فهرست مطالب

پیش گفتار

مطالعه ساختارهای جبری با استفاده از ویژگی گراف نظر ریاضی دانان زیادی را به خود جلب کرده و مقالات بسياري در اين زمينه نوشته شده است.

ایده برقراري ارتباط بين حلقه هاي جابجايي و نظريه گراف براي اولين بار در سال ۱۹۸۸ توسط بک [۱] طی مقاله اي (مرجع [۸])مطرح شده است. در تعريفی که اين رياضی دان ارايه داده است، همه عناصر حلقه به عنوان رئوس یک گراف قرار داده شده اند که گراف مقسوم علیه صفر حلقه R نامیده می شود و در این گراف دو رأس متمایز x و y مجاورند، اگر و تنها اگر $xy = 0$. بنابراین در این گراف رأس صفر با همه رئوس دیگر مجاور است.

مطالعه این گراف توسط ریاضی دانان دیگري ادامه یافت، تا این که در سال ۱۹۹۹ اندرسون [۲] و لیوینگستون [۳] طی مقاله ای تعریف جدیدی برای گراف مقسوم علیه صفر وابسته به حلقه هایی جابجایی ارائه دادند. در این تعریف رئوس گراف، مجموعه همه مقسوم علیه هاي صفر ناصفر حلقه هستند و دو رأس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $xy = 0$.

در نظریه حلقه ها، ایده آل ها هم مجموعه ای از عناصرند. بنابراین بهتر است گرافی تعریف شود که که رئوس آن به جاي عناصر، ایده آل هاي حلقه R باشند. بهبودي و راکعی در سال ۲۰۱۱ گرافی را تعریف کردند که به آن گراف ایده آل هاي پوچ ساز یکدیگر حلقه جابجایی R گفته می شود و با علامت $\mathbb{AG}(R)$ نشان داده می شود. مجموعه رئوس این گراف برابر مجموعه $\mathbb{A}(R)^\star = \mathbb{A}(R) - \{0\}$ شامل همه ایده آل هاي ناصفر R با پوچ ساز ناصفر بوده و دو رأس مجزای I و J مجاورند اگر و تنها

---

[۱] Beck

[۲] Anderson

[۳] Livingston

اگر $IJ = ۰$.

مطالعه این مقاله ادامه یافت، تا این که در سال ۲۰۱۱، عالی پور، اکبری، بهبودی، نیک اندیش، نیک مهر و شاویسی در مقاله، (مرجع [۴]) رده بندی گراف ایده آل های پوچ ساز یکدیگر حلقه جابجایی را مورد تحلیل قرار دادند.

هدف اصلی این پایان نامه تحلیل و بررسی گراف ایده آل های پوچ ساز یکدیگر حلقه جابجایی می باشد که در فصل سوم به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است. ساختار کلی این پایان نامه به صورت زیر می باشد.

در فصل اول مفاهیم و تعاریف ابتدایی از نظریه حلقه ها و نیز مفاهیم مقدماتی از نظریه گراف ها را ارایه می دهیم. فصل دوم از این پایان نامه گراف های وابسته به ساختارهای جبری شامل گراف مقسوم علیه صفر و نیز گراف ایده آل های پوچ ساز یکدیگر حلقه جابجایی را تعریف کرده و به ذکر تعدادی از قضایا در این مبحث می پردازیم. سرانجام در فصل سوم به تحلیل قضایای ضروری در باب گراف ایده آل های پوچ ساز یکدیگر حلقه جابجایی می پردازیم.

در سراسر این پایان نامه تمامی حلقه ها یکدار و جابجایی فرض شده اند. مجموعه مقسوم علیه هاي صفر حلقه را با $Z(R)$ و مجموعه ایده آل هاي ماکزیمال آن را با $Max(R)$ و مجموعه همه ایده آل هاي ناصفر را با $\mathbb{I}(R)$ نشان می دهیم.

"ریاضیات به منطقی بودنش زیباست"

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل، مفاهیم و تعاریف مقدماتی نظریه حلقه ها و نظریه گراف ها را بیان کرده و بعضی از خواص آنها را که مورد نیاز این پایان نامه می باشد بررسی می کنیم.

زندگی تنها به این درد می خورد که انسان به دو کار مشغول شود:

اول ریاضیات را بخواند.

دوم ریاضیات را به دیگران بیاموزد.

"ژاکوب ژاکوبی."

۱.۱ مفاهیم مقدماتی نظریه حلقه‌ها

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنیم R حلقه ای جابجایی باشد. عنصر $x \in R$ را **خودتوان**[۱] گوییم هرگاه $x^2 = x$.*

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنیم R حلقه ای جابجایی باشد. عنصر $x \in R$ را **پوچ توان**[۲] گوییم اگر عددی مانند $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که $x^n = 0$.*

تعریف ۳.۱.۱. *فرض کنیم I یک ایده آل و X زیرمجموعه ای دلخواه از حلقه R باشند. حاصل تقسیم $(I : X)$ به صورت*

$$(I : X) = \{r \in R \quad | \quad r.X \subseteq I\} = \{r \in R \quad | \quad r.x \in I \quad \forall x \in X\}$$

تعریف می شود. در حالت خاص $I = 0$، حاصل تقسیم

$$(0 : X) = \{r \in R \quad | \quad r.X = 0\} = \{r \in R \quad | \quad r.x = 0 \quad \forall x \in X\}$$

پوچ ساز X نامیده می شود و با $Ann_R(X)$ نشان داده می شود.

