های استوانه ای	۹۷
شکل (۱-۷) سطح مقطع اعضاء شبکه های دو لایه	۱۰۲
شکل (۲-۷) شبکه دو لایه مثال (۱-۷)	۱۰۸
شکل (۳-۷) نمودار تکرار عملیات بهینه سازی	۱۱۰
شکل (۴-۷) نمودار تکرار عملیات بهینه سازی برای مثال (۱-۷)	۱۱۲
شکل (۵-۷) نمودار تغییرات وزن با ارتفاع شبکه دو لایه مثال (۱-۷)	۱۱۳
شکل (۶-۷) شبکه دو لایه مثال (۲-۷)	۱۱۵
شکل (۷-۷) نمودار تکرار عملیات بهینه سازی مربوط به حالت اول مثال (۲-۷)	۱۱۸
شکل (۸-۷) نمودار تغییرات وزن با ارتفاع شبکه دو لایه مثال (۲-۷)	۱۱۸
شکل (۹-۷) نمودار تکرار عملیات بهینه سازی با ارتفاع مثال (۲-۷)	۱۱۹
شکل (۱۰-۷) نمودار تکرار عملیات بهینه سازی برای حالت سوم مثال (۲-۷)	۱۲۰
شکل (۱۱-۷) شبکه دو لایه ای مثال (۳-۷)	۱۲۱
شکل (۱۲-۷) نمودار تکرار عملیات بهینه سازی مربوط به مثال (۳-۷)	۱۲۳

مقدمه

بهینه سازی فرایندی است که طی آن تعدادی متغیر به گونه ای محاسبه می شوند، که تابع مشخصی از این متغیرها به نام تابع هدف هم زمان با برآورده شدن تعدادی شرایط محدود کننده حداقل مقدار ممکن را داشته باشد.

در مهندسی عمران تاکنون جهت طراحی انواع سازه ها از بهینه سازی استفاده های زیادی شده است که ذیلا شرح مختصری ارائه خواهد شد.

گذشته روشهای بهینه سازی را می توان درروزگار نیوتن^(۱)، لاگرانژ^(۲) و کوشی^(۳) ردیابی کرد. بسط روشهای بهینه سازی حساب دیفرانسیل با کارهای نیوتن و لاپیزنس^(۴) ممکن گشت.

حساب تغییرات توسط لاگرانژ و اولر^(۵) بنیانگذاری شدو یک روش بهینه سازی برای مسائل مقید، که شامل افزودن مضارب مجهول می باشد به نام یابنده آن، لاگرانژ نام گذاری شد.

با وجود کارهای انجام شده توسط این افراد، تا قرن بیستم پیشرفت بسیار اندکی در این زمینه حاصل شد. در این قرن کامپیوتر ها به کار گیری روشهای بهینه سازی را ممکن ساخته و تحقیقات بیشتر برای روشها جدید را برانگیخت. پیشرفت های بعدی به روشهای بهینه سازی ابعاد گسترده ای داد.

توسعه اصلی در زمینه روشهای عددی بهینه سازی نامقید در دهه ۱۹۶۰ میلادی (چهل سال پیش) صورت گرفت. بسط روش سیمپلکس در ۱۹۴۷ توسط دنتزیگ^(۶) برای مسائل برنامه ریزی خطی وارانه اصل بهینگی در ۱۹۵۷ توسط بلمن^(۷) برای مسائل برنامه ریزی پویا، راه را برای توسعه روشهای بهینه سازی مقید گشود.

1-Newton	2-Langrange
3-Cauchy	4-Leibnitz
5-Euler	6-Dantzig
7-Belman	

طرح بهینه سازه ها با پیشرفت تدریجی کامپیوتر ها و نیز ارائه روشهای مفید جهت حل مسائل برنامه ریزی خطی^(۱) از سوی محققان سبب گردید تا این علم نوپا به طور قابل ملاحظه ای توسعه یابد^[۱]

در سالهای پس از ۱۹۶۰ تحقیقات زیادی در زمینه بهینه سازی سازه ها انجام گرفت اما هیچ یک شکل کاربردی نداشت. زیرا فقط مسائلی که تعداد متغیرهای طراحی^(۲) آنها بسیار محدود بود، با روشهای موجود قابل حل بودند. همچنین برای رسیدن به جواب بهینه تکرارهای زیادی لازم بود. در حالیکه کامپیوترهای آن زمان سرعت کافی نداشتند. با توجه به پیچیدگی روابط حاکم بر تحلیل سازه ها، پرداختن به بهینه سازی آنها همواره با مشکل مواجه بود، که با به کار گیری روشهای اجزای محدود و تحلیل ماتریسی ساره ها، حل مسئله بهینه سازی ممکن شد.

از آنجا که تحلیل مکرر سازه در خلال محاسبات بهینه مخصوصاً برای سازهای با درجه نامعین بالا بسیار پر حجم و وقتگیر می باشد، در سالهای اخیر جهت کاهش تعداد تحلیلهای لازم، تحقیقات زیادی در زمینه محاسبات تقریبی نیروها، تغییر شکلها، فرکانسها وغیره (آنچه از عملیات تحلیل سازه بدست می آید) [۲۷-۲۶ و ۲۴-۲۳ و ۱۳-۱۲] و بهبوده این تقریب سازیها [۸-۱۲] صورت گرفته است.

بدین ترتیب بهینه یابی سازه ها شکل کاربردی به خود گرفته و به صورت یکی از شاخه های بسیار مهم و مفید علوم مهندسی در آمد. سلاجقه [۳۳-۳۲ و ۱۵-۱۴]^(۳) و گراندهی^(۴) [۲۰-۲۱] با استفاده از تقریب سازی خطی نتایج رضایت‌بخشی برای طرح بهینه سازه ها با محدودیت فرکانس بدست آوردند. همچنین (میورا^(۵) و اسمیت^(۶)) [۲۲] در سال ۱۹۷۶، هانگ^(۷) در سال ۱۹۸۸ و (هاتسن و^(۸) واندرپلاتس^(۸)) [۲۳] در سال ۱۹۹۰ روشهایی برای بهینه سازی خرپا ها ارائه داده اند.

1-Linear Programming	2-Design Variable
3-Grandhi	4-Miura
5-Schmit	6-Huang
7-Hansen	8-Vanderplaats