دانشگاه کردستان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

عنوان:

مشتق ها و مشتق های جردن روی جبرهای باناخ

پژوهشگر:

جمال خلیلی خضرلک

استاد راهنما:

دکتر هوگر قهرمانی

استاد مشاور:

دکتر محمد نادر قصیری

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز ریاضی

تیر ماه ۱۳۸۹

کلیه حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایـج مطالعات،

ابتکارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع

این پایان‌نامه (رسـاله) متعلق به دانشـگاه کردستان است.

تعهد نامه

اینجانب جمال خلیلی خضرلک دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز ریاضی دانشگاه کردستان، دانشکده علوم گروه ریاضی تعهد می نماییم که محتوای این پایان نامه نتیجه تلاش و تحقیقات خود بوده و از جایی کپی برداری نشده و به پایان رسانیدن آن نتیجه تلاش و مطالعات مستمر اینجانب و راهنمایی و مشاوره اساتید بوده است.

با تقدیم احترام

جمال خلیلی خضرلک

۱۳۸۹ / ۴ /۲۳

دانشگاه کردستان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز ریاضی

عنوان:

مشتق ها و مشتق های جردن روی جبرهای باناخ

پژوهشگر:

جمال خلیلی خضرلک

در تاریخ ۲۳ / ۴ / ۱۳۸۹ توسط کمیته تخصصی وهیات داوران زیر مورد بررسی قرار گرفت و با نمره ۱۹/۳۱و درجه عالی به تصویب رسید.

هیات داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
1ـ استاد راهنما	دکتر هوگر قهرمانی	استادیار	
2ـ استاد مشاور	دکتر محمد نادر قصیری	استادیار	
3ـ استاد داور خارجی	دکتر اسماعیل فیضی	استادیار	
4ـ استاد داور داخلی	دکتر صابر ناصری	استاد یار	

مهر و امضاء گروه

مهر و امضاء معاون پژوهشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده

چکیده

یکی از موضوعات مورد توجه در جبر و آنالیز، مفهوم مشتق و تعمیم هایی از آن روی حلقه ها و جبر های باناخ می باشد که با توجه به آن می توان نتایجی در مورد این ساختارها بدست آورد. یکی از تعمیم های مشتق، مفهوم مشتق جردن است. هر مشتق یک مشتق جردن است اما عکس آن لزو ماً برقرار نیست. این موضوع که تحت چه شرایطی هر مشتق جردن، مشتق است از مسائل مورد توجه می باشد. هراشتاین نشان داده است که روی هر حلقه اول با مشخصه‌ی مخالف ۲، هر مشتق جردن، مشتق است. سپس این نتیجه روی حلقه های نیم اول نیز اثبات شده است. یکی دیگر از تعمیم های مشتق، نگاشت مشتق پذیر در یک نقطه و نقاط کاملاً مشتق پذیر می باشد که در این جا با توجه به آنها به مطالعه ساختار مشتق و مشتق جردن روی جبر های باناخ و جبر های باناخ مثلثی می پردازیم و نتایجی در مورد اینکه روی این جبرها، چه موقع مشتق های جردن یا نگاشت های مشتق پذیر در یک نقطه، مشتق می باشند بدست می آوریم.

کلمات کلیدی:

جبر باناخ، مشتق، مشتق جردن، جبر مثلثی، نقطه مشتق پذیر، نقطه کاملاً مشتق پذیر.