تعریف ۴.۱.۱. *فرض کنیم R حلقه ای جابجایی باشد.عنصر x از R **مقسوم علیه صفر**[۳] حلقه R نامیده می شود هرگاه صفر را عاد کند. به عبارت دیگر، عنصری مانند $0 \neq y \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $xy = 0$. مجموعه مقسوم علیه های صفر R را با $Z(R)$ نشان می دهیم.*

[۱] idempotent

[۲] nilpotent

[۳] zero divisor

لم ۵.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه و Σ مجموعه همه ایده آل هایی باشد که هر عنصرشان مقسوم علیه صفر است. در این صورت مجموعه Σ دارای عنصر ماکسیمال است و هر عنصر ماکسیمال Σ یک ایده آل اول است. بنابراین مجموعه مقسوم علیه های صفر R اجتماعی از ایده آل های اول است.*

برهان. تمرین ۱۴ فصل اول از مرجع [۷] را ببینید. □

تعریف ۶.۱.۱. *ایده آل M از حلقه R را **ماکسیمال**[۴] گوییم هرگاه نسبت به رابطه شمول، عضو ماکسیمال مجموعه ایده آل های سره R باشد.*

تعریف ۷.۱.۱. ***رادیکال جیکبسن** حلقه R برابر اشتراک همه ایده آل های ماکسیمال حلقه R است و آن را با $\mathbb{J}(R)$ نشان می دهیم.*

نکته ۸.۱.۱. هر ایده آل ماکسیمال از حلقه R یک ایده آل اول R نیز هست، یعنی $Max(R) \subseteq Spec(R)$. با این حال عکس آن همواره درست نیست. به عنوان مثال ایده آل صفر در حلقه اعداد صحیح ایده آل اولی است که ماکسیمال نیست.

قضیه ۹.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه و M یک R -مدول باشد و فرض کنیم I ایده آلی از R به گونه ای باشد که در میان همه پوچ ساز های عناصر ناصفر M ماکسیمال است، در این صورت I یک ایده آل اول است.*

برهان. قضیه ۶ از مرجع [۱۵] را ببینید. □

تعریف ۱۰.۱.۱. *حلقه جابجایی R با تعداد متناهی ایده آل ماکسیمال یک حلقه **نیم موضعی**[۵] نامیده می شود.*

تعریف ۱۱.۱.۱. *حلقه جابجایی R با دقیقا یک ایده آل ماکسیمال M یک حلقه **موضعی**[۶] نامیده می شود.*

[۴] maximal

[۵] semilocal ring

[۶] local ring

تعریف ۱.۱.۱۲. *فرض کنید R یک حلقه جابجایی و I ایده آل R باشد، در این صورت*

$$\sqrt{I} = \{r \in R| \quad \exists n \in \mathbb{N}; \quad r^n \in I\}$$

ایده آلی از R است که I را شامل می شود و ***رادیکال*** *I نام دارد. به عنوان حالت خاص رادیکال پوچ حلقه R اشتراک ایده آل های اول حلقه R می باشد. در واقع داریم:*

$$Nil(R) = \sqrt{\circ} = \{r \in R| \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad r^n = \circ\}.$$

برهان. لم و تعریف ۳.۴۶ از مرجع [۱] را ببینید. □

لم ۱.۱.۱۳. *فرض کنیم I ایده آل سره حلقه جابجایی R باشد.* ***واریته***[۷] *I را با نماد $Var(I)$ نشان می دهیم و به صورت*

$$Var(I) = \{P \in Spec(R): \quad I \subseteq P\}$$

تعریف می کنیم. در این صورت داریم

$$\sqrt{I} = \cap_{P \in Var(I)} P.$$

برهان. لم ۳.۴۸ از مرجع [۱] را ببینید. □

قضیه و تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنیم I ایده آل سره حلقه جابجایی R باشد، در این صورت $Var(I)$، حداقل یک عضو مینیمال نسبت به رابطه مشمولیت دارد. عضوهای مینیمال $Var(I)$ را **ایده آل های اول مینیمال** I می نامیم و با $Min(I)$ نشان می دهیم. اگر R ناصفر باشد، هر ایده آل اول مینیمال ایده آل صفر را یک **ایده آل اول مینیمال** R می نامیم. مجموعه همه ایده آل های اول مینیمال R را با $Min(R)$ نشان می دهیم.

برهان. قضیه ۳.۵۲ از مرجع [۱] را ببینید. □

[۷] Variety

نتیجه ۱.۱.۱۵. *فرض کنیم I ایده آل سره حلقه جابجایی R باشد، در این صورت داریم*

$$\sqrt{I} = \cap_{P\in Min(I)} P.$$

برهان. نتیجه ۵۴.۳ از مرجع [۱] را ببینید. □

نتیجه ۱.۱.۱۶. *اگر در لم ۱.۱.۱۲، قرار دهیم $I = ۰$، آن گاه*

$$\sqrt{۰} = \cap_{P\in Spec(R)} P = \cap_{P\in Min(R)} P.$$

برهان. نتیجه ۴۹.۳ از مرجع [۱] را ببینید. □

لم ۱.۱.۱۷. *فرض کنیم P ایده آل اول حلقه جابجایی R و $I_۱, ..., I_n$ ایده آل هایی از R باشند. در این صورت گزاره های زیر هم ارزند:*

۱. *به ازای هر $۱ \leqslant j \leqslant n$، $P \supseteq I_j$.*

۲. $P \supseteq \cap_{i=۱}^{n} I_i$.

۳. $P \supseteq \prod_{i=۱}^{n} I_i$.

برهان. لم ۵۵.۳ از مرجع [۱] را ببینید. □

تعریف ۱.۱.۱۸. *حلقه جابجایی R را* ***کاهش یافته***[۸] *گوییم، هرگاه $Nil(R) = ۰$. به عبارت دیگر فاقد عنصر پوچ توان ناصفر باشد.*

نتیجه ۱.۱.۱۹. *فرض کنی I یک ایده آل متناهی- مولد از حلقه کاهش یافته R باشد. در این صورت I مشمول در یک ایده آل اول مینیمال R است اگر و تنها اگر $Ann(I) \neq ۰$.*

برهان. نتیجه ۳.۲ از مرجع [۱۴] را ببینید. □

لم ۱.۱.۲۰. ***(لم براور)***. *فرض کنیم I یک ایده آل چپ مینیمال حلقه R باشد. در این صورت یا $I^۲ = ۰$ یا عنصر خودتوان $e \in I$ وجود دارد به طوری که $I = Re$.*

---

[۸] reduced

برهان. لم ۲۲.۱۰ از مرجع [۱۶] راببینید. □

لم ۲۱.۱.۱. *تعداد زیرفضاهای یک بعدی $V_d(q)$ برابر است با $\frac{q^d-1}{q-1}$ و با تعداد ابرصفحه های $V_d(q)$ برابر است. در $V_d(q)$، q تعداد عناصر میدان F و $d = dim_F(V)$.*

برهان. لم ۳.۲ از مرجع [۳] را ببینید. □

قضیه ۲۲.۱.۱. *برای هر $k \in \{1, 2, ..., d\}$ تعداد زیرفضاهای k بعدی $V_d(q)$ برابر است با*

$$\frac{(q^d-1)(q^{d-1}-1)...(q^{d-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)...(q-1)}.$$

برهان. تعداد زیرفضاهای k بعدی $V_d(q)$ را با N_k نشان می دهیم. فرض کنید U یک زیرفضای $k-1$ بعدی از $V_d(q)$ است. تعداد انتخاب های U برابر است با N_{k-1}. ابتدا تعیین می کنیم به چند طریق می توان U را به یک زیرفضای k بعدی از $V_d(q)$ توسعه داد. تعداد بردارهای ناصفر در $V_d(q) - U$ برابر است با $q^d - 1 - (q^{k-1} - 1) = q^d - q^{k-1}$؛ با افزودن زیرفضای تولید شده توسط هر یک از این بردارها به U، یک زیرفضای k بعدی از $V_d(q)$ حاصل می شود. اما تعدادی از این زیرفضاها با هم مساویند؛ اکنون این تعداد را محاسبه می کنیم. بنا به لم ۲۱.۱.۱، تعداد زیرفضاهای $k-1$ بعدی W_1 از یک فضای k بعدی W_2 برابر است با $\frac{q^k-1}{q-1}$ و تعداد بردارهای ناصفر در $W_2 - W_1$ برابر است با $q^k - 1 - (q^{k-1} - 1) = q^k - q^{k-1}$. با افزودن زیرفضای تولید شده توسط هر یک از این بردارهای به W_1 فضای W_2 حاصل می شود. بنابراین تعداد زیرفضاهای مساوی برابر است با

$$\frac{q^k-1}{q-1}(q^k - q^{k-1}) = q^{k-1}(q^k - 1)$$

در نتیجه

$$N_k = N_{k-1} \times \frac{q^d - q^{k-1}}{q^{k-1}(q^k - 1)}$$

که از آن حاصل می شود

$$N_k = N_{k-1} \times \frac{q^{d-k+1} - 1}{q^k - 1}$$

و با استفاده از استقرا روی k قضیه ثابت می شود. □

تذکر ۲۳.۱.۱. *فرض کنیم G_d به معنای تعداد زیرفضاهای یک فضای برداری V با بعد d روی میدان متناهی F_q باشد. در این صورت داریم*

$$G_d = ۱ + \Sigma_{۱\leq k\leq d}\frac{(q^d - ۱)(q^{d-۱} - ۱)...(q^{d-k} - ۱)}{(q - ۱)(q^۲ - ۱)...(q^k - ۱)}.$$

