بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضیات و کاربردها

بررسی پایداری یک معادله‌ی تابعی مکعبی $n-$ بعدی

استاد راهنما:

دکتر محمد باقر مقیمی

استاد مشاور:

دکتر عباس نجاتی

پژوهشگر:

اسما میرشاهی دوزین

تابستان ۱۳۹۱

تقدیم بانهایت احترام به:

بهترین های هستی ام که باتمام وجود آنها را می ستایم

قلب مهربان مادرم

دستان پرمهر پدرم

دنیز نازنینم، برادر گلم و خواهران عزیزم

تقدیر و سپاسگزاری :

حمد و ستایش پروردگار را سزاست که هستی‌ام بخشید و پرتو الطاف بی شمارش همواره بر زندگی‌ام آشکار بوده و هست. سپاسگزارم او را که تعقل و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرم نمود.

اکنون در آستانه‌ی راهی نو، به پ س نعمات بی حد پروردگار بر خود لازم می‌دانم سپ س گذار تمام کسانی باشم که در برابر سختی‌ها و ناملایمات روزگار یاری‌ام کرده‌اند.

از دو آفریده‌ی صبور و مهربان خداوند، از دو موهبت عظیم و بی نظیر، پدر و مادر نازنینم، دو همراه همیشگی ام، تشکر ویژه و سپ س بی کران دارم و در نهایت تواضع زانوی ادب در برابر این عزیزان بر زمین می زنم و بوسه‌ی مهر و سپ س بر دستان مبارکشان می نهم.

اینک که این مرحله را پشت سر می‌گذارم، از زحمات و راهنمایی ه ی ظریف و ارزشمند استاد فرزانه، صبور و گرانمایه‌ام، دکتر محمدباقر مقیمی که استاد اخلاق و علم می‌باشند، تشکرفراوان دارم و از ایشان بسیار سپاسگذارم و دگربار خدای خود را شکر می‌کنم که استفاده از محضر چنین استادی را نصیبم کرد و امیدوارم اندوخته ه ی ناچیزم موجب رضایت خاطر ایشان باشد.

همچنین بر خود لازم می دانم از مشاور گرانقدر و بزرگوار دکتر عب س نجاتی به خاطر زحمات و راهنمایی‌ه ی ارزشمند و مفیدشان و اساتید گرانقدری که در دانشگ ه محقق اردبیلی و دانشگ ه مازندران مشوق و راهنمایم بودند، کمال تشکر و سپاسگذاری را داشته باشم.

در پایان از عموی بزرگوارم حمید میرشاهی، خواهران گلم و برادر عزیزم، دوستان نازنینم و هم اتاقی ه ی مهربانم که در پشت سر گذاشتن این مسیر همراهم بودند، بسیار ممنون و سپاسگذارم.

اسما میرشاهی دوزین

تابستان ۱۳۹۱

نام خانوادگی: میرشاهی دوزین **نام:** اسما

عنوان پایان‌نامه: بررسی پایداری یک معادله‌ی تابعی مکعبی $n-$ بعدی

استاد راهنما : دکتر محمد باقر مقیمی
استاد مشاور: دکتر نجاتی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** آنالیزریاضی
دانشگاه: محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم ریاضی
تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۱ **تعداد صفحه:** ۹۹

کلید واژه: معادله تابعی مکعبی، جبر باناخ، پایداری هایرز— اولام— راسیاس

چکیده : در این پایان نامه ابتدا به بررسی پایداری تعمیم یافته‌ی هایرز—اولام—راسیاس معادلات تابعی مکعبی

$$f(2x+y)+f(2x-y)=2f(x+y)+2f(x-y)+12f(x)$$

و

$$f(x+y+2z)+f(x+y-2z)+f(2x)+f(2y)$$
$$=2[f(x+y)+2f(x+z)+2f(x-z)+2f(y+z)+2f(y-z)]$$

می پردازیم و با استفاده از این بررسی، پایداری معادله‌ی تابعی مکعبی $n-$بعدی

$$f(\sum_{j=1}^{n-1} x_j+2x_n)+f(\sum_{j=1}^{n-1} x_j-2x_n)+\sum_{j=1}^{n-1} f(2x_j)$$
$$=2f(\sum_{j=1}^{n-1} x_j)+4\sum_{j=1}^{n-1}(f(x_j+x_n)+f(x_j-x_n))$$

را در چند فضای مختلف مورد برررسی قرار می دهیم.