فهرست

پیش گفتار

موضوع اصلی که در این پایان نامه مطرح شده است مطالعه مشتق ها و مشتق های جردن روی جبر های باناخ می باشد. یکی از تعمیم های مشتق، مفهوم مشتق جردن است. هر مشتق یک مشتق جردن است اما عکس آن لزوماً برقرار نیست. این موضوع که تحت چه شرایطی هر مشتق جردن، مشتق است از مسائل مورد توجه می باشد. هراشتاین[۱] [۱۰] نشان داده است که روی هر حلقه اول با مشخصه‌ی مخالف ۲ هر مشتق جردن، مشتق است. و سپس این نتیجه توسط بریسار[۲] [۳] روی حلقه های نیم اول نیز اثبات شده است. یکی دیگر از تعمیم های مشتق، نگاشت مشتق پذیر در یک نقطه می باشد. در سال های اخیر علاقه زیادی برای بررسی نگاشت های خطی که برای عناصر خاصی در شرط مشتق صدق می کنند به وجود آمده است. برای مثال مراجع [۲،۴،۱۳،۲۰،۲۱] نگاشت های خطی را که در نقطه صفر مشتق پذیرند مورد مطالعه قرار داده اند. و مراجع [۱۷،۱۸،۱۹] نگاشت های خطی را که در یک نقطه ثابت واون پذیر، مشتق پذیرند بررسی کرده اند. یکی دیگر از تعمیم های مشتق، نقاط کاملاً مشتق پذیراست. نقاط کاملاً مشتق پذیر زیادی در جبر عملگر ها وجود دارد. در مرجع [۱۹] خیونگ [۳] و زو[۴] ثابت کرده اند که هر نگاشت خطی پیوسته قوی در نقطه I بین جبر های لانه ای روی فضاهای هیلبرت مختلط، مشتق درونی است. همچنین هو[۵] و کیو[۶] در مرجع [۱۲] این نتیجه را به فضای باناخ جبر های لانه‌ای بدون در نظر گرفتن فرض پیوستگی قوی تعمیم داده‌اند. آنها نشان داده‌اند که هر نگاشت خطی بین این فضاهای باناخ جبر های لانه‌ای $Alg\mathcal{N}$، که در عضو خود توان P با برد در لانه $\mathcal{N}$ مشتق پذیرند، در حقیقت مشتق هستند. یکی دیگر از نتایجی که درمرجع [۱۱] بدست آمده نشان

[۱] I. N. Herstein

[۲] M. Bresar

[۳] C. Xiong

[۴] J. Zhu

[۵] J. Hou

[۶] X. Qi

می دهد که عضو همانی I یک نقطه کاملاً مشتق پذیر برای JSL− جبر ها می باشد. جبرهای مثلثی ابتدا توسط چونگ[۷] [۵] معرفی شده است و سپس توسط افراد دیگری (مراجع [۱۶،۱۵،۶] را ببینید) مورد مطالعه قرار گرفته است.

در این پایان نامه ابتدا در فصل اول تعاریف و قضایایی که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار گرفته اند آورده شده است.

در فصل دوم که بر اساس مرجع [۱۴] تنظیم شده است ابتدا به معرفی مشتق و تعمیم هایی از آن مانند مشتق جردن، نگاشت مشتق پذیر در یک نقطه، مشتق درونی و نقطه کاملاً مشتق پذیر می پردازیم. سپس شرایطی که تحت آن هر نگاشت مشتق پذیر در یک نقطه جداساز چپ (راست)، مشتق جردن می شود بیان شده است. و در ادامه شرایطی که تحت آن یک عضو خود توان در یک جبر باناخ، یک عضو کاملاً مشتق پذیر خواهد شد آورده شده است.

در فصل سوم که بر اساس مراجع [۱۶] و [۱] نوشته شده است ابتدا به معرفی جبر های باناخ بالا مثلثی می پردازیم و سپس جبر های لانه ای را به عنوان رده خاصی از آنها معرفی خواهیم کرد. سپس ساختار مشتق جردن روی جبر های بالا مثلثی را تعیین کرده و خواص آن را بیان می کنیم. و با استفاده از آن، یکی از نتایجی که توسط ژنگ[۸] و یو[۹] [۱۶] در ارتباط با مشتق های جردن روی این جبر ها بدست آمده را با روشی متفاوت ثابت می کنیم. سپس نتایج آن را روی جبرهای باناخ بالا مثلثی یکدار و جبر های بالا مثلثی با یکه تقریبی بیان می کنیم. در ادامه به معرفی نقاط کاملاً مشتق پذیر در جبر های بالا مثلثی می پردازیم و نتایج بدست آمده را روی جبر های باناخ بالا مثلثی و جبر های لانه ای بیان خواهیم کرد.

---

[۷] W. S. Cheung

[۸] J. Zhang

[۹] W. Yu

فصل اول

تعاریف و قضایای مورد نیاز

در این فصل تعاریف و قضایایی که در فصول بعدی مورد استفاده قرار گرفته اند آورده شده است. لازم به ذکر است که که در این پایان نامه تمامی فضاها روی اعداد مختلط در نظر گرفته شده است و تعاریف مورد نظر بر اساس مراجع [۷] و [۲۲] نوشته شده است. این فصل شامل سه بخش است. بخش اول به جبر باناخ، بخش دوم به مدول روی جبرهای باناخ و بخش سوم به فضای هیلبرت اختصاص دارد.