برهان. قضیه ۲۲.۱.۱، را ببینید. □

تعریف ۲۴.۱.۱. *فرض کنیم M مدولی روی حلقه جابجایی R باشد. گوییم M یک R-**مدول نوتری**[۹] است اگر در شرایط معادل زیر صدق کند:*

۱. *هرگاه $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده ای از زیرمدول های M باشد و*

$$G_۱ \subseteq G_۲ \subseteq ... \subseteq G_i \subseteq G_{i+۱} \subseteq ...,$$

آن گاه

$$\exists k \in \mathbb{N}: \quad \forall i \in \mathbb{N}; \quad G_k = G_{k+i}.$$

۲. *هر مجموعه ناتهی از زیرمدول های M شامل عضو **ماکسیمال** نسبت به رابطه شمول باشد.*

*شرط اول را **شرط زنجیر صعودی** برای زیرمدول های M و شرط دوم را **شرط ماکسیمال** برای زیرمدول های M گوییم.*

تعریف ۲۵.۱.۱. *فرض کنیم M مدولی روی حلقه جابجایی R باشد. گوییم M یک R-**مدول آرتینی**[۱۰] است اگر در شرایط معادل زیر صدق کند:*

۱. *هرگاه $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده ای از زیرمدول های M باشد و*

$$G_۱ \supseteq G_۲ \supseteq ... \supseteq G_i \supseteq G_{i+۱} \supseteq ...,$$

آن گاه

$$\exists k \in \mathbb{N}: \quad \forall i \in \mathbb{N}; \quad G_k = G_{k+i}.$$

[۹] Noetherian module

[۱۰] Artinian module

۲. *هر مجموعه ناتهی از زیرمدول های M شامل عضو **مینیمال** نسبت به رابطه شمول باشد.*

شرط (۱) را ***شرط زنجیر نزولی*** برای زیرمدول های M و شرط (۲) را ***شرط مینیمال*** برای زیرمدول های M گوییم.

تعریف ۲۶.۱.۱. *حلقه R را یک **حلقه نوتری**[۱۱] گوییم اگر به عنوان R -مدول نوتری باشد. هم چنین حلقه R را **حلقه آرتینی**[۱۲] گوییم اگر به عنوان R -مدول آرتینی باشد.*

نکته ۲۷.۱.۱. هر عنصر در یک حلقه آرتینی، مقسوم علیه صفر و یا وارون پذیر است.

لم ۲۸.۱.۱. *فرض کنیم R حلقه آرتینی باشد. در این صورت هر ایده آل اول R ماکسیمال است.*

برهان. لم ۳۹.۸ از مرجع [۱] را ببینید. □

لم ۲۹.۱.۱. *فرض کنیم R حلقه آرتینی باشد. در این صورت R تنها تعداد متناهی ایده آل ماکسیمال دارد.*

برهان. لم ۴۰.۸ از مرجع [۱] را ببینید. □

گزاره ۳۰.۱.۱. *فرض کنیم R حلقه آرتینی باشد. در این صورت رادیکال پوچ R؛ یعنی $\sqrt{0}$، یک ایده آل پوچ توان است.*

برهان. لم ۴۱.۸ از مرجع [۱] را ببینید. □

لم ۳۱.۱.۱. *فرض کنیم R حلقه موضعی و آرتینی با ایده آل ماکسیمال M باشد. در این صورت $Z(R) = Nil(R) = M$.*

قضیه ۳۲.۱.۱. ***(قضیه ساختاری حلقه های آرتینی)*** *. هر حلقه آرتینی R حاصل ضرب مستقیم متناهی منحصر به فرد حلقه هاي موضعی آرتینی است.*

برهان. قضیه ۷.۸ از مرجع [۷] را ببینید. □

[۱۱] Noetherian ring

[۱۲] Artinian ring

تعریف ۳۳.۱.۱. *ایده آل Q از حلقه جابجایی و یکدار R را یک **ایده آل ابتدایی** گوییم هر گاه:*

۱. *$Q \subsetneq R$؛ یعنی Q ایده آل سره R باشد،*

۲. *برای هر $x, y \in R$، اگر $xy \in Q$ آن گاه $x \in Q$ یا این که $m \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که $y^m \in Q$.*

*فرض کنیم Q ایده آل ابتدایی حلقه جابجایی R باشد. در این صورت $P = \sqrt{Q}$ یک ایده آل اول R است و می گوییم Q یک ایده آل P -**ابتدایی** است.*

برهان. لم ۵.۴ از مرجع [۱] را ببینید. □

لم ۳۴.۱.۱. *فرض کنیم I ایده آلی سره از حلقه جابجایی R باشد و P و Q ایده آل هایی از R باشند که شامل I هستند. در این صورت Q ایده آل P -ابتدایی R است اگر و تنها اگر Q/I ایده آل P/I -ابتدایی R/I باشد.*