فهرست مندرجات

مقدمه و پیشینه‌ی پژوهش

در سال ۱۹۴۱ ، دی . اچ. هایرز[۱] [۲] پاسخ مسئله را در حالتی که $G_۱$ و $G_۲$ فضاهای باناخ[۲] باشند، به صورت زیر بیان کرد.

قضیه ۱.۰ (دی. اچ. هایرز) [۲] فرض کنید $\delta > ۰$ و $G_۱$ و $G_۲$ فضاهای باناخ باشند. اگر نگاشت $f : G_۱ \to G_۲$ برای هر $x, y \in G_۱$ در رابطه‌ی (تفاضل کوشی)

$$\| f(x+y) - f(x) - f(y) \| \leq \delta$$

صدق کند، آنگاه حد

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲^n} f(۲^n x)$$

برای هر x از $G_۱$ موجود است و نگاشت $L : G_۱ \to G_۲$ یک نگاشت جمعی منحصربفردی است که برای هر x از $G_۱$ در رابطه‌ی زیر صدق می کند

$$\| f(x) - L(x) \| \leq \epsilon.$$

در قضیه‌ی فوق، تفاضل کوشی به صورت کراندار بیان شده است. در نتیجه نگاشت f به صورت مجموع یک نگاشت جمعی و یک نگاشت کراندار نمایش داده می شود. در سال ۱۹۵۰ آئوکی[۳] [۱۸] با معرفی مفهوم تفاضل کوشی نامتناهی، تعمیمی از قضیه‌ی هایرز را برای نگاشت

[۱] D.H.Hyers

[۲] Banach

[۳] Aoki

های جمعی ارائه کرد و در سال ۱۹۷۸ ، تمیستوکلس ام. راسیاس[۴] با تعمیم قضیه‌ی هایرز برای نگاشت های خطی، آن را در چارچوبی کلی تر تعمیم داد.

قضیه ۲.۰ (تی اچ. ام. راسیاس) [۱۹] فرض کنید $\epsilon > 0$ ، $p < 1$ و E فضای خطی نرمدار و E' فضای باناخ باشد. اگر نگاشت $f : E \to E'$ برای هر $x, y \in E$، در رابطه‌ی (تفاضل کوشی نامتناهی)

$$\| f(x+y) - f(x) - f(y) \| \leq \epsilon(\| x \|^p + \| y \|^p) \qquad (1.0)$$

صدق کند، آنگاه حد

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x)$$

برای هر x از E موجود است و نگاشت $L : E \to E'$ یک نگاشت جمعی منحصر بفردی است که برای هر x از E در رابطه‌ی زیر صدق می کند

$$\| f(x) - L(x) \| \leq \frac{2\epsilon}{2 - 2^p} \| x \|^p \qquad (2.0)$$

اگر $p < 0$، آنگاه نابرابری (۱.۰) برای $y \neq 0$ و $x \neq 0$ و نابرابری (۲.۰) برای $x \neq 0$ برقرار است. همچنین اگر نگاشت $t \mapsto f(tx)$ از $\mathbb{R}$ به E' برای هر x از E پیوسته باشد، آنگاه نگاشت $L : E \to E'$ خطی خواهد بود.

