بسم الله الرحمن الرحيم

١٤١٤

دانشگاه بین المللی امام خمینی

IMAM KHOMEINI INTERNATIONAL UNIVERSITY

وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان:

پیش شرط سازی روش تکراری فوق تخفیف تسریع یافته (AOR)

استاد راهنما:

آقای دکتر سعید عباس بندی

استاد مشاور:

آقای دکتر داوود رستمی

تدوین:

مجید سخاوتی

بهمن ماه ۱۳۸۷

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

صورت جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان نامه آقای مجید سخاوتی دانشجوی مقطع کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی-کاربردی در مورخ ۸۷/۱۱/۸ تحت عنوان « پیش شرط سازی روش تکراری فوق تخفیف تسریع یافته (AOR) » در دانشگاه تشکیل گردید و مورد تأیید نهایی هیأت داوران قرار گرفت .

هیأت داوران :

۱- استاد راهنما: آقای دکتر سعید عباس بندی امضاء

۲- استاد مشاور: آقای دکتر داوود رستمی امضاء

۳- عضو هیأت علمی به عنوان داور خارجی:
آقای دکتر شهنام جوادی امضاء

۴- عضو هیأت علمی به عنوان داور داخلی:
آقای دکتر علی آبکار امضاء

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی:
آقای دکتر عبدالرحمن رازانی امضاء

تقدیم به

پدر بزرگوارم

مادر مهربانم

و خواهران دلسوزم

پیش شرط سازی روش فوق تخفیف تسریع یافته (AOR)

چکیده

به طور کلی برای حل یک دستگاه خطی $Ax = b$ روش های تکراری و روش‌های مستقیم مطرح است. از روش های تکراری معروف می توان به روش های ژاکوبی، گوس- سایدل و SOR اشاره کرد که کاربرد های فراوانی در علوم مهندسی دارند. یک تعمیم دو پارامتری از روش SOR منجر به روشی موسوم به روش تکراری AOR می گردد. در این روش ماتریس تکرار، تابعی از مولفه های A بوده و ضریب تکرار جدید یک ماتریس پایین مثلثی است. روش AOR در عمل نشان داده که از دیگر روش های تکراری مشابه کارآیی بهتری دارد. تشریح و تحلیل همگرایی این روش مورد بحث قرار می گیرد. با بزرگ بودن ابعاد ماتریس ضرایب دستگاه خطی، نیاز به سرعت همگرایی بالا در روش های تکراری از جمله روش تکراری AOR ضروری است. از آنجا که سرعت همگرایی روش های تکراری تحت تاثیر خواص طیفی ماتریس تکرار هستند، در پی سرعت بخشیدن به روش های تکراری، تکنیک پیش شرط سازی روش های تکراری مطرح می گردد. همانطور که متداول است عبارت « پیش شرط سازی » اشاره به تبدیل دستگاه خطی $Ax = b$ به دستگاه معادل آن یعنی $PAx = Pb$ دارد که خواص همگرایی بهتری را برای روش های تکراری دارا باشد. (P ماتریسی نامنفرد است) دو پیش شرط P_α و P_β، معرفی شده در این پایان نامه، منجر به کاهش شعاع طیفی ماتریس تکرار روش می شوند. بنابراین تعداد تکرار در روش AOR را بهبود می‌بخشند. این دو پیش شرط با مقادیر مختلف پارامتر های α و β، نتایج بهتری از روش تکراری AOR بوجود می آورند.

واژه های کلیدی : دستگاه های خطی – روش تکراری فوق تخفیف تسریع یافته (AOR) – روش پیش شرطی AOR .

* Wu M. , Wanga L. and Song Y. , Preconditioned AOR iterative method for linear systems, Appl. Numer. Math. 57 (2007) 672-685.

تقدیر و تشکر

بعد از سپاس به درگاه حق تعالی، بر خود فرض می دانم که از استاد ارجمند جناب آقای دکتر سعید عباس بندی که همواره راهنمایی های ارزنده ایشان روشنگر مسیر من در تهیه و تدوین این رساله بوده است، صمیمانه سپاسگزاری نمایم.

از جناب آقای دکتر داوود رستمی به خاطر رهنمود های ارزنده اصلاحی ایشان که در کامل تر و دقیق تر شدن این رساله نقش بسزایی داشته اند، کمال تشکر را دارم. از جناب آقایان دکتر شهنام جوادی و دکتر علی آبکار که قبول زحمت نموده و داوری این پایان نامه را پذیرفتند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم.