برهان. تمرین ۸.۴ از مرجع [۱] را ببینید. □

تعریف ۳۵.۱.۱. *فرض کنیم I ایده آل سره ای از حلقه ی جابجایی R باشد. **تجزیه ابتدایی** I عبارت است از اشتراک تعداد متناهی از ایده آل های ابتدایی R که برابر I باشد؛ یعنی*

$$I = Q_1 \cap ... \cap Q_n : \quad \forall i = 1, ..., n; \quad \sqrt{Q_i} = P_i$$

(هرگاه عبارت فوق را به کار بریم منظور این است که به ازای هر i، Q_i ایده آل P_i -ابتدایی است)

*این تجزیه را **تجزیه ابتدایی مینیمال** I می گوییم اگر*

۱. *$P_1, ..., P_n$، n ایده آل اول متمایز R باشند،*

۲. *به ازای هر $j = 1, ..., n$ داشته باشیم، $Q_j \not\supseteq \cap_{i=1, i\neq j}^{n} Q_i$.*

گوییم I ایده آل تجزیه پذیر R است اگر تجزیه ابتدایی داشته باشد.

توجه کنید شرط (۲) را به صورت زیر نیز می توان نشان داد: به ازای هر $j = 1, ..., n$ داشته باشیم

$$I \neq \cap_{i=1, i\neq j}^{n} Q_i$$

و لذا Q_j زائد نیست و در واقع وجودش در تجریه ابتدایی $I = \cap_{i=1}^{n} Q_i$ لازم است.

قضیه ۳۶.۱.۱. ***(اولین قضیه یکتایی تجزیه ابتدایی)***. *فرض کنیم I ایده آل تجزیه پذیری از حلقه جابجایی R باشد و تجزیه های*

$$I = Q_1 \cap ... \cap Q_n : \quad \forall i = 1, ..., n; \quad \sqrt{Q_i} = P_i$$

و

$$I = Q'_1 \cap ... \cap Q'_{n'} : \quad \forall i = 1, ..., n'; \quad \sqrt{Q'_i} = P'_i$$

دو تجزیه ابتدایی مینیمال I باشند. ***در این صورت*** *$n = n'$ و*

$$\{P_1, ..., P_n\} = \{P'_1, ..., P'_n\}.$$

به عبارت دیگر تعداد جمله های یک تجزیه ابتدایی مفروض I و هم چنین مجموعه ایده آل های اولی که رادیکال های جمله های تجزیه اند، از آن تجزیه ابتدایی مینیمال مفروض مستقل اند؛ یعنی در تمام تجزیه های ابتدایی مینیمال I یکسان اند.

برهان. نتیجه ۱۸.۴ از مرجع [۱] را ببینید. □

تعریف ۳۷.۱.۱. *فرض کنیم I ایده آل تجزیه پذیری از حلقه جابجایی R و تجزیه*

$$I = Q_1 \cap ... \cap Q_n : \quad \forall i = 1, ..., n; \quad \sqrt{Q_i} = P_i$$

تجزیه ابتدایی مینیمال I باشد. در این صورت مجموعه n عضوی $\{P_1, ..., P_n\}$ را که بنا به اولین قضیه یکتایی تجزیه ابتدایی یگانه نیز هست، ***مجموعه ی ایده آل های اول وابسته به*** *I می نامیم و با $ass(I)$ نشان می دهیم. عضوهای $ass(I)$ را* ***ایده آل های اول وابسته به*** *I می نامیم.*

گزاره ۳۸.۱.۱. *فرض کنیم I ایده آلی سره از حلقه جابجایی نوتری R باشد و $P \in Spec(R)$.* ***در این صورت*** *$P \in ass(I)$ اگر و تنها اگر $a \in R$ موجود باشد به طوری که $(I : a) = P$؛ یعنی اگر و تنها اگر $\lambda \in R/I$ موجود باشد به طوری که*

$$(0 :_R \lambda) = Ann_R(\lambda) = P.$$

برهان. قضیه ۲۲.۸ از مرجع [۱] را ببینید. □

لم ۳۹.۱.۱. **(لم ناکایاما).** *فرض کنیم M یک R -مدول متناهی- مولد و I ایده آلی از R باشد که $I \subseteq \mathbb{J}(R)$. در این صورت $IM = M$ ایجاب می کند $M = 0$.*

برهان. لم ۲۴.۸ از مرجع [۱] را ببینید. □

حلقه کسر ها

تعریف ۴۰.۱.۱. *زیرمجموعه S از حلقه جابجایی R را* ***ضربی بسته***[۱۳] *گوییم هرگاه $1_R \in S$ و به ازای هر $s_1, s_2 \in S$، داشته باشیم $s_1 s_2 \in S$.*

لم ۴۱.۱.۱. *فرض کنیم S زیرمجموعه ضربی بسته حلقه جابجایی R باشد. به ازای هر $(a,s),(b,t) \in R \times S$، رابطه $\sim$ روی $R \times S$ با تعریف زیر،*

$$(a,s) \sim (b,t) \iff \quad \exists u \in S: \quad u(ta - sb) = 0$$

یک رابطه هم ارزی روی $R \times S$ است.