نابرابری (۱.۰) که برای اولین بار توسط تی اچ. ام. راسیاس معرفی شد، تاثیر زیادی را در توسعه‌ی تعمیم مفهوم پایداری هایرز—اولام فراهم کرد. این مفهوم جدید از پایداری، پایداری هایرز—اولام تعمیم یافته یا پایداری هایرز—اولام—راسیاس برای معادلات تابعی نامیده می‌شود.(رجوع کنید به [۳],[۱۶])

در سال ۱۹۹۰ ، تی اچ. ام. راسیاس در بیست و هفتمین گردهمایی بین‌المللی معادلات تابعی، این سوال را مطرح کرد که آیا می‌توان نظیر قضیه‌ی (۲.۰) را در حالت $p \geq 1$ ثابت کرد. در سال

[۴] Themistocles

۱۹۹۱ ، ز. گاجدا[5] [۲۴] با بکارگیری روشی مشابه آنچه که در مقاله‌ی تی اچ. ام. راسیاس آمده بود، به این سوال در حالت $p > ۱$ پاسخ مثبت داد. گاجدا [۹] و همچنین تی اچ. ام. راسیاس به همراه پی. سیمرل[6] با ارائه‌ی مثال هایی نشان دادند که قضیه‌ی (۲.۰) در حالت $p = ۱$ برقرار نیست. در سال ۱۹۸۲ جی. ام. راسیاس[7] با استفاده از روش تی اچ. ام. راسیاس، قضیه‌ی پایداری مشابهی را برای تفاضل کوشی نامتناهی ثابت کرد که در آن تابع کنترل $\| x \|^p . \| y \|^q$ با فرض $p, q \in \mathbb{R}$ و $p + q \neq ۱$ به جای تابع کنترل $\| x \|^p + \| y \|^q$ بکار رفته بود.

قضیه ۳.۰ (جی. ام. راسیاس)[۹] − [۸] فرض کنید $\epsilon > ۰$، X فضای خطی نرمدار و Y فضای باناخ باشند. اگر p, q اعداد حقیقی باشند به طوری که $r = p + q \neq ۱$ و نگاشت $f : X \to Y$ برای هر x, y از X در رابطه‌ی

$$\| f(x + y) - f(x) - f(y) \| \leq \epsilon \| x \|^p \| y \|^p$$

صدق کند، آنگاه نگاشت جمعی یکتای $A : X \to Y$ موجود است که برای هر x از X در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$\| f(x) - A(x) \| \leq \frac{\epsilon}{| ۲^r - ۲ |} \| x \|^r$$

علاوه بر این، اگر نگاشت $t \mapsto f(tx)$ از $\mathbb{R}$ به Y برای هر x از X پیوسته باشد، آنگاه نگاشت $A : X \to Y$ خطی خواهد بود.

پی. گاوروتا[8] [۱۲] با ارائه‌ی مثالی نشان داد که قضیه‌ی ۳.۱ در حالت $r = ۱$ برقرار نیست. فورتی[9] در مقالات [٦] و [۵] و پی. گاوروتا [۱۱] قضیه‌های ۲.۱ و ۳.۱ را به شکل خیلی

[5] Z.Gajda

[6] P.semil

[7] J.M.Rassias

[8] P.Gavruta

[9] Forti

کلی‌تری تعمیم دادند.

در هر یک از قضیه‌های فوق، نابرابری $\| f(x+y) - f(x) - f(y) \| \leq \phi(x,y)$ برای هر x و y از فضای مورد بحث برقرار است. حال اگر این فضا محدودتر شود چه اتفاقی می‌افتد؟

اسکف[۱۰] [۴] این سوال را در حالتی که توابع روی زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ تعریف می‌شوند و مقادیر آنها در یک فضای باناخ است، مورد بررسی قرار داد.

چولوا[۱۱] [۱۳] برقراری قضیه‌ی اسکف را در حالتی که دامنه‌ی X با یک گروه آبلی جایگزین شود، بررسی کرد و سر انجام سزرویک[۱۲] [۱۷] پایداری هایرز—اولام— راسیاس معادله‌ی تابعی $f(x+y) + f(x-y) = ۲f(x) + ۲f(y)$ را مورد بحث و بررسی قرار داد.