همچنین از خانوادهٔ گرامی‌ام به ویژه پدر و مادر عزیزم که همواره در طول دوران تحصیلم مشوق و مایه دلگرمی من بوده‌اند، نهایت تشکر را دارم.

امیدوارم پژوهش حاضر رضایت خاطر دوستداران علم را جلب نماید.

مجید سخاوتی

بهمن ۱۳۸۷

فهرست مندرجات

مقدمه

بسیاری از مسایل مهندسی، مدل های فیزیکی، بیولوژی و علوم اجتماعی به حل دستگاه‌های خطی منجر می شوند. بعلاوه در تئوری بهینه سازی، حل دستگاه های غیرخطی، تقریب توابع، حل عددی مسایل مقدار مرزی معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات با مشتقات جزئی، معادلات انتگرالی، استنتاج آماری و بسیاری از مسایل دیگر، به دستگاه معادلات خطی بر خورد می کنیم. فرم کلی بیشتر این مسائل، به صورت دستگاه خطی $Ax = b$ است. که A را ماتریس ضرایب، x را بردار مجهول و b را بردار مقادیر سمت راست می نامند. حل این دستگاه در حالتی که بعد ماتریس A کوچک باشد با روش های مستقیم ساده است. ولی در صورتی که بعد ماتریس A بزرگ باشد یا ماتریس ضرایب تنک باشد (یعنی بسیاری از مولفه‌های آن صفر باشند) بهتر است از روش های تکراری استفاده شود. به عنوان مثال دستگاه‌های خطی با بیش از ۱۰۰۰۰۰ متغیر در حل معادلات دیفرانسیل جزئی مطرح می شوند. (ماتریس ضرایب برای این دستگاه‌های خطی تنک است) فرآیندی تکراری یک روش کارآمد برای حل این دستگاه‌های بزرگ فراهم می سازد.

روش های تکراری قدمتی حدود ۱۹۰ سال دارند. اولین روش تکراری برای حل معادلات خطی منسوب به کارل فردریش گاوس[1] می باشد. روش کمترین مربعات گاوس، او را به حل یک دستگاه خطی سوق داد که ابعاد ماتریس ضرایب آن، برای حل دستگاه، با استفاده از

[1] Carl Friedrich Gauss

روش حذفی گاوس بسیار بزرگ بود. روش تکرار وی تحت عنوان

Supplementum theoriae combinations observationum erroribus minime

طی سال های ۱۸۱۹ تا ۱۸۲۲ میلادی تشریح گردید، که امروزه به روش بلوکی گاوس- سایدل مشهور است. یک روش مشابه با روش تکراری گاوس توسط کارل گوستاو ژاکوبی[۲] ارائه گردید. در سال ۱۸۷۴، فلیپ لودوریگ سایدل[۳] شاگرد ژاکوبی، یک روش تکراری با استفاده از تقریبات پی در پی برای حل سیستم های خطی ناشی از روش تقریب کمترین مربعات، ارائه نمود. اما با پیدایش کامپیوترهای الکترونیکی، ثابت گردید که روش‌های تکراری که گاوس، ژاکوبی و سایدل مطرح نموده‌اند، برای دستگاه های معادلات خطی با ابعاد بزرگ، دارای همگرایی بسیار کندی هستند. بعد از صد سال رکود در مبحث روش های تکراری، سوث ول[۴] طی مقالاتی به منظور سرعت بخشیدن به همگرایی روش گاوس سایدل تغیراتی را روی این روش امتحان نمود. در سال ۱۹۴۸ اشتین[۵] و رزنبرگ[۶] با اشاره به روش‌های تکراری گاوس سایدل و ژاکوبی در مورد شرایط همگرایی این روش ها بحث نمودند. در سال ۱۹۵۰ یانگ[۷] در [۳۰] موفق به یک پیشرفت غیره منتظره در مطالعه روش های تکراری گردید. تغیرات اعمال شده توسط ایشان در روش گاوس سایدل منجر به یک شتاب قابل توجه در همگرایی این روش گردیدکه بعدها به روش SOR مشهور گردید. سپس در سال ۱۹۵۸ کاهان[۸] در [۱۴] قضایای بنیادی در ارتباط با همگرایی روش SOR ارائه و اثبات نمود.

[۲] Carl Gustav Jacobi

[۳] Phillip Ludwing Seidel

[۴] Southwell

[۵] Stein

[۶] Rosenberg

[۷] Young

[۸] Kahan

در ادامه کارهای یانگ، در سال ۱۹۷۸ هجی دیموس[۹] روش تکراری AOR[۱۰] را معرفی کرد و روش های گوس- سایدل، ژاکوبی و SOR را حالت های خاصی از روش AOR عنوان کرد. این روش یک تعمیم دو پارامتری از روش SOR است. روش AOR بسیار انعطاف پذیر بوده و برای انواع ماتریس ها قابل اجرا است و در عمل نشان داده شد که از دیگر روش ها مشابه نتایج بهتر و دقیق تری در زمان کوتاهتر بدست می آورد.
امروزه در پی سرعت بخشیدن به روش های تکراری، تکنیک پیش شرط سازی روش های تکراری مطرح می گردد. همانطور که متداول است عبارت « پیش شرط سازی » اشاره به تبدیل دستگاه خطی $Ax = b$ به دستگاه معادل آن یعنی $PAx = Pb$ دارد که خواص همگرایی بهتری را برای روش های تکراری دارا باشد. (P ماتریسی نامنفرد است) در چند سال اخیر پیش شرط های مختلفی برای روش های گوس- سایدل و SOR ارائه شده است. ([۱۲]، [۱۵]، [۲۵]، [۳۱])

در این پایان نامه با تشریح روش تکراری AOR، به پیش شرط سازی روش AOR می‌پردازیم. و جهت کوچکتر کردن شعاع طیفی ماتریس تکرار روش AOR دو پیش شرط برای آن معرفی می کنیم.

سیر مطالب به شرح زیر دنبال می‌شود:

در فصل اول مروری بر تعاریف و مفاهیم جبر خطی عددی داریم. قضایا و لم های مورد نیاز در فصل های دوم و سوم را یادآوری می کنیم. روش‌های تکراری گوس- سایدل، ژاکوبی و SOR به اجمال بیان می شود. با ارائهٔ مثالی نتایج فصل را عنوان می کنیم.

در فصل دوم چگونگی بدست آوردن روش تکراری AOR بیان می شود. شرط

[۹] Hadjidimos

[۱۰] Accelerated Over Relaxesion

همگرایی روش AOR و ارتباط همگرایی آن با روش ژاکوبی و SOR بررسی می گردد. همچنین با این فرض که روش AOR برای مقادیری از پارامتر ها همگرا است بازه های همگرایی را ارائه می دهیم. در این فصل حل مثالی از معادلات با مشتقات جزئی با روش AOR آورده شده است.

در فصل سوم مفهوم پیش شرطی کردن روش های تکراری مطرح می گردد. روش تکراری AOR را مد نظر قرار داده و دو پیش شرط معرفی می کنیم. تاثیر این دو پیش شرط برماتریس تکرار روش AOR به طور جداگانه بررسی می شود. با ارائه مثال‌هایی در هر بخش، به مقایسه شعاع طیفی ماتریس تکرار روش AOR و روش پیش شرطی AOR می‌پردازیم.

در فصل چهارم نیز برنامه های این پروژه با نرم افزار $Matlab$ ارائه می گردد.

فصل ۱

مفاهیم پایه ای

۱.۱ مقدمه

با گسترش جبر خطی عددی در سال های اخیر مفاهیم و احکام جدید بسیاری بیان شده است که گنجاندن آنها در این پایان نامه سخت و دشوار است. با این توضیح حال با انتخاب تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی که مورد نیاز در فصل های بعدی است، بر مقدمات این علم گذری خواهیم داشت. تقسیم بندی مطالب این فصل به شرح زیر است:

دربخش ۲.۱ تعاریف چند ماتریس ذکر شده است. اعمال ماتریسی، قضایا و لم های مورد نیاز را نیز در این بخش یاد آوری می کنیم. برخی از لم ها و قضایا که با نگارش این پایان نامه تناسب دارد اثبات می شوند و برخی دیگر با معرفی مرجع به توضیح آن ها می پردازیم.

در بخش ۳.۱ چند روش تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ از جمله روش SOR به اجمال بیان می شوند. در ادامه با ارائه چند مثال در بخش ۴.۱ نتایج مورد نظر این فصل بررسی می گردد.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم

تعریف ۱.۱ ماتریس A را نامنفی[۱] (مثبت[۲]) نامیم هرگاه تمام عناصر ماتریس A نامنفی (مثبت) باشند و به صورت $A \geq 0$ ($A > 0$) نشان می دهیم.