۱—۱ جبر باناخ

۱—۱—۱ تعریف

مجموعه $\mathcal{A}$ را یک **فضای برداری** گوییم هرگاه دو عمل (یکی جمع و دیگری ضرب اسکالر) روی آن تعریف شوند بطوریکه برای هر دو عضو $X, Y \in \mathcal{A}$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ عضو یکتای $X + Y \in \mathcal{A}$ و عضو یکتای $\alpha X \in \mathcal{A}$ موجود باشند بطوریکه برای هر $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ و $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

۱— $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$،

۲— $X + Y = Y + X$،

۳− عضو یکتای $0 \in \mathcal{A}$ که آن را بردار صفر گوییم موجود باشد به طوری که $0 + X = X$،

۴− برای هر $X \in \mathcal{A}$ عضو یکتایی در $\mathcal{A}$، که آن را با $(-X)$ نشان می دهیم موجود باشد بطوریکه $X + (-X) = 0$،

۵− $I.X = X$،

٦− $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$،

۷− $(\alpha + \lambda)X = \alpha X + \lambda Y$،

۸− $(\alpha\lambda)X = \alpha(\lambda X)$.

۱−۱−۲ تعریف

فضای برداری مختلط $\mathcal{A}$ را **فضای نرم دار** می نامیم اگر به ازای هر $X \in \mathcal{A}$ یک عدد حقیقی $\| X \|$ (نرم X) متناظر شود به طوری که به ازای هر $X, Y \in \mathcal{A}$ ، و هراسکالر λ،

۱− $\| X \| \geq 0$ و $\| X \| = 0$ اگر و فقط اگر $X = 0$،

۲− $\| \lambda X \| = | \lambda | . \| X \|$،

۳− $\| X + Y \| \leq \| X \| + \| Y \|$.

دنباله (X_n) را در فضای برداری نرم دار $\mathcal{A}$ **همگرا** گوییم هرگاه $X \in \mathcal{A}$ موجود باشد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} \| X_n - X \| = 0.$$

دنباله (X_n) را **کوشی** گوییم اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح مانند $N = N(\varepsilon)$ موجود باشد به طوری که برای هر $m, n \geq N$،

$$\| X_m - X_n \| < \varepsilon.$$

فضای نرمداری را که هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد **کامل** گوییم و آن را **فضای باناخ** می نامیم.

۱−۱−۳ مثال

فرض کنیم l_1 گردایه همه دنباله های حقیقی $X = (X_1, X_2, ...)$ باشد به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} | X_n | < \infty$. به آسانی می بینیم که l_1 همراه با اعمال جبری

$$X + Y = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, ...) \quad , \quad \alpha X = (\alpha X_1, \alpha X_2, ...)$$

فضایی برداری است. علاوه بر این اگر به ازای هر $X \in l_1$ تعریف کنیم $\| X \|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} | X_n |$ در این صورت $\| . \|_1$

یک نرم روی l_1 است. اکنون نشان می دهیم که l_1 یک فضای باناخ است.

برای این منظور، فرض کنیم $\{X_n\}$ دنباله ای کوشی در l_1 باشد. یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح مانند $N = N(\varepsilon)$ هست به طوری که برای هر $m, n \geq N$، $\| X_n - X_m \|_1 < \varepsilon$. در نتیجه، عددی مانند $M > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر n، $\| X_n \|_1 \leq M$. به ازای هر n فرض کنیم $X_n = (X_1^n, X_2^n, ...)$. به ازای هر $m, n \geq N$، از نابرابری های

$$| X_i^n - X_i^m | \leq \sum_{i=1}^{\infty} | X_i^n - X_i^m | = \| X_n - X_m \|_1 < \varepsilon$$

نتیجه می شود که به ازای هر اندیس i، دنباله‌ی اعداد حقیقی $\{X_i^n\}$ دنباله ای کوشی است. به ازای هر i فرض کنیم $X_i = \lim_{n\to\infty} X_i^n$. چون به ازای هر $n \geq N$ و هر p داریم

$$\sum_{i=1}^{p} | X_i | \leq \sum_{i=1}^{p} | X_i - X_i^n | + \sum_{i=1}^{p} | X_i^n | \leq \sum_{i=1}^{p} | X_i - X_i^n | + \| X_n \|_1$$

$$= \lim_{m\to\infty} (\sum_{i=1}^{p} | X_i^m - X_i^n |) + \| X_n \|_1 \leq \varepsilon + M < \infty$$

پس $X = (X_1, X_2, ...) \in l_1$. همچنین، با توجه به اینکه اگر $n, m \geq N$، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{p} | X_i^n - X_i^m | \leq \| X_n - X_m \|_1 < \varepsilon$$

به ازای هر p و هر $n > N$ خواهیم داشت

$$\sum_{i=1}^{p} | X_i - X_i^n | = \lim_{m\to\infty} (\sum_{i=1}^{p} | X_i^m - X_i^n |) \leq \varepsilon$$

بنابراین، به ازای هر $n > N$ نابرابری $\| X - X_n \|_1 < \varepsilon$ برقرار است و از این رو، دنباله $\{X_n\}$ در l_1 به X همگراست. یعنی l_1 یک فضای باناخ است.