برهان. لم ۵.۱در مرجع [۱] را ببینید. □

تعریف ۴۲.۱.۱. *فرض کنیم شرایط در ۴۱.۱.۱، برقرار باشد. برای $(a,s) \in R \times S$ رده هم ارزی شامل (a,s) را با $\frac{a}{s}$ و مجموعه رده های هم ارزی $\sim$ را با $S^{-1}R$ نشان می دهیم. در این صورت $S^{-1}R$ تحت اعمال*

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta+sb}{st}, \quad \frac{a}{s}.\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

برای $a,b \in R$ و $s,t \in S$ حلقه ای جابجایی است. حلقه $S^{-1}R$ را ***حلقه کسر های*** *R نسبت به S می نامیم. عضو صفر این حلقه $\frac{0}{1}$ است که برای هر $s \in S$ با $\frac{0}{s}$ برابر است و عضو همانی ضربی آن $\frac{1}{1}$ است، که برای هر $s \in S$ با $\frac{s}{s}$ برابر است.*

[۱۳] multiplicatively closed

برهان. لم ۲.۵ در مرجع [۱] را ببینید. □

مثال ۴۳.۱.۱. اگر R دامنه صحیح باشد و $S = R - \{0\}$، آن گاه S یک زیرمجموعه ضربی بسته از R است و $S^{-1}R$ دقیقا همان **میدان کسرهای** حلقه R است.

مثال ۴۴.۱.۱. فرض کنیم P ایده آل اول حلقه جابجایی R باشد. در این صورت

$S = R - P$ زیرمجموعه ضربی بسته R است. در این حالت حلقه کسرها یعنی $S^{-1}R$ حلقه ای موضعی است که با R_P نشان داده می شود. حلقه R_P را حلقه حاصل از **موضعی سازی**[۱۴] R در ایده آل اول P گویند.

تعریف ۴۵.۱.۱. *فرض کنیم R حلقه ای جابجایی باشد و $S = R - Z(R)$. در این صورت $S^{-1}R$ را **حلقه خارج قسمتی تام** حلقه R گوییم و با $T(R)$ نمایش می دهیم.*

تعریف ۴۶.۱.۱. *فرض کنیم P یک ایده آل اول باشد. در این صورت **ارتفاع**[۱۵] P را با $ht(P)$ نشان می دهیم،که به صورت سوپریمم طول زنجیرهای به شکل $P = P_n \subsetneq \dots \subsetneq P_1 \subsetneq P_0$. از ایده آل های اول تعریف می شود، اگر این سوپریمم موجود باشد و اگر موجود نباشد ∞ تعریف می شود.*

*در حالت کلی اگر I ایده آل دلخواه R باشد **ارتفاع** I به صورت زیر تعریف می شود:*

$$ht(I) = inf\{ht(P) : \quad P \in Spec(R), \quad I \subseteq P\}.$$

*هم چنین، **بعد**[۱۶] حلقه R که با $dim(R)$ نشان داده می شود برابر با سوپریمم طول زنجیر $P_n \subsetneq \dots \subsetneq P_1 \subsetneq P_0$ از ایده آل های اول R تعریف می شود.*

گزاره ۴۷.۱.۱. *حلقه R آرتینی است اگر و تنها اگر R نوتری باشد و $dim(R) = 0$.*

برهان. قضیه ۸.۵ از مرجع [۷] راببینید. □

[۱۴] localization

[۱۵] height

[۱۶] dimension

تعریف ۴۸.۱.۱. فرض کنیم B یک حلقه و A زیرحلقه ای از B باشد که $1_B \in A$. عنصر $x \in B$ روی A **صحیح**[۱۷] گفته می شود اگر x ریشه یک چند جمله ای تکین با ضرایب در A باشد. یعنی در یک معادله به فرم زیر صدق کند:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0$$

که a_i ها عناصری از A هستند. مجموعه C از عناصر B که روی A صحیح هستند یک زیرحلقه از B است که شامل A بوده و حلقه C **بستار صحیح**[۱۸] A در B گفته می شود. اگر $C = A$ در این صورت A **به طور صحیح بسته**[۱۹] در B گفته می شود. اگر $C = B$ آن گاه حلقه B روی A صحیح گفته می شود.

تعریف ۴۹.۱.۱. فرض کنیم R یک دامنه صحیح و K میدان کسرهای آن باشد. R یک **حلقه ارزه**[۲۰] از میدان K است اگر برای هر $0 \neq x \in K$ یا $x \in R$ یا $x^{-1} \in R$ (یا هر دو).