تعریف ۲.۱ ماتریس متقارن A رامعین مثبت[۳] نامیم هرگاه برای بردار ناصفر x داشته باشیم: $x^tAx > 0$. در صورتی که $x^tAx \geq 0$، ماتریس A را معین نامنفی[۴] گویند.

تعریف ۳.۱ معکوس ماتریس $A_{n\times n}$، ماتریسی $n \times n$ است که با A^{-1} نشان می‌دهیم و داریم: $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

قضیه ۱.۱ برای معکوس ماتریس های مثلثی داریم:

(الف) معکوس یک ماتریس بالا مثلثی وارون پذیر، بالا مثلثی است.

(ب) معکوس یک ماتریس پایین مثلثی وارون پذیر، پایین مثلثی است.

اثبات و توضیحات این قضیه در مرجع [۲۴] می باشد.

تعریف ۴.۱ ماتریس $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ را zـ ماتریس نامیم هرگاه برای هر $i \neq j$ داشته باشیم: $a_{ij} \leq 0$.

---

[۱] Nonnegative

[۲] Positive

[۳] Positive definite

[۴] Nonnegative definite

مثال ۱.۱ ماتریس زیر یک zـ ماتریس نامنفرد است.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۰ & -۴ \\ -۲ & ۳ & -۳ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۴ & -۳ \\ -۲ & -۱ & -۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

تعریف ۵.۱ ماتریس $A = (a_{ij})_{n\times n}$ را lـ ماتریس نامیم هرگاه ماتریس A یک zـ ماتریس بوده و برای $i = ۱, ۲, \ldots, n$ داشته باشیم: $a_{ii} > ۰$.

مثال ۲.۱ ماتریس زیر یک lـ ماتریس نامنفرد است.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۰ & -۳ \\ -۲ & ۳ & -۱ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۳ & -۳ \\ -۲ & ۰ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

تعریف ۶.۱ ماتریس A را mـ ماتریس نامیم هرگاه A یک zـ ماتریس نامنفرد و $A^{-۱} \geq ۰$ باشد.

مثال ۳.۱ ماتریس زیر یک mـ ماتریس است.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -\frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ -\frac{۳}{۲} & ۲ & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & -\frac{۳}{۲} & ۲ & -\frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ & -\frac{۳}{۲} & ۲ \end{bmatrix}$$

تعریف ۷.۱ ماتریس $A=(a_{ij})_{n\times n}$ را در نظر می گیریم. ماتریس مقایسه ای[۵] A را به صورت $<A>=(\widehat{a}_{ij})$ تعریف می کنیم که در آن

$$\widehat{a}_{ij}=\begin{cases} \mid a_{ij}\mid, & i=j,\\ -\mid a_{ij}\mid, & i\neq j.\end{cases}$$

تعریف ۸.۱ ماتریس A رایک hـ ماتریس نامیم هرگاه $<A>$ یک mـ ماتریس باشد.

مثال ۴.۱ ماتریس زیر یک hـ ماتریس نامنفرد است.

$$A=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ & ۰ & ۰\\ -۱ & ۴ & -۱ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۴ & -۱\\ ۰ & ۰ & -۱ & ۴\end{bmatrix}$$

تعریف ۹.۱ گراف جهت دار[۶] ماتریس $A=(a_{ij})_{n\times n}$، که با $G(A)$ نمایش داده می‌شود، گرافی با n گره[۷] متمایز $P_۱, P_۲, ..., P_n$ است به طوری که یک کمان جهت دار از گره P_i به گره P_j رسم است اگر و فقط اگر $a_{ij}\neq ۰$. این گراف جهت دار همبند[۸] است هرگاه یک مسیر[۹] جهت دار برای هر دو گره آن وجود داشته باشد.

تعریف ۱۰.۱ ماتریس مربع $A=(a_{ij})_{n\times n}$ را تحویل پذیر[۱۰] نامیم هرگاه بتوان اندیس‌های $\{۱,۲,\ldots,n\}$ را به دو مجموعه غیر تهی $I=\{i_۱,\ldots,i_\mu\}$ و $J=\{j_۱,\ldots,j_\nu\}$

[۵] Comparison
[۶] Directed Graph
[۷] Vertex
[۸] Connected
[۹] Path
[۱۰] Reducible

تقسیم کرد به طوری که $\mu+\nu=n$ و برای $\beta=۱,۲,\ldots,\nu$ و μ و $\alpha=۱,۲,\ldots,\mu$ داشته باشیم:
$a_{i_\alpha j_\beta}=۰$. ماتریسی را که تحویل پذیر نباشد، تحویل ناپذیر[۱۱] نامیم.