تابع مربعی $f(x) = cx^۲$ $(c \in \mathbb{R})$ در معادله‌ی تابعی $f(x+y) + f(x-y) = ۲f(x) + ۲f(y)$ صدق می‌کند. این معادله‌ی تابعی، معادله‌ی تابعی مربعی نامیده می‌شود و هر جواب این معادله یک تابع مربعی می‌باشد.

پایداری انواع مختلفی از معادلات تابعی توسط دانشمندانی چون چولوا، بایی، پارک، لی، کیم، گجدا، جان، چنج و ... بررسی شده است.

تابع مکعبی $f(x) = cx^۳$ در معادله‌ی تابعی

$$f(۲x+y) + f(۲x-y) = ۲f(x+y) + ۲f(x-y) + ۱۲f(x) \qquad (۳.۰)$$

صدق می‌کند [۱۰]، این معادله‌ی تابعی را معادله‌ی تابعی مکعبی می‌نامند.

معادله‌ی تابعی زیر نوع جدیدی از معادله‌ی تابعی مکعبی فوق می‌باشد

$$\begin{aligned} &f(x+y+۲z) + f(x+y-۲z) + f(۲x) + f(۲y) \\ &= ۲[f(x+y) + ۲f(x+z) + ۲f(x-z) + ۲f(y+z) + ۲f(y-z)] \end{aligned} \qquad (۴.۰)$$

---

[۱۰] F.Skof

[۱۱] P.W.Cholewa

[۱۲] S.Czerwik

در این مقاله پایداری هایرز—اولام—راسیاس تعمیم یافته را برای معادله‌ی تابعی مکعبی (۳.۰) و (۴.۰) بررسی می‌کنیم و معادله‌ی تابعی (۴.۰) را به معادله‌ی تابعی مکعبی n—بعدی

$$f(\sum_{j=1}^{n-1} x_j + 2x_n) + f(\sum_{j=1}^{n-1} x_j - 2x_n) + \sum_{j=1}^{n-1} f(2x_j) = 2f(\sum_{j=1}^{n-1} x_j) + 4\sum_{j=1}^{n-1}(f(x_j + x_n) + f(x_j - x_n)) \quad (5.0)$$

تعمیم می دهیم و پایداری هایرز—اولام—راسیاس تعمیم یافته‌ی این معادله‌ی تابعی را در فضاهای مختلف از جمله مدول های باناخ روی جبر باناخ و روی C^*—جبر بررسی می‌کنیم، همچنین پایداری این معادله‌ی تابعی و معادله‌ی تابعی (۴.۰) با استفاده از قضیه‌ی جایگزین نقطه‌ی ثابت مورد بررسی قرار می‌گیرد. هم چنین لازم به ذکر است که این پایان نامه، بر اساس مراجع [۷]، [۱۰] و [۲۳] تدوین و تنظیم گردیده است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی دلخواه و غیرتهی و d تابعی حقیقی بر $X \times X$ باشد به طوری که

۱) به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(x,y) \geq 0$$

و بعلاوه $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$.

۲) به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(x,y) = d(y,x)$$

۳) به ازای هر $x, y, z \in X$،

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

در این صورت d را یک متر روی X و (X,d) را یک فضای متریک می‌نامند.

مثال : مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و مجموعه‌ی اعداد گویا $\mathbb{Q}$ با متر $d(x,y) = |x-y|$ فضاهای متری هستند.

تعریف ۲.۱. فضای برداری X را یک فضای نرمدار گویند اگر به ازای هر $x \in X$ یک عدد حقیقی و نامنفی مانند $||x||$ (خوانده می‌شود نرم x)، چنان مربوط باشد که

۱) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، داشته باشیم

$$||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$$

۲) به ازای هر $x \in X$ و $x \neq 0$، داشته باشیم: $0 < ||x||$،
بعلاوه $x = 0$ اگر و تنها اگر $||x|| = 0$.

۳) برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \text{(نامساوی مثلثی)}$$

تذکر: از نامساوی مثلثی در تعریف نرم نتیجه می‌شود که برای هر $x, y, z \in X$ داریم

$$||x-z|| \leq ||x-y|| + ||y-z||$$

تذکر: واضح است که هر فضای نرمدار را می‌توان با تعریف تابع متر زیر، به یک فضای متریک تبدیل کرد

$$d(x,y) = ||x-y||$$

تعریف ۳.۱. نقطه‌ی $x_\circ$ را نقطه‌ی ثابت تابع f گویند هرگاه $f(x_\circ) = x_\circ$.

قضیه ۴.۱ (قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت). فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل باشد، اگر f تابعی پیوسته از X به توی X باشد و عدد مثبت و کوچکتر از واحد α موجود باشد به طوری که به ازای هر x, y از X داشته باشیم

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$$

آنگاه نقطه‌ای منحصربفرد مانند c از X چنان موجود است که

$$f(c) = c.$$

تعریف ۵.۱. در فضای نرمدار X دنباله‌ی $\{x_n\}$ را کوشی گوییم، هرگاه به ازای هر عدد حقیقی $\varepsilon > 0$، عدد صحیح N وجود داشته باشد به طوری که برای هر اعداد طبیعی $n, m > N$ داشته باشیم، $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

تعریف ۶.۱. فضای نرمدار X را یک فضای باناخ گوییم، هرگاه هر دنباله کوشی در X با متر $d(x,y) = \|x - y\|$، همگرا در X باشد. از این رو به فضای نرمدار X که با متر حاصل از نرمش تام باشد، فضای باناخ گویند.

تعریف ۷.۱. هر گاه هر دنباله‌ی کوشی در مجموعه‌ی X به نقطه ای از X همگرا باشد آنگاه گوییم d یک متر تام یا کامل بر X است، به عبارت دیگر فضای متریک (X,d) کامل است هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در X به نقطه ای از X همگرا باشد.

تعریف ۸.۱. فرض کنید X یک مجموعه باشد، تابع $d : X \times X \to [0, \infty]$ یک متر تعمیم یافته روی X نامیده می‌شود اگر و فقط اگر ویژگی های یک متر را داشته باشد.
اختلاف یک فضای متری تعمیم یافته با فضای متریک در این است که در فضای متریک تعمیم یافته فاصله‌ی دو نقطه $+\infty$ نیز می‌تواند باشد.

تعریف ۹.۱. (الف) گردایه‌ی τ از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی X را یک توپولوژی در X نامند، اگر دارای ویژگی‌های زیر باشد

۱) $\phi \in \tau$ و $X \in \tau$.

۲) به ازای هر تعداد متناهی از اعضای τ مانند $V_1, V_2, ..., V_n$ داشته باشیم

$$V_1 \bigcap V_2 \bigcap ... \bigcap V_n \in \tau.$$

۳) هرگاه V_α گردایه‌ی دلخواهی از اعضای τ (متناهی، شمارش پذیر یا ناشمارش پذیر) باشد، آنگاه $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

(ب) هرگاه τ یک توپولوژی در X باشد، آنگاه X را یک فضای توپولوژیک و اعضای τ را مجموعه‌های باز می‌نامند.

(پ) هرگاه X و Y دو فضای توپولوژیک بوده و f نگاشتی از X به‌توی Y باشد، آنگاه گوییم f پیوسته است اگر به ازای هر مجموعه‌ی باز V در Y، $f^{-1}(V)$ مجموعه‌ی بازی در X باشد.

تعریف ۱۰.۱. (الف) گردایه‌ی M از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی X را یک $\sigma-$جبر در X گوییم اگر M از خواص زیر بهره‌مند باشد

۱) $X \in M$

۲) هرگاه $A \in M$، آنگاه $A^c \in M$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است.

۳) هرگاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای $n = 1, 2, 3...$، $A_n \in M$، آنگاه $A \in M$.