۱-۱-۴ تعریف

جبر مختلط $\mathcal{A}$، فضای برداری $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{C}$ است به طوری که برای هر دو عضو $X, Y \in \mathcal{A}$ حاصلضرب یکتای $XY \in \mathcal{A}$ موجود باشد که به ازای هر $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ و هراسکالر $\lambda \in \mathbb{C}$ دارای خواص زیر باشد

۱- $(XY)Z = X(YZ)$،

۲- $X(Y + Z) = XY + XZ$،

۳- $(X + Y)Z = XZ + YZ$،

۴- $\alpha(XY) = (\alpha X)Y = X(\alpha Y)$.

۱ــ۱ــ۵ تعریف

فضای نرم دار $\mathcal{A}$ را یک **جبر نرمدار** گوییم هرگاه یک جبر بوده و برای هر $X, Y \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\| XY \| \leq \| X \| \| Y \|.$$

جبر نرمدار کامل $\mathcal{A}$ را یک **جبر باناخ**[۱] گوییم. جبر باناخ $\mathcal{A}$ را **تعویض پذیر** گوییم هرگاه برای هر $X, Y \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $XY = YX$. مجموعه عناصری از جبر $\mathcal{A}$ را که با تمام اعضای $\mathcal{A}$ جابجا می شوند، مرکز $\mathcal{A}$ گوییم و با $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ نشان می دهیم.

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \{Z \in \mathcal{A} : \ ZA = AZ \ , \ \forall A \in \mathcal{A}\}.$$

۱ــ۱ــ۶ تعریف

جبر $\mathcal{A}$ را **یکدار** گوییم هرگاه دارای عضوی مانند I باشد بطوریکه برای هر $X \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$IX = XI = X.$$

۱ــ۱ــ۷ تعریف

یک مجموعه **جهت دار**[۲] عبارت است از یک مجموعه مرتب جزیی Λ به طوری که برای هر λ_1, λ_2 متعلق به Λ، λ متعلق به Λ موجود باشد بطوریکه $\lambda_1 \leq \lambda$ و $\lambda_2 \leq \lambda$.

۱ــ۱ــ۸ تعریف

یک **تور**[۳] در جبر باناخ $\mathcal{A}$ عبارتست از یک نگاشت از یک مجموعه جهت دار به توی $\mathcal{A}$. یک تور $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ در $\mathcal{A}$ همگراست هرگاه برای یک همسایگی U از X، λ_0 متعلق به Λ موجود باشد به طوری که برای هر $\lambda \geq \lambda_0$ داشته باشیم $X_\lambda \in U$.

یک تور در $\mathcal{A}$ کراندار است هرگاه یک ثابت مثبت K موجود باشد به طوری که برای هر $\lambda \in \Lambda$ داشته باشیم $\| X_\lambda \| \leq K$.

۱ــ۱ــ۹ تعریف

یکه تقریبی چپ[۴] برای جبر باناخ $\mathcal{A}$ عبارتست از یک تور $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ در $\mathcal{A}$ به طوری که برای هر $X \in \mathcal{A}$، $I_\lambda X \to X$.

---

[۱] Banach algebra

[۲] directed set

[۳] net

[۴] left approximate identity

یکه تقریبی چپ کراندار، یکه تقریبی چپی است که یک تور کراندار نیز باشد. **یکه تقریبی راست** با جایگزینی XI_λ به جای $I_\lambda X$ به طور مشابه تعریف می شود. $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ را **یکه تقریبی** برای جبر $\mathcal{A}$ گوییم هرگاه هم یکه تقریبی چپ و هم یکه تقریبی راست باشد.

فرض کنیم $l_1(\mathbb{N})$ گردایه‌ی همه دنباله های طبیعی $X=(X_1,X_2,\dots)$ باشد به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty}\mid X_n\mid<\infty$. همان طور که در مثال (۱ــ۱ــ۳) نشان دادیم، $l_1(\mathbb{N})$ یک فضای باناخ است که همراه با ضرب

$$XY=(X_1Y_1,X_2Y_2,\dots)$$

تبدیل به جبر باناخ خواهد شد که یکدار نیست. فرض کنیم $I_n=(\overbrace{1,1,\dots,1}^{n},0,0,\dots)$ آنگاه برای هر $X\in l_1(\mathbb{N})$، $I_nX\to X$ و $XI_n\to X$. در نتیجه $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یکه تقریبی غیر کراندار برای $l_1(\mathbb{N})$ خواهد بود.

