بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه کاشان
دانشکده علوم پایه

زیرگروه های C-نرمال در یک گروه و خواص آنها

پایان نامه جهت دریافت درجه
کارشناسی ارشد ریاضی

استاد راهنما:

دکتر سید علی رضا اشرفی

نگارش:

حمید تاجی

مرداد ماه ۱۳۸۱

بسمه تعالی

دانشگاه کاشان

مدیریت تحصیلات تکمیلی دانشگاه

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

نام و نام خانوادگی دانشجو: **حمید تاجی** شماره دانشجوئی: ۷۹۱۵۸۰۰۲

رشته: ریاضی دانشکده: علوم

عنوان پایان‌نامه: زیرگروه‌های c – نرمال در یک گروه و خواص آنها

این پایان‌نامه به مدیریت تحصیلات تکمیلی به منظور بخشی از فعالیتهای تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد ارایه می‌گردد. دفاع از پایان‌نامه در تاریخ مورد تائید و ارزیابی اعضای هیأت داوران قرار گرفت و با نمره به عدد ۱۹٫۰۴ و درجه عالی به تصویب رسید.

به‌حروف نوزده و چهار صدم

اعضاء هیأت داوران:

عنوان:	نام و نام خانوادگی:	مرتبه علمی:	امضاء
۱. استاد راهنما:	دکتر سیّد علیرضا اشرفی	دانشیار	
۲. متخصص و صاحب نظر از داخل دانشگاه:	دکتر احمد غلامی	استادیار	
۳. متخصص و صاحب نظر خارج از دانشگاه:	دکتر مهدی علائیان	استادیار	
۴. نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه:	دکتر جواد صفری	استادیار	

تقدیم به پدر و مادر عزیزم و برادران و

خواهران خوبم

تقدیم به همسر مهربانم که مشوق اصلی من

برای ادامه تحصیل بود

تقدیم به شکوفه باغ زندگانیم مهدی

تقدیم به همه آنهایی که دوستشان دارم

تشکر

حمد و سپاس خدایی را که بلند مرتبه و بزرگوار، توانا و داناست. او آدمی را بر دیگر موجودات به نیروی عقل واندیشه برتری بخشیده و قدر و ارج بندگان خود را به اندازه آنان از دانش و حکمت قرار داده است. حال در پایان این مجموعه بر خود وظیفه می‌دانم از استادان ارجمندی که در طول تحصیل از محضرشان کسب فیض نمودم، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم و از این میان از آقای دکتر اشرفی که فراتر از یک استاد راهنما همواره مشوق من بوده‌اند و چون معلمی دلسوز، کوشا و علاقمند مرا تشویق و راهنمایی نمودند، به پاس همه تلاشها و تشویق های بی‌ریاو خالصانه ایشان از صمیم قلب سپاسگزارم. از آقای دکتر مهدی علائیان داور مدعو و آقای دکتر احمد غلامی داور داخلی تشکر می‌کنم. همچنین از کلیه دانشجویان کارشناسی و کاشناسی ارشد که در تایپ این رساله مرا یاری کردند به ویژه از آقای محمد علی سلحشور تشکر و قدردانی می‌کنم.

چکیده

فرض کنیم H زیرگروهی از گروه G باشد. H را در G c–نرمال گوییم اگر زیرگروه نرمال N از G وجود داشته باشد به طوری که $G = HN$ و $H \cap N \leq H_G$. همچنین فرض کنیم M زیرگروه ماکسیمال گروه G بوده و H زیرگروه نرمال می‌نیمال G با شرط $G = MH$ باشد. در این صورت مرتبه هر عامل اصلی $\frac{H}{K}$ از G را اندیس نرمال M در G گوییم و با $\eta(G : M)$ نشان می‌دهیم.

در این رساله ضمن بررسی خواص مقدماتی این دو مفهوم نشان می‌دهیم آنها دو مقوله جدا ازهم نیستند و ثابت می‌کنیم زیرگروه ماکسیمال M از گروه متناهی G در G، c–نرمال است اگر و تنها اگر $\eta(G : M) = [G : M]$. به علاوه بعضی از خواص مشابه زیرگروه‌های نرمال را برای زیرگروه‌های c–نرمال ثابت کرده و نشان می‌دهیم گروه G حل‌پذیر است اگر و تنها اگر هر زیرگروه ماکسیمال G در G، c–نرمال باشد.

واژه‌های کلیدی: گروه ابرحل‌پذیر، گروه پوچ‌توان، زیرگروه c–نرمال، اندیس نرمال یک زیرگروه ماکسیمال، زیرگروه نرمال مینیمال و نرمال ماکسیمال.

فهرست مطالب

مقدمه

مفاهیم اندیس نرمال زیرگروه‌های ماکسیمال یک گروه و زیرگروه‌های c–نرمال به ترتیب اولین بار توسط دسکینز در مجله $J.Math$ سال ۱۹۵۹ و یانگ مینگ در مجله $J.Algebra$ سال ۱۹۹٦ معرفی شدند. بررسی خواص مقدماتی و ارتباط آنها با حل‌پذیری و ابرحل‌پذیری گروه توسط خود این دو نفر انجام گرفت. این رساله ضمن ارائه کارهای یانگ و دسکینز به ارتباط دو مفهوم فوق می‌پردازد که می‌تواند بستری مناسبی را برای فعالیت در این زمینه فراهم نماید و به غنای مطالب این قسمت از نظریه گروه‌ها بیفزاید. در ضمن در سال‌های اخیر تحقیق برای دستیابی به ساختمان گروه با استفاده از مفاهیم فوق ادامه یافته است. میو لانگ در سال ۲۰۰۱ نشان داد خاصیت c–نرمالی همه زیرگروه‌های سیلوی یