بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۹۰/۳/۲۲

۱۵۹۴۷۲_۲۰۳۴۰۴۳۰

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

نگاشت‌های مجموعه مقدار روی خمینه‌های ریمانی و کاربردهای آن‌ها

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا پوریای ولی

استاد مشاور:

دکتر صغری نوبختیان

پژوهشگر:

مریم سلطانی دهنوی

دی‌ماه ۱۳۸۹

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز خانم مریم سلطانی دهنوی

تحت عنوان:

نگاشت های مجموعه مقدار روی خمینه های ریمانی و کاربردهای آنها

در تاریخ ۸۹/۱۰/۱ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر محمدرضا پوریای‌ولی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر صغری نوبختیان	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر نوشین موحدیان	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر اعظم اعتماد	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

مهر و امضای مدیر گروه ....

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

به پاس

تعبیر زیبا و انسانی شان از کلمه ی ایثار و از خودگذشتگی،

به پاس

عاطفه ی سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در تمامی روزگاران بهترین پشتیبان است،

به پاس

قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید،

و به پاس

محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند.

به نام یکتا مهربان هستی

خدایا به من آرامشی عطا فرما تا بپذیرم آنچه را که نمی توانم تغییر دهم و شهامتی که تغییر دهم آنچه را که می توانم و دانشی که تفاوت آن دو را بدانم.

و اندیشیدن راهی بود که برگزیدم، تمام تلاش خود را برای گام برداشتن در آن مسیر به کار بردم و در نهایت اگر رسالت و رهنمودهای استاد ارجمندم جناب آقای دکتر پوریای ولی نبود اکنون در این نقطه نبودم، پس جای دارد از زحمات بی-دریغ ایشان تشکر و قدردانی کنم و در یک کلام بگویم تا ابد قدردان رسالتشان هستم.

در ادامه به قلم می آورم مشاورات بی دریغ استاد گرانقدرم سرکار خانم دکتر نونجتیان را که افتخار شاگردی ایشان همواره مایه ی سرافرازی من بوده است.

همچنین از اساتید محترم، سرکار خانم دکتر موحدیان و سرکار خانم دکتر اعتماد که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را تقبل نمودند، کمال تشکر را دارم.

در پایان از زحمات سرکار خانم ها گرامی، فرهمند، غازی، معمار که در طی تدوین این پایان نامه مرا یاری رساندند، تشکر می نمایم.

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی نگاشت‌های مجموعه مقدار بر روی خمینه‌های ریمانی می‌پردازیم. تعاریف و نتایجی را ارائه می‌دهیم که ما را در یافتن صفرها و نقاط ثابت نگاشت‌های مجموعه مقدار بر روی خمینه‌های ریمانی یاری می‌رساند.

به علاوه یک اصل تغییراتی هموار مرتبه دوم را برای توابع تعریف شده بر روی خمینه‌های ریمانی (می‌توانند از بعد نامتناهی نیز باشند) که به طور یکنواخت موضعاً محدب، دارای شعاع القائی اکیداً مثبت و خمیدگی برشی کران‌دار هستند، ارائه می‌کنیم.

واژگان کلیدی: نگاشت مجموعه مقدار، زیردیفرانسیل، مشتق نموداری، نقطه ثابت، اصل تغییراتی هموار، خمینه‌ی ریمانی.

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

توابع چند مقداری یا نگاشت‌های مجموعه مقدار، به‌طور طبیعی در بسیاری از زمینه‌های آنالیز غیرخطی، نظریه‌ی کنترل و کاربردهای آن، ظاهر می‌شوند. بنابراین همان‌طور که در آنالیز کلاسیک رایج است، یک مفهوم مشتق مناسب برای بررسی رفتار موضعی توابع چند مقداری لازم است. یک روش طبیعی برای مشتق‌گیری از توابع چند مقداری می‌تواند از ایده‌ی هندسی مشتق کلاسیک نشأت بگیرد. در این ایده، مشتق در یک نقطه به عنوان خط مماس به گراف تابع در آن نقطه مشخص می‌شود.

در چارچوب آنالیز توابع مجموعه مقدار، این گرایش نموداری توسط اُبن [1] [۲] معرفی شده و بر اساس مخروط مماس کلارک [2] به گراف توابع چند مقداری تعریف گردیده است.

ساختار مشتق‌گونه‌ی دیگر برای توابع چند مقداری توسط مردوکویچ [3] [۲۶] با استفاده از مخروط قائم به گراف این دسته از توابع تعریف شده است. این ساختار با توجه به این‌که روی فضای دوگان عمل می‌کند، هم‌مشتق برای تابع چند مقداری نامیده می‌شود.

مشتق نموداری از نگاشت‌های مجموعه مقدار، ابزار مفیدی برای به دست آوردن نتایجی در مورد نقاط ثابت و قضایای تابع وارون می‌باشد. در [۳، ۲] مشتق گرافیکی [4] و خواص محاسباتی آن معرفی شده و این مشتق برای قضیه‌ی تابع وارون به کار برده شده است.

---

[1] Aubin

[2] Clarke

[3] Mordukhovich

[4] contingent derivative

در این پایان‌نامه با تعریف این مشتق روی خمینه‌های ریمانی به دنبال تعمیم این نتیجه هستیم.

موضوع مهم دیگر این است که یک تابع پیوسته‌ی تعریف شده روی یک خمینه از بعد نامتناهی، عموماً در مکان‌هایی که مینیمم‌کننده برای تابع روی خمینه از بعد متناهی موجود است، مینیمم خود را اختیار نمی‌کند.

در حقیقت، در مرجع [۴] نشان داده شده است که توابع هموار و فاقد نقاط بحرانی، در فضای توابع پیوسته روی خمینه‌های هیلبرت (خمینه‌ای که روی یک فضای هیلبرت مدل‌بندی شده است) چگال هستند.

بنابراین ما قادر به پیدا کردن نقطه‌ی بحرانی برای یک تابع هموار مفروض روی یک خمینه‌ی ریمانی از بعد نامتناهی نخواهیم بود.

مسئله‌ی فوق مشکل‌ساز است؛ زیرا بسیاری از مسائل معادلات با مشتقات جزئی و بهینه‌سازی با مسائل مینیمم‌سازی یک تابع پیوسته (دیفرانسیل‌پذیر، محدب، نیم‌پیوسته‌ی پایینی و ...) روی یک فضای توابع یا روی یک خمینه (معمولاً از بعد نامتناهی) هم‌ارز می‌باشند، که جواب این مسئله‌ی مینیمم‌سازی یک حل برای مسئله‌ی معادله با مشتق جزئی و بهینه‌سازی اولیه است.

تحت چندین رده از فرضیات نسبتاً محدودکننده (برای مثال محدب بودن تابع و بازتابی بودن فضا)، ممکن است قادر به پیدا کردن مینیمم‌کننده باشیم، اما در بسیاری از موارد طبیعی مانند مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین فاصله روی خمینه‌های ریمانی از بعد نامتناهی، عموماً مینیمم‌کننده‌های دقیق موجود نیستند و این موضوع ما را مجبور به پیدا کردن مینیمم‌کننده‌های تقریبی [5] می‌کند که یک جواب تقریبی از مسئله‌ی اولیه را به ما می‌دهند. در اینجاست که اهمیت اصول تغییراتی مشخص می‌شود.

در حقیقت یک اصل تغییراتی ادعا می‌کند که برای یک تابع نیم‌پیوسته‌ی پایینی $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ که روی یک فضای $\mathcal{X}$ تعریف شده و از پایین کران‌دار است، یک تابع $\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ متعلق به کلاس داده شده‌ی $\mathcal{C}$ وجود دارد به‌قسمی که $f - \varphi$ یک مینیمم سرتاسری اختیار می‌کند و φ می‌تواند به دلخواه کوچک انتخاب شود.

از لحاظ تاریخی، اصل تغییراتی اکلند[6] [۱۹] نخستین اصل مینیمم‌سازی کشف شده است. این اصل به

[5] approximate minimizers

[6] Ekeland

دلیل این‌که برای هر فضای متریک کامل $\mathcal{X}$ برقرار است، یکی از پرکاربردترین اصول محسوب می‌شود.

در این حالت، تابع آشفتگی [7] φ به شکل یک مخروط مسطح می‌باشد. یکی از مهم‌ترین کاربردهای اصل تغییراتی اکلند بررسی وجود ژئودزی‌های مینیمم‌کننده‌ی تقریبی بر روی خمینه‌های ریمانی کامل از بعد نامتناهی می‌باشد، این موضوع در واقع یک مدل تقریبی از قضیه‌ی هاف-رینو [8] است.

با وجود قوی بودن اصل اکلند، محدودیت‌هایی در کاربرد این اصل مینیمم‌سازی وجود دارد؛ از جمله می‌توان به دیفرانسیل‌پذیر نبودن تابع آشفتگی φ اشاره کرد.

به منظور جبران این نقص، بروین [9] و پریس [10] [۱۴] یک اصل تغییراتی هموار را ارائه کردند که در آن $\mathcal{X}$ یک فضای باناخ با یک نرم C^1 هموار می‌باشد و هم‌چنین توابع آشفتگی φ هموار هستند به‌قسمی که می‌توان آن‌ها را به‌طور دلخواه کوچک و دارای یک ثابت لیپ شیتز کوچک اختیار نمود.

پس از آن دویل [11]، گادفروی [12] و زیزلر [13] [۱۷، ۱۶]، با استفاده از یک روش جدید اثبات، مبنی بر استفاده از قضیه‌ی بئر [14]، قادر به گسترش اصل تغییراتی هموار به کلاس همه‌ی فضاهای باناخ با توابع برآمده‌ی [15] هموار و هم‌چنین دارای مرتبه‌ی همواری بالاتر شدند.

اخیراً اصول تغییراتی هموار بر روی خمینه‌های ریمانی مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در مرجع [۸]، یک مدل ریمانی از اصل تغییراتی هموار دویل—گادفروی—زیزلر (DGZ)، بر روی خانواده‌ی خمینه‌های ریمانی کامل که به‌طور یکنواخت برآمدگی‌پذیر [16] هستند، ارائه شده است.

پس از آن در مرجع [۹]، نویسندگان نشان دادند که در مرجع [۸] می‌توان خمینه‌های ریمانی کامل و به‌طور

---

[7] perturbing function

[8] Hopf-Rinow

[9] Borwein

[10] Preiss

[11] Deville

[12] Godefroy

[13] Zizler

[14] Baire's theorem

[15] bump function

[16] uniformly bumpable

یکنواخت برآمدگی‌پذیر را با خمینه‌های ریمانی کامل و تفکیک‌پذیر جایگزین کرد.

این پایان‌نامه شامل ۳ فصل است.

در فصل اول به بیان تعاریف، مفاهیم مقدماتی و برخی قضایا و نتایج کلیدی می‌پردازیم.

در فصل دوم با توجه به مقاله‌ی [۱۰]، مشتق نموداری [۱۷] را برای توابع مجموعه مقدار روی خمینه‌های ریمانی تعریف نموده و نتیجه‌ای کلی به دست می‌آوریم که وجود حل را برای شمول‌ها تضمین می‌کند، که در آن وقتی خمینه دارای یک ساختار گروه لی باشد، نگاشت مجموعه مقدار، مجموع یک نگاشت لیپ شیتز و نگاشت دیگری است که مشتق نموداری آن در شرط ویژه‌ای صدق می‌کند (قضیه‌ی ۶.۲).

از این قضیه‌ی اساسی کاربردهای زیادی نتیجه می‌شود. برای مثال شرایطی ارائه می‌گردد که لیپ شیتز بودن، چنین حلی را نسبت به یک سری از پارامترها تضمین می‌کند (نتیجه‌ی ۱۱.۲).

هم‌چنین ما نتیجه‌ای را اثبات می‌کنیم که اجازه می‌دهد نقاط ثابت نگاشت‌های مجموعه مقدار را بر اساس فرض‌هایی روی مشتقات نموداری آن‌ها به دست آوریم (قضیه‌ی ۱۵.۲)، که این نتیجه تعمیمی از نتایج به دست آمده در مرجع [۵] است.

در فصل سوم یک اصل تغییراتی هموار مرتبه دوم را روی خمینه‌های ریمانی کامل (می‌توانند از بعد نامتناهی نیز باشند) که به‌طور یکنواخت موضعاً محدب، دارای شعاع القائی اکیداً مثبت و خمیدگی برشی کران‌دار هستند، ارائه می‌دهیم. در حقیقت، این نتیجه برای هر خمینه‌ی ریمانی کامل و به‌طور یکنواخت برآمدگی‌پذیر از مرتبه‌ی دو برقرار است.

[۱۷] graphical derivative

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل به بیان مفاهیم، تعاریف، قضایا و نتایجی می‌پردازیم که در فصول بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت. منابع مورد استفاده در این فصل [۱، ۷، ۸، ۱۳، ۱۸، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۵، ۲۸] هستند.

۱.۱ تعاریف و قضایای بنیادی

تعریف ۱.۱ فرض کنید V یک فضای برداری باشد. تابع $\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک نرم روی V نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in V$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}$، در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\| x \| \geq 0$،

۲. $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$،

۳. $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$،

۴. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

هر فضای برداری که روی آن یک نرم تعریف شده باشد، فضای نرم‌دار نام دارد.

تعریف ۲.۱ فرض کنید V یک فضای برداری باشد. نگاشت $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ را دوخطی نامیم، هرگاه برای $i = 1, 2$ و هم‌چنین برای هر $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ و $v, w, v_i, w_i \in V$، شرایط زیر برقرار باشد:

$$g(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1\ g(v_1, w) + \alpha_2\ g(v_2, w),$$

$$g(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1\ g(v, w_1) + \beta_2\ g(v, w_2).$$

تعریف ۳.۱ فرض کنید V یک فضای برداری باشد. تابع $\langle .,. \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک «حاصل‌ضرب داخلی» (یا «حاصل‌ضرب اسکالر») روی V نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. به ازای هر $x \in V$، $\langle x, x \rangle \geq 0$،

۲. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$،

۳. به ازای هر $x, y \in V$، $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$،

۴. به ازای هر $x, y, z \in V$، $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$،

۵. به ازای هر $x, y \in V$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle$.

هر فضای برداری که در آن حاصل‌ضرب داخلی تعریف شده باشد، فضای «حاصل‌ضرب داخلی» نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۱ فرض کنید V یک فضای حاصل‌ضرب داخلی باشد. اگر به ازای هر $x \in V$، $\| x \|$ را به صورت $\| x \| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ تعریف کنیم، آن‌گاه تابع $\| x \| \longrightarrow x$ یک نرم روی V است و در خاصیت

$$\langle x, y \rangle \leq \| x \| \| y \|, \tag{1.1}$$

صدق می‌کند. علاوه بر این، اگر x و y مخالف صفر باشند، آن‌گاه در رابطه‌ی (۱.۱) برابری برقرار است اگر و فقط اگر عدد حقیقی اکیداً مثبتی مانند c وجود داشته باشد به‌قسمی که $x = c\, y$.

اثبات. به [۱۳] رجوع شود. □

تعریف ۴.۱ فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیرتهی باشد، تابع $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک متریک روی X نامیم، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$، شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $d(x,y) \geq 0$ و $x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$،

۲. $d(x,y) = d(y,x)$،

۳. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

در این حالت مجموعه‌ی X را یک فضای متریک نامیده و آن را با (X,d) نمایش می‌دهیم.

فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیرتهی و d متریکی روی X باشد. عدد $d(x,y)$ را معمولاً فاصله‌ی بین x و y نسبت به متریک d می‌گویند. به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، مجموعه‌ی

$$B_d(x,\varepsilon) = \{\ y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\},$$

را در نظر می‌گیریم، یعنی همه‌ی نقاطی مانند y که فاصله‌ی آن‌ها از x کمتر از ε است. این مجموعه را ε–گوی به مرکز x می‌نامیم. گاهی، اگر ابهامی نباشد، متریک d را از علامت بالا حذف می‌کنیم و گوی فوق را مختصراً با $B(x,\varepsilon)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در X باشد. گوییم $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ همگرا به x است، هرگاه به ازای هر همسایگی x مانند U، عددی طبیعی مانند N وجود داشته باشد به‌طوری که به ازای هر $n \geq N$، x_n در U باشد. اگر دنباله‌ی (x_n) همگرا به x باشد، می‌نویسیم $x_n \longrightarrow x$.

دنباله‌ی $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ در فضای متریک (X,d) را کوشی[۱] نامیم، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند $M(\varepsilon)$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $m, n \geq M(\varepsilon)$، داشته باشیم:

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

---

[۱] Cauchy

تعریف ۵.۱ فضای متریک (X, d) را کامل (تام) [۲] نامیم، هرگاه هر دنباله‌ی کوشی $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ در X به عضوی مانند $x \in X$ همگرا باشد.

تعریف ۶.۱ یک فضای نرم‌دار را که با متریک تعریف شده به وسیله‌ی نرم خود کامل باشد، فضای باناخ[۳] نامیم. فضای نرم‌دار کاملی را که نرم آن توسط یک ضرب داخلی تعریف شده باشد، فضای هیلبرت [۴] نامیم.

تعریف ۷.۱ فرض کنید (X, d_X) و (Y, d_Y) دو فضای متریک باشند. نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را «$K-$ لیپ شیتز[۵]» یا «لیپ شیتز از مرتبه‌ی K» گوییم، هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in X$، داشته باشیم:

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K\ d_X(x_1, x_2).$$

تعریف ۸.۱ فرض کنید $\mathbb{E}$ و $\mathbb{F}$ دو فضای باناخ باشند. اگر مجموعه‌ی نگاشت‌های خطی پیوسته‌ی $u : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ را با $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ نمایش دهیم، آن‌گاه فضای $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ همراه با نرم

$$\| u \| := \sup\Big\{ \| u(x) \|_{\mathbb{F}} : \ \| x \|_{\mathbb{E}} \leq 1 \ , \ x \in \mathbb{E} \Big\},$$

یک فضای باناخ است، که در آن $\| \ \|_{\mathbb{E}}$ و $\| \ \|_{\mathbb{F}}$ به ترتیب نرم‌های روی $\mathbb{E}$ و $\mathbb{F}$ هستند.

تعریف ۹.۱ فرض کنید $\mathbb{E}$ و $\mathbb{F}$ دو فضای باناخ باشند. اگر $U \subset \mathbb{E}$ باز باشد، گوییم نگاشت $f : U \to \mathbb{F}$ دیفرانسیل‌پذیر فرشه [۶] یا دیفرانسیل‌پذیر در $x_0 \in U$ است، هرگاه نگاشت $L \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ موجود باشد به‌طوری که

$$\lim_{v \to 0} \frac{\| f(x_0 + v) - f(x_0) - L(v) \|_{\mathbb{F}}}{\| v \|_{\mathbb{E}}} = 0.$$

---

[۲] complete

[۳] Banach

[۴] Hilbert

[۵] Lipschitz

[۶] Fréchet

به عبارت دیگر، برای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta(\varepsilon) > 0$ وجود داشته باشد، به‌طوری که اگر $\| v \|_{\mathbb{E}} < \delta(\varepsilon)$، آن‌گاه

$$\| f(x_0 + v) - f(x_0) - L(v) \|_{\mathbb{F}} \leq \varepsilon \| v \|_{\mathbb{E}}.$$

نگاشت خطی $L \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ در تعریف فوق را دیفرانسیل f در x_0 گوییم و آن را با $df(x_0)$ نمایش می‌دهیم.

اگر f در تمام نقاط U دیفرانسیل‌پذیر فرشه باشد، آن‌گاه گوییم f روی U، دیفرانسیل‌پذیر فرشه یا دیفرانسیل‌پذیر است.

تعریف ۱۰.۱ فرض کنید $\mathbb{E}$ و $\mathbb{F}$ دو فضای باناخ و $U \subset \mathbb{E}$ باز و $f : U \to \mathbb{F}$ در هر نقطه‌ی $x \in U$ دیفرانسیل‌پذیر فرشه باشد. گوییم f روی U از کلاس C^1 است، هرگاه $df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ یک نگاشت پیوسته روی U باشد. اگر نگاشت df روی U دیفرانسیل‌پذیر فرشه باشد، آن‌گاه می‌توانیم $d^2 f$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$d^2 f := d(df) : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})) \equiv \mathcal{L}^2(\mathbb{E}, \mathbb{F}).$$

$d^2 f$ در هر نقطه‌ی $x \in U$، یک نگاشت دو خطی پیوسته از $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ به $\mathbb{F}$ است.

f را روی U از کلاس C^2 گوییم، هرگاه $d^2 f$ روی U پیوسته باشد. به همین ترتیب می‌توان یک نگاشت از کلاس C^r یا C^∞ را روی U تعریف نمود.

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید $\mathbb{E}$ و $\mathbb{F}$ دو فضای باناخ باشند. U و V را به ترتیب دو زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{E}$ و $\mathbb{F}$ در نظر بگیرید. نگاشت $f : U \to V$ را C^r– دیفئومورفیسم [7] گوییم، هرگاه یک به یک و پوشا باشد و به علاوه f و معکوس آن $(f^{-1} : V \to U)$ هر دو از کلاس C^r باشند.

[7] diffeomorphism

تعریف ۱.۱۲ فرض کنید $\mathbb{E}$ و $\mathbb{F}$ دو فضای باناخ باشند. اگر $U \subset \mathbb{E}$ باز باشد، گوییم نگاشت $f : U \to \mathbb{F}$ در $x_\circ \in U$ دیفرانسیل‌پذیر گتو [۸] است، هرگاه نگاشت $A \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $v \in \mathbb{E}$، داشته باشیم:

$$\lim_{t \to \circ} \frac{f(x_\circ + tv) - f(x_\circ)}{t} = Av.$$

نگاشت خطی $A \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ در تعریف فوق را مشتق گتو از f در $x_\circ$ گوییم و آن را با $df_G(x_\circ)$ نمایش می‌دهیم. اگر f در تمام نقاط U دیفرانسیل‌پذیر گتو باشد، آن‌گاه گوییم f روی U دیفرانسیل‌پذیر گتو است و $df_G : U \to \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ را مشتق گتو از f روی U می‌نامیم.

تعریف ۱.۱۳ نگاشت $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ و $x_\circ \in X$ را در نظر بگیرید. برای هر $d \in \mathbb{R}^n$، مشتق جهتی تابع f را در نقطه‌ی $x_\circ$ و در جهت d، با نماد $f'(x_\circ, d)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x_\circ, d) = \lim_{t \to \circ} \frac{f(x_\circ + td) - f(x_\circ)}{t}.$$

تعریف ۱.۱۴ تابع $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. نماد $g(x) = o(x)$ بدین معنا است که

$$\lim_{x \to \circ} \frac{g(x)}{x} = \circ.$$

تعریف ۱.۱۵ مجموعه‌ی A را یک مجموعه‌ی G_δ در فضای توپولوژیک X می‌نامیم، اگر مساوی مقطع شمارایی از مجموعه‌های باز X باشد.

قضیه ۱.۲ (بئر). اگر X یک فضای متریک کامل باشد، آن‌گاه اشتراک هر گردایه‌ی شمارش‌پذیر از زیرمجموعه‌های باز چگال X، در X چگال است.

---

[۸] Gâteaux

اثبات. به [۲۸] رجوع شود. □

تعریف ۱۶.۱ فرض کنید E و F دو مجموعه‌ی ناتهی باشند. نگاشت $\Gamma : E \to 2^F$ را یک نگاشت مجموعه مقدار می‌نامیم و با $\Gamma : E \rightrightarrows F$ نمایش می‌دهیم. منظور از 2^F، مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های F است. دامنه، برد و نمودار Γ را به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Dom(\Gamma) := \{ x \in E \mid \Gamma(x) \neq \emptyset \},$$

$$Im(\Gamma) := \bigcup_{x \in E} \Gamma(x),$$

$$Graph(\Gamma) := \{ (x,y) \in E \times F \mid y \in \Gamma(x) \}.$$

تعریف ۱۷.۱ فرض کنید X و Z دو فضای توپولوژیک باشند. نگاشت مجموعه مقدار $T : X \rightrightarrows Z$ را نیم‌پیوسته‌ی پایینی[۹] (l.s.c.) گوییم، اگر برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی باز V در Z که $T(x) \cap V \neq \emptyset$، همسایگی باز W از x موجود باشد به‌قسمی که برای هر $u \in W$ داشته باشیم $T(u) \cap V \neq \emptyset$.
به عبارتی دیگر T را نیم‌پیوسته‌ی پایینی گوییم، اگر برای هر مجموعه‌ی باز V در Z مجموعه‌ی $T^-(V) := \{ x \in X \mid T(x) \cap V \neq \emptyset \}$، در X باز باشد.

تعریف ۱۸.۱ فرض کنید X و Z دو فضای توپولوژیک باشند. نگاشت مجموعه مقدار $T : X \rightrightarrows Z$ را نیم‌پیوسته‌ی بالایی[۱۰] (u.s.c.) گوییم، اگر برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی باز V در Z که $T(x) \subset V$، همسایگی باز W از x موجود باشد به قسمی که برای هر $u \in W$ داشته باشیم $T(u) \subset V$.
به عبارتی دیگر T را نیم‌پیوسته‌ی بالایی گوییم، اگر برای هر مجموعه‌ی باز V در Z مجموعه‌ی $T^+(V) := \{ x \in X \mid T(x) \subset V \ , \ T(x) \neq \emptyset \}$، در X باز باشد.

[۹] lower semicontinuous
[۱۰] upper semicontinuous