(ب) هرگاه M یک $\sigma-$جبر در X باشد، آنگاه X را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای M را مجموعه‌های اندازه پذیر در X می نامیم.

(پ) هرگاه X یک فضای اندازه‌پذیر، Y یک فضای توپولوژیک، و f نگاشتی از X به توی Y باشد، آنگاه گوییم f اندازه پذیر است اگر به ازای هر مجموعه‌ی باز V در Y، $f^{-1}(V)$ یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر در X باشد.

قضیه ۱۱.۱ اگر $\mathbb{F}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، کوچکترین $\sigma-$جبر در X مانند m^* موجود است به‌طوری که $\mathbb{F} \subset m^*$.

تعریف ۱۲.۱. مجموعه‌های بورل: فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. بنابر قضیه‌ی فوق کوچکترین $\sigma-$جبر مانند $\mathbb{D}$ در X هست به‌طوری که هر مجموعه‌ی باز در X متعلق به $\mathbb{D}$ است، اعضای $\mathbb{D}$ را مجموعه‌های بورل X می‌نامند.

تعریف ۱۳.۱. تابع بورل: اگر $\mathbb{D}$ یک $\sigma-$جبر باشد، می توان X را یک فضای اندازه‌پذیر در نظر گرفت که در آن مجموعه‌های بورل نقش مجموعه‌های اندازه‌پذیر را دارند. به‌طور خلاصه، فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathbb{D})$ را در نظر می‌گیریم. هرگاه $f : X \to Y$ یک نگاشت پیوسته از X بوده و Y یک فضای توپولوژیک باشد آنگاه از تعاریف واضح است که به ازای هر مجموعه‌ی باز V در Y، $f^{-1}(V) \in \mathbb{D}$. به عبارت دیگر، هر نگاشت پیوسته در X را اندازه‌پذیر بورل می‌نامند.
نگاشتهای اندازه پذیر بورل را اغلب نگاشتهای بورل یا توابع بورل می‌نامند.

تعریف ۱۴.۱. تابع $f : R \to R$ جمع پذیر گفته می‌شود اگر برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

تعریف ۱۵.۱. فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. تابع $f : R^n \to R$ را جمع پذیر n ـ تایی گوییم، هرگاه نسبت به هر متغیرش جمع پذیر باشد.

تعریف ۱۶.۱. تابع $f : R^n \to R$ را متقارن گوییم اگر برای هر جایگشت $\{\pi(۱), \pi(۲), \cdots, \pi(n)\}$ از $\{۱, ۲, \cdots, n\}$ داشته باشیم

$$f(x_۱, \cdots, x_n) = f(x_{\pi(۱)}, x_{\pi(۲)}, \cdots, x_{\pi(n)})$$

تعریف ۱۷.۱. تابع $f : X \to Y$ را یک تابع درجه دوم یا مربعی نامند، اگر برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$f(x+y) + f(x-y) = ۲f(x) + ۲f(y).$$

معادله‌ی تابعی فوق را معادله‌ی تابعی درجه دوم اصلی می نامند.

قضیه ۱۸.۱ تابع $f : R \to R$ را یک تابع درجه دوم است اگر و تنها اگر یک تابع جمع پذیر دوتایی متقارن یکتا مانند B، وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in R$، $f(x) = B(x,x)$.
تابع B همواره به صورت زیر تعریف می‌شود

$$B(x,x) = \frac{۱}{۴}(f(x+y) - f(x-y)).$$

تعریف ۱۹.۱. فضای برداری $(A,+)$ همراه با عمل ضرب $(.)$ در A را روی میدان F، یک جبر می‌نامند، هرگاه به ازای هر $x,y,z \in A$ و به ازای هر اسکالر $\alpha \in F$ داشته باشیم

۱) $(x.y).z = x.(y.z)$

۲) $x.(y+z) = x.y + x.z$

۳) $\alpha.(x.y) = (\alpha.x).y = x.(\alpha.y)$

تذکر: اگر فضای برداری A روی میدان اعداد مختلط یا اعداد حقیقی باشد، A را به ترتیب جبر مختلط یا جبر حقیقی می‌نامند.