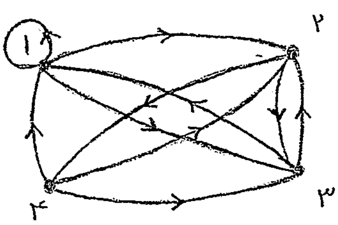
لم ۱.۱ ماتریس مربع $A=(a_{ij})_{n\times n}$ تحویل ناپذیر است هرگاه گراف جهت دار $G(A)$ همبند باشد.

اثبات : به [۲۴] مراجعه شود.

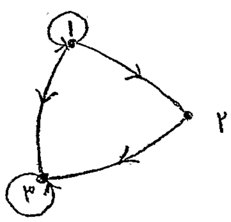
مثال ۵.۱ ماتریس های A و B را به شکل زیر در نظر گیرید.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

گراف های جهت دار این دو ماتریس به صورت زیر است.



G(A)



G(B)

گراف ماتریس A همبند است و در نتیجه ماتریس A تحویل ناپذیر است. اما گراف ماتریس B همبند نمی باشد. زیرا مسیری از گره ۳ به گره ۱ وجود ندارد. بنابراین ماتریس B تحویل ناپذیر نیست.

[۱۱] Irreducible

تعریف ۱.۱۱ فرض کنید A یک ماتریس مربع از مرتبه n باشد. بردار ناصفر x را بردار ویژه[۱۱] A گویند هرگاه عددی مانند λ موجود باشد بطوریکه $Ax = \lambda x$. λ را مقدار ویژه[۱۲] و x را بردار ویژه A نظیر λ می نامند.

تعریف ۱.۱۲ مجموعه مقادیر ویژه ماتریس A را طیف[۱۳] ماتریس A نامیده و با $\sigma(A)$ نشان می دهند. بعلاوه بزرگترین مقدار ویژه A را از حیث قدر مطلق شعاع طیفی[۱۴] A نامیده و با $\rho(A)$ نشان می دهند.

تعریف ۱.۱۳ فرض کنیم A ماتریس حقیقی باشد. نمایش $A = M - N$ را در صورتی که M ماتریسی نامنفرد است، تفکیک[۱۵] نامیم. این تفکیک را

الف) همگرا[۱۶] نامیم هرگاه $\rho(M^{-1}N) < 1$،

ب) منظم[۱۷] نامیم هرگاه $N \geq 0$ و $M^{-1} \geq 0$،

ج) نامنفی[۱۸] نامیم هرگاه $M^{-1}N \geq 0$،

د) *M_splitting* نامیم هرگاه ماتریس M یک m_ ماتریس و $N \geq 0$ باشد،

ه) *H_splitting* نامیم هرگاه ماتریس $< M > -|N|$ یک m_ ماتریس باشد،

و) *H_compatible* نامیم هرگاه $< A > = < M > - | N |$.

---

[۱۱] Eigen vector

[۱۲] Eigen value

[۱۳] Spectrum

[۱۴] Spectral radius

[۱۵] Splitting

[۱۶] Convergent

[۱۷] Regular

[۱۸] Nonnegative

واضح است که یک $M\_splitting$ ، تفکیک منظم است و تفکیک منظم نیز یک تفکیک نامنفی است.

تعریف ۱۴.۱ اگر $\lim_{m\longrightarrow\infty} A^m = 0$ گوییم ماتریس A همگرا است.

قضیه ۲.۱ احکام زیر معادلند:

الف) A همگرا است،

ب) به ازای نرمی $\lim_{m\longrightarrow\infty} \| A^m \| = 0$،

ج) $\rho(A) < 1$.

این قضیه توسط ایزاکسون و کلر در [۱۳] اثبات شده است.

قضیه ۳.۱ برای هر نرم طبیعی $\| . \|$ داریم:

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \| A^k \|^{1/k} = \rho(A) \tag{۱.۱}$$

اثبات : ابتدا نشان می دهیم $\rho(A) \leq \| A^k \|^{1/k}$. بدین منظور فرض کنیم u بردار ویژه واحد نظیر λ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A است. در این صورت با توجه به تعریف نرم طبیعی خواهیم داشت:

$$\| A \| = max_{\|x\|=1} \| Ax \| \geq \| \lambda u \| = | \lambda | \| u \| = | \lambda | = \rho(A)$$

در نتیجه داریم:

$$(\rho(A))^k = \rho(A^k) \leq \| A^k \| \tag{۲.۱}$$