۱ــ۱ــ۱۰ تعریف

اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ با عضو یکه I باشد. $X\in\mathcal{A}$ را **وارون پذیر** گوییم هرگاه عضوی متعلق به $\mathcal{A}$، که آن را با X^{-1} نشان می دهیم وجود داشته باشد به طوری که

$$XX^{-1}=X^{-1}X=I.$$

X^{-1} را وارون X گوییم. وارون هر عضو منحصر بفرد است و مجموعه تمام اعضای وارون پذیر متعلق به $\mathcal{A}$ را با $\mathcal{A}^{-1}$ نشان می دهیم.

۱ــ۱ــ۱۱ تعریف

عنصر P متعلق به جبر $\mathcal{A}$ را **خود توان** گوییم هرگاه داشته باشیم $P^2=P$.

عنصر X متعلق به جبر $\mathcal{A}$ را **پوچ توان** گوییم هرگاه عدد صحیح مثبتی مانند n موجود باشد به طوری که $X^n=0$.

۱ــ۱ــ۱۲ لم

اگر $P\in\mathcal{A}$ خود توان باشد آنگاه $I-P$ نیز خود توان است.

اثبات : فرض کنیم $P\in\mathcal{A}$ خود توان باشد آنگاه داریم

$$\begin{aligned}(I-P)^2&=I-IP-IP+P^2\\&=I-P-P+P\\&=I-P.\end{aligned}$$

۱–۱–۱۳ قضیه

اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار با عضو یکه I و $X \in \mathcal{A}$، به طوری که $\|X\| < 1$ آنگاه $(I - X)$ در $\mathcal{A}$ وارون پذیر است و

$$(I - X)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n.$$

اثبات : اگر $\|X\| = 0$ آنگاه $X = 0$ و به وضوح $I - X$ وارون پذیر است. بنابراین فرض کنیم $0 < \|X\| = r < 1$ و برای $n < m$، قرار می دهیم $s_n = \sum_{k=0}^{n}(X)^k$ آنگاه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\|s_m - s_n\| &= \|\sum_{k=n+1}^{m} X^k\| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{m} \|X^k\| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|X^k\| \\
&\leq \|X\|^{n+1} + \|X\|^{n+2} + \|X\|^{n+3} + ... \\
&= \|X\|^{n+1}(1 + \|X\| + ...) \\
&= \frac{\|X\|^{n+1}}{1-\|X\|} \\
&= \frac{r^{n+1}}{1-r}
\end{aligned}$$

و چون $0 < r < 1$ پس مقدار بدست آمده وقتی که n به سمت بی نهایت میل کند به سمت صفر میل خواهد کرد.

بنابراین، s_n یک دنباله کوشی است که به مجموع زیر همگراست

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} X^k$$

حال برای هر n خواهیم داشت

$$s_n X = \sum_{k=0}^{n} X^{k+1} = s_{n+1} - 1$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to 0} s_n X &= \lim_{n\to\infty}(s_{n+1} - 1) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} X^k - 1
\end{aligned}$$

از این رو،

$$\begin{aligned}
a(I - X) &= \sum_{k=0}^{\infty} X^k - aX \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} X^k - (\sum_{k=0}^{\infty} X^k)X \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} X^k - \lim_{n\to\infty} s_n X
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} X^k - \sum_{k=0}^{\infty} X^k + 1$$

$$= 1$$

به طور مشابه می توان نشان داد $(I - X)a = I$ بنابراین،

$$(I - X)^{-1} = a = \sum_{k=0}^{\infty} X^k.$$

به این ترتیب اثبات قضیه تمام می شود. □

۱—۱—۱۴ نتیجه

اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار با عضو یکه I و $X \in \mathcal{A}$، به طوری که $\| I - X \| < 1$ آنگاه X در $\mathcal{A}$ وارون پذیر است و

$$(X)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} (I - X)^k.$$

۱—۱—۱۵ تعریف

اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشند، آنگاه **عملگر خطی** $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ عبارت است از یک نگاشت به طوری که برای هر X, Y متعلق به $\mathcal{A}$ و اسکالر $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

$$T(X + Y) = T(X) + T(Y)$$

$$T(\alpha X) = \alpha T(X).$$

اگر $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ یک عملگر خطی باشد انگاه

$$Ker(T) = \{A \in \mathcal{A} \;\;:\;\; T(A) = 0\}$$

$$Ran(T) = \{T(A) \in \mathcal{B} \;\;:\;\; A \in \mathcal{A}\}.$$

۱—۱—۱٦ تعریف

اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ فضاهای نرمدار روی میدان $\mathbb{C}$ باشند، آنگاه عملگر خطی $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ را **کراندار** گوییم اگر یک $C > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $A \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\| T(A) \| \leq C \| A \|$$