گزاره ۵۰.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه ارزه از میدان کسرهای آن (یعنی K) باشد. آن گاه:

۱. R یک حلقه موضعی است،

۲. اگر R' یک حلقه باشد به طوری که $R \subseteq R' \subseteq K$ آن گاه R' نیز یک حلقه ارزه از K است،

۳. R (در K) به طور صحیح بسته است.

برهان. گزاره ۱۸.۵ از مرجع [۷] را ببینید. □

تعریف ۵۱.۱.۱. فرض کنیم K یک میدان باشد. یک **ارزیابی گسسته** [۲۱] روی K نگاشتی پوشا مانند $v : K^\star \longrightarrow \mathbb{Z}$ است($K^\star$ گروه ضربی $K - \{0\}$) است به طوری که:

۱. $v(xy) = v(x) + v(y)$ (به عبارت دیگر v یک همریختی گروهی است.)

[۱۷] integral

[۱۸] integral closure

[۱۹] integrally closed

[۲۰] valuation ring

[۲۱] discrete valuation

۲. $v(x+y) \geq min(v(x), v(y))$.

اگر $v : K^\star \longrightarrow \mathbb{Z}$ یک ارزیابی گسسته از میدان K باشد، آن گاه مجموعه

$$\{x \in K^\star | \quad v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$$

*یک زیرحلقه از میدان K و در واقع یک **حلقه ارزه** از میدان K است. این حلقه را **حلقه ارزه** v می نامیم.*

*دامنه صحیح R یک **حلقه ارزه گسسته** نامیده می شود اگر یک ارزیابی گسسته مانند v از میدان کسرهای K از R وجود داشته باشد به طوری که R حلقه ارزه v باشد.*

نکته ۵۲.۱.۱. اگر R یک حلقه ارزه گسسته باشد، آن گاه بنابر گزاره ۵۰.۱.۱، R یک حلقه موضعی است و ایده آل ماکسیمال آن مجموعه همه عناصر $x \in K$ است به طوری که $v(x) > 0$. به علاوه اگر دو عنصر $x, y \in R$ دارای ارزش یکسان باشند؛ یعنی اگر $v(x) = v(y)$ آن گاه:

$$v(xy^{-1}) = 0 \Longrightarrow \quad u = xy^{-1} \in U(R) \Longrightarrow \quad (x) = (y).$$

نکته ۵۳.۱.۱. اگر $I \neq 0$ ایده آلی در حلقه ارزه گسسته R باشد، بنا به اصل خوش ترتیبی یک کوچکترین عدد صحیح مانند k (در واقع k در $v(I)$ عضو ابنداست) و عنصری مانند $x \in I$ وجود دارند که $v(x) = k$. این نتیجه می دهد که I شامل هر $y \in R$ که $v(y) \geq k$ نیز هست. بنابراین تنها ایده آل های ناصفر R ایده آل هایی به فرم $M_k = \{y \in R : \quad v(y) \geq k\}$ هستند که تشکیل زنجیر یگانه $M \supset M_2 \supset M_3 \supset ...$ را می دهند بنابراین R نوتری است. به علاوه چون $v : K^\star \longrightarrow \mathbb{Z}$ پوشاست

$$\exists x \in M : \quad v(x) = 1 \Longrightarrow \quad M = (x), \quad M_k = (x^k); \quad (k \geq 1)$$

بنابراین M تنها ایده آل اول ناصفر R است و R دامنه موضعی نوتری از بعد ۱ است که هر ایده آل ناصفر آن توانی از ایده آل ماکسیمال M است. در واقع بسیاری از این خواص را می توان به عنوان خواص مشخصه حلقه های ارزه گسسته در نظر گرفت.

گزاره ۵۴.۱.۱. *فرض کنیم R یک دامنه موضعی نوتری از بعد ۱، M ایده آل ماکسیمال آن و $K = R/M$ میدان مانده ای R باشد. در این صورت احکام زیر هم ارزند:*

۱. *R حلقه ارزه گسسته است،*

۲. *R به طور صحیح بسته است،*

۳. *M ایده آل اصلی است،*

۴. *$dim_K(M/M^۲) = ۱$،*

۵. *هر ایده آل ناصفر توانی از M است،*

۶. *عنصری مانند $x \in R$ وجود دارد به طوری که هر ایده آل ناصفر به فرم (x^k) است که $k > ۰$.*

برهان. گزاره ۲.۹ ازمرجع [۷] را ببینید. □

مثال ۵۵.۱.۱. هر دامنه ایده آل اصلی R نوتری است (چون هر ایده آل آن متناهی–مولد است). به علاوه هر ایده آل اول ناصفر در R ماکسیمال بوده و بنابراین بعد R برابر با ۱ است. حال برای هر ایده آل اول ناصفر P از R حلقه موضعی R_P نیز یک دامنه ایده آل اصلی موضعی و نوتری است. پس بنا به گزاره ۵۴.۱.۱، حلقه R_P حلقه ارزه گسسته است.