تعریف ۲۰.۱. فرض کنید A یک جبر روی میدان اعداد مختلط باشد، جبر A را یک جبر نرمدار می‌نامند، هرگاه برای هر x در A عدد حقیقی $\|x\|$،(که نرم x نامیده می‌شود) با خاصیت های زیر موجود باشد

۱) به ازای هر $x \in A$،

$$\|x\| \geq ۰$$

۲) به ازای هر $x,y \in A$،

$\|x\| = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$

۳) به ازای هر $x,y \in A$،

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

۴) به ازای هر $x \in A$ و به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$،

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$$

۵) به ازای هر $x, y \in A$،

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

تعریف ۲۱.۱. اگر جبر نرمدار A، نسبت به نرم تعریف شده روی A کامل باشد، در این صورت آنرا جبر باناخ می‌نامند.

تعریف ۲۲.۱. هرگاه A یک جبر مختلط باشد، نگاشت $* : A \to A$ با تعریف $*(x) = x^*$، را یک عمل برگشت می نامیم، هر گاه به ازای هر $x, y \in A$ و به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ دارای خواص زیر باشد

۱) $(x+y)^* = x^* + y^*$

۲) $(\alpha x)^* = \bar{\alpha} x^*$

۳) $(xy)^* = y^* x^*$

۴) $(x^*)^* = x$

تعریف ۲۳.۱. جبر باناخ A با عمل برگشت $*$ ، را یک C^*−جبر نامند، هرگاه به ازای هر $x \in A$،

$$\|x^* x\| = \|x\|^۲.$$

تعریف ۲۴.۱. عنصر $a \in A$ را خودالحاق می گویند اگر $a = a^*$. برای هر عنصر $a \in A$، عناصر خودالحاق $b, c \in A$ وجود دارند به طوری که، $a = b + ic$ (که $b = \frac{۱}{۲}(a + a^*), c = \frac{۱}{۲i}(a - a^*)$).

همچنین عناصر aa^* و a^*a خودالحاق هستند. مجموعه‌ی عناصر خودالحاق A را با A_{sa} نشان می‌دهند.

تعریف ۲۵.۱. A را یک C^*–جبر یکال با رتبه‌ی حقیقی صفر نامند، اگر اشتراک مجموعه‌ی عناصر وارون پذیر و خودالحاقی A، در مجموعه‌ی عناصر خودالحاقی A، چگال باشد.

تعریف ۲۶.۱. فرض کنید A یک جبر و M فضای خطی روی میدان F باشند، M را یک A–مدول چپ می‌گویند، هرگاه نگاشت

$$A \times M \to M$$

$$(a, m) \to am$$

در اصول زیر صدق کند

۱) به ازای هر ثابت a در A، نگاشت $m \mapsto am$ روی M خطی باشد.

۲) به ازای هر ثابت m در M، نگاشت $a \mapsto am$ روی A خطی باشد.

۳) به ازای هر $a_۱, a_۲ \in A$ و به ازای هر $m \in M$،

$$a_۱.(a_۲.m) = (a_۱.a_۲).m$$

تذکر: نگاشت تعریف شده‌ی $(a, m) \mapsto am$ را ضرب مدولی می‌نامند.

تعریف ۲۷.۱. A–مدول چپ M را یکدار می‌گویند اگر A دارای عضو یکه (واحد) e باشد و برای هر $m \in M$، $em = m$.

تعریف ۲۸.۱. فرض کنید A یک جبر نرمدار روی میدان F و M یک فضای خطی نرمدار روی میدان F باشد. M را A–مدول چپ نرمدار می‌گویند اگر M، A–مدول چپ باشد و در شرط زیر صدق کند:

عدد ثابتی مانند k موجود باشد به طوری که به ازای هر $m \in M$ و $a \in A$،

$$\|am\| \leq k\|a\|\|m\|.$$