مجموعه تمام عملگر های از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ را با $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ و مجموعه تمام عملگر های کراندار از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ را با $B(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ نشان می دهیم که با نرم زیر یک فضای نرم دار است.

$$\| T \| = \sup\{\| T(A) \| \;\;:\;\; \| A \| = 1\}.$$

اگر $\mathcal{A}$ فضایی نرم دار باشد فضای باناخ $B(\mathcal{A},\mathbb{C})$ را **دوگان نرمی** $\mathcal{A}$ گوییم و آن را با $\mathcal{A}^*$ نشان می دهیم. یعنی $\mathcal{A}^*$ از همه توابعی مانند $f:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ تشکیل شده است که خطی و کراندارند.

۱—۱—۱۷ تعریف

اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ فضاهای نرمدار روی میدان $\mathbb{C}$ باشد، آنگاه عملگر خطی $T:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ را در X_0 متعلق به دامنه T **پیوسته** گوییم اگر برای هر $\varepsilon>0$، $\delta>0$ موجود باشد به طوری که اگر $\| X-X_0 \|<\delta$ آنگاه $\| T(X)-T(X_0) \|<\varepsilon$.

۱—۱—۱۸ قضیه

اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ فضاهای نرمدار روی میدان $\mathbb{C}$ باشند و $T:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ یک عملگر خطی باشد آنگاه احکام زیر هم ارزند

۱— T کراندار است.

۲— T در صفر پیوسته است.

۳— T پیوسته است.

اثبات : ۱ $\Leftarrow$ ۲ : با توجه به تعریف (۱—۱—۱٦) داریم

$$\| T(X_n) \| \leq C \| X_n \|$$

حال از ترکیب $\lim \| X_n \|=0$ با رابطه فوق خواهیم داشت

$$\lim \| T(X_n) \|=0$$

و این یعنی T در صفر پیوسته است.

۲ $\Leftarrow$ ۳ : با توجه به اینکه در فضاهای نرم دار داریم

$$\lim(X_n-X)=0 \Leftrightarrow \lim X_n = X$$

و اینکه $\| T(X)-T(Y) \|=\| T(X-Y) \|$ پیوستگی T بی درنگ نتیجه می شود.

۳ $\Leftarrow$ ۱: فرض کنیم T کراندار نباشد یعنی $\| T \|=\infty$ در این صورت دنباله ای مانند (X_n) در X هست که به طوری که به ازای هر n،

$$\| T(X_n) \| \geq n, \quad \| (X_n) \|=1$$

حال به ازای هر n قرار می دهیم $y_n=\frac{X_n}{n}$ و ملاحظه می کنیم که رابطه $\| (Y_n) \|=\frac{1}{n}$ مستلزم $\lim Y_n=0$ می باشد. در این صورت بنا بر پیوستگی T باید $\lim T(Y_n)=0$ و این با نابرابری زیر که به ازای هر n برقرار است مغایرت دارد.

$$\| T(Y_n) \| = n^{-1} \| T(X_n) \| \geq 1$$

بنابراین، $\| T \| < \infty$ و اثبات قضیه تمام است. $\square$

۱ـ۱ـ۱۹ تعریف

زیر مجموعه $\mathcal{A}$ از فضای نرم دار $\mathcal{X}$ را **نسبت به نرم کراندار**(یا به اختصار کراندار) گوییم هرگاه عددی مانند $M > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $X \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\| X \| \leq M$$

اگر $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ فضاهای نرمدار باشند، زیر مجموعه $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ را **نقطه به نقطه کراندار**[۵] گوییم هرگاه به ازای هر $X \in \mathcal{X}$ مجموعه $\{T(X) \ : \ T \in \mathcal{A}\}$ که یک زیر مجموعه $\mathcal{Y}$ است نسبت به نرم کراندار باشد.

۱ـ۱ـ۲۰ قضیه

اصل کرانداری یکنواخت : فرض کنیم $\mathcal{X}$ یک فضای باناخ و $\mathcal{Y}$ یک فضای نرم دار باشد. در این صورت زیر مجموعه $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ نسبت به نرم کراندار است اگر و تنها اگر نقطه به نقطه کراندار باشد.