لم ۵۶.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه ارزه باشد که میدان نباشد. آن گاه R نوتری است اگر و تنها اگر یک حلقه ارزه گسسته باشد.*

برهان. تمرین ۳ از فصل ۹ از مرجع [۷]را ببینید. □

تعریف ۵۷.۱.۱. *فرض کنیم M یک R –مدول باشد. عنصر $x \in R$ را یک عنصر M*–**منظم**[۲۲] *می نامیم هرگاه به ازای هر $z \in M$، اگر $xz = ۰$، آن گاه $z = ۰$. به عبارت دیگر x مقسوم علیه صفر روی M نباشد.*

[۲۲] M-regular

تعریف ۵۸.۱.۱. *عنصر r در حلقه R را R-**منظم**[۲۳] می نامیم اگر $r \notin Z(R)$ و r وارون پذیر نباشد.*

تعریف ۵۹.۱.۱. *دنباله $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ از عناصر R یک دنباله M-**منظم** یا به طور ساده تر یک M-**دنباله**[۲۴] است اگر در شرایط زیر صدق کند:*

۱. *به ازای هر $i = 1, ..., n$، x_i یک عنصر $\frac{M}{(x_1, ..., x_{i-1})M}$ - منظم باشد.*

۲. $\frac{M}{\mathbf{x}M} \neq 0$.

یک دنباله منظم یک R - دنباله است.

مثال ۶۰.۱.۱. دنباله $\mathbf{x} = (X_1, ..., X_n)$ از مجهول ها در حلقه چندجمله ای $R = S[X_1, ..., X_n]$ یک دنباله منظم است.

تعریف ۶۱.۱.۱. *یک R-**دنباله**[۲۵] یک d - تایی $(r_1, r_2, ..., r_d)$ از عناصر R است به طوری که به ازای هر $i \leq d$، r_i یک عنصر $\frac{R}{(r_1, r_2, ..., r_{i-1})}$ - منظم باشد.*

فرض کنیم R یک حلقه نوتری و M یک R - مدول باشد. اگر $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ یک M - دنباله باشد، در این صورت زنجیر $(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset ... \subset (x_1, ..., x_n)$ اکیدا صعودی است. بنابراین هر M - دنباله را می توان به یک M - دنباله ماکسیمال گسترش داد. به این صورت که یک M - دنباله $\mathbf{x}$ (مشمول در یک ایده آل I) ماکسیمال (در I) است اگر به ازای هر $x_{n+1} \in R$ ($x_{n+1} \in I$)، دنباله $(x_1, ..., x_{n+1})$ یک M - دنباله ماکسیمال نباشد. اگر M یک R - مدول متناهی- مولد باشد، تمام M - دنباله های ماکسیمال در یک ایده آل I با شرط $IM \neq M$ طول یکسان دارند.

تعریف ۶۲.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه نوتری، M یک R - مدول متناهی- مولد و I ایده آلی باشد*

[۲۳] R-regular

[۲۴] M-sequence

[۲۵] R-sequence

که $IM \neq M$. در این صورت طول یکسانی از M - دنباله های ماکسیمال در I را **درجه**[۲۶] I روی M می نامیم و با $grade(I, M)$ نشان می دهیم. اگر $IM = M$ ، آن گاه $grade(I, M) = \infty$.

تعریف ۶۳.۱.۱. فرض کنیم $(R, \mathfrak{M}, K)$ یک حلقه موضعی نوتری و M یک R - مدول متناهی- مولد باشد. در این صورت درجه $\mathfrak{M}$ روی M را **عمق**[۲۷] M می نامیم و با $depth(M)$ نشان می دهیم.

تعریف ۶۴.۱.۱. فرض کنیم I ایده آلی از حلقه R باشد. **درجه** I در R بلندترین طول R - دنباله ها که مولفه های آن ها در I باشند و با $grade(I, R)$ نشان می دهیم. به ویژه اگر (R, M) حلقه موضعی باشد در این صورت **درجه** M در R **عمق** R نامیده می شود و با $depth(R)$ نشان داده می شود.

گزاره ۶۵.۱.۱. فرض کنیم (R, M) یک حلقه موضعی نوتری باشد. در این صورت

$$depthR \leq dimR.$$

برهان. گزاره۱۲.۲.۱ از مرجع [۱۰] را ببینید. □

تعریف ۶۶.۱.۱. حلقه R را **کوهن-مک کولی**[۲۸] گویند هرگاه برای هر ایده آل I از R داشته باشیم:

$$grade(I, R) = ht(I).$$

فرض کنیم M یک مدول روی حلقه جابجایی R باشد. مدول دوگان $M^\star = Hom_R(M, R)$ را در نظر گرفته می دانیم یک نگاشت طبیعی $\Phi : M \longrightarrow M^{\star\star}$ وجود دارد که ضابطه آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$\forall m \in M \quad \Phi(m) = \Phi_m : M^\star \longrightarrow R, \quad \Phi_m(f) = f(m).$$

[۲۶] grade

[۲۷] depth

[۲۸] Cohen-Macaully ring