اثبات : به مرجع [۲۲] فصل پنجم مراجعه شود.

در ادامه این بخش فرض می کنیم $\mathcal{B}$ یک فضای باناخ و $\mathcal{D}$ یک زیر مجمو عه باز از فضای $\mathbb{C}$ باشد.

۱ـ۱ـ۲۱ تعریف

نگاشت $f : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ را در نظر می گیریم

۱ــ f در $Z_0 \in \mathcal{D}$ **تحلیلی** است اگر حد زیر در نرم روی $\mathcal{B}$ موجود باشد.

$$f'(Z_0) = \lim_{Z \to Z_0} \frac{f(Z) - f(Z_0)}{Z - Z_0}.$$

۲ــ f در $Z_0 \in \mathcal{D}$ **به طور ضعیف تحلیلی** است اگر حد زیر برای هر $l \in \mathcal{B}^*$ موجود باشد.

$$\lim_{Z \to Z_0} \frac{l(f(Z)) - l(f(Z_0))}{Z - Z_0}.$$

به عبارت دیگر f در $Z_0 \in \mathcal{D}$ به طور ضعیف تحلیلی است اگر برای هر $l \in \mathcal{B}^*$ تابع $F : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ که به صورت $F(Z) = l(f(Z))$ تعریف می شود، در Z_0 تحلیلی باشد.

---

[۵] pointwise bounded

۱ـ۱ـ۲۲ قضیه

فرمول انتگرال کوشی: فرض کنیم $f : \mathcal{D}\to \mathcal{B}$ همه جا درون و بر مسیر ساده بسته Γ، که در جهت مثبت گرفته شده است، تحلیلی باشد. اگر Z_0 نقطه دلخواهی درون Γ باشد، آنگاه

$$f(Z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - Z_0)}d\zeta.$$

اثبات : به مرجع [۸] مراجعه شود.

۱ـ۱ـ۲۳ قضیه

نگاشت $f : \mathcal{D}\to \mathcal{B}$ را در نظر می گیریم

۱ـ $f(Z)$ در $\mathcal{D}$ تحلیلی است اگر و تنها اگر $f(Z)$ در $\mathcal{D}$ به طور ضعیف تحلیلی باشد.

۲ـ اگر $f(Z)$ در $\mathcal{D}$ تحلیلی باشد و $\mathcal{K}\subseteq \mathcal{D}$ فشرده باشد، آنگاه $\| f(Z) \|$ در $\mathcal{K}$ کراندار است.

۳ـ اگر $f(Z)$ در $\mathcal{D}$ تحلیلی باشد آنگاه $f'(Z)$ در $\mathcal{D}$ تحلیلی است.

۴ـ اگر $f(Z)$ در $\mathcal{D}$ تحلیلی باشد آنگاه $f(Z)$ در $\mathcal{D}$ پیوسته است.

۵ـ اگر $f(Z)$ و $g(Z)$ در $\mathcal{D}$ تحلیلی باشند و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ آنگاه $\alpha f(Z) + \beta g(Z)$ نیز در $\mathcal{D}$ تحلیلی خواهد بود.

۶ـ فرض کنیم $Z_0 \in \mathcal{D}$. اگر $f(Z)$ در گوی باز $B_r(Z_0)$ (گوی به مرکز Z_0 و شعاع r) تحلیلی باشد، آنگاه $f(Z)$ در $B_r(Z_0)$ دارای **بسط سری توانی یکتا** به فرم $f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(Z - Z_0)^n$ است. این سری در $B_r(Z_0)$ در نرم همگراست.

۷ـ فرض کنیم $Z_0 \in \mathcal{D}$ و $0 \leq R_1 \leq R_2$. اگر $f(Z)$ در طوق $R_1 <| Z - Z_0 |< R_2$ تحلیلی باشد آنگاه $f(Z)$ در $R_1 <| Z_0 |< R_2$ دارای **بسط سری لورن یکتا** به فرم $f(Z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(Z - Z_0)^n$ است. این سری در $R_1 <| Z - Z_0 |< R_2$ در نرم همگراست.

اثبات : ۱ـ $\Leftarrow$: برای هر $Z_0 \in \mathcal{D}$ و $l \in \mathcal{B}^*$ داریم

$$| \frac{l(f(Z))-l(f(Z_0))}{Z-Z_0} - l(f'(Z_0)) |=| l(\frac{f(Z)-f(Z_0)}{Z-Z_0} - f'(Z_0)) |\leq\| l \|\| \frac{f(Z)-f(Z_0)}{Z-Z_0} - f'(Z_0) \| .$$

و به این ترتیب طبق تعریف (۱ـ۱ـ۲۱) $f(Z)$ در $\mathcal{D}$ به طور ضعیف تحلیلی است.

$\Rightarrow$: فرض کنیم $Z_0 \in \mathcal{D}$. ما باید نشان دهیم که $f(Z)$ در Z_0 تحلیلی است. فرض کنیم Γ یک دایره با جهت مثبت باشد که در $\mathcal{D}$ قرار دارد و مرکز آن Z_0 است. شعاع Γ را با r نشان می دهیم. آنگاه برای هر $l \in \mathcal{B}^*$،

$F_l(Z)=l(f(Z))$ یک تابع تحلیلی از Z است. بنابراین، برای هر Z و Z' متعلق به درون Γ با استفاده از فرمول انتگرال کوشی برای $F_l(Z)$، $F_l(Z_0)$ و $F_l(Z')$ داریم

$$l[\frac{f(Z)-f(Z_0)}{Z-Z_0}-\frac{f(Z')-f(Z_0)}{Z'-Z_0}]=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma[\frac{1}{Z-Z_0}(\frac{1}{\zeta-Z}-\frac{1}{\zeta-Z_0})-\frac{1}{Z'-Z_0}(\frac{1}{\zeta-Z'}-\frac{1}{\zeta-Z_0})]l(f(\zeta))d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma[\frac{1}{(\zeta-Z)(\zeta-Z_0)}-(\frac{1}{(\zeta-Z')(\zeta-Z_0)}]l(f(\zeta))d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{Z-Z'}{(\zeta-Z)(\zeta-Z')(\zeta-Z_0)}l(f(\zeta))d\zeta\ .$$

حال فرض کنیم $f(\zeta)$ عضوی از $\mathcal{B}^*$ باشد که $l\in\mathcal{B}^*$ را به $l(f(Z))$ می نگارد. با توجه به اینکه $F_l(\zeta)$ در ζ پیوسته است و Γ فشرده می باشد، برای هر $\zeta\in\Gamma$ عدد ثابت C_l وجود دارد به طوری که

$$\mid l(f(\zeta))\mid\leq C_l\ .$$

بنابراین مجموعه عملگر های $\mathcal{F}=\{f(\zeta)\ \ :\ \ \zeta\in\Gamma\}\subseteq(\mathcal{B}^*)^*$ به طور نقطه ای کراندار است. حال با استفاده از اصل کرانداری یکنواخت داریم

$$\sup_{\zeta\in\Gamma}\parallel f(\zeta)\parallel_{(\mathcal{B}^*)^*}\leq C<\infty\ .$$

در نتیجه،

$$\sup_{\zeta\in\Gamma}\mid l(f(\zeta))\mid\leq C\parallel l\parallel_{\mathcal{B}^*}$$

پس اگر $\mid Z-Z_0\mid,\mid Z'-Z_0\mid\leq\frac{r}{2}$ آنگاه

$$l[\frac{f(Z)-f(Z_0)}{Z-Z_0}-\frac{f(Z')-f(Z_0)}{Z'-Z_0}]$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\frac{|Z-Z'|}{\frac{r}{2}\times\frac{r}{2}\times r}C\parallel l\parallel_{\mathcal{B}}{}^*2\pi r$$

$$=\frac{4C}{r^2}\mid Z-Z'\mid\parallel l\parallel_{\mathcal{B}}{}^*$$

بنابراین،

$$\parallel\frac{f(Z)-f(Z_0)}{Z-Z_0}-\frac{f(Z')-f(Z_0)}{Z'-Z_0}\parallel_{\mathcal{B}}$$

$$\leq\frac{4C}{r^2}\mid Z-Z'\mid$$

از این رو، وقتی $Z,Z'\to Z_0$ مقدار فوق به صفر همگراست. با توجه به اینکه $\mathcal{B}$ کامل است وقتی که $Z\to Z_0$ داریم

$$\frac{f(Z)-f(Z_0)}{Z-Z_0}\to f'(Z_0)\in\mathcal{B}$$

تذکر : در حالتی که $f:\mathcal{D}\to\mathcal{B}=\mathcal{L}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ برای هر فضاهای باناخ $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ اثبات بالا از قسمت (۱) نشان می دهد که $f(Z)$ در $\mathcal{D}$ تحلیلی است اگر و تنها اگر $l(f(Z)X)$ برای هر $X\in\mathcal{B}_1$ و $l\in\mathcal{B}_2^*$ در $\mathcal{D}$ تحلیلی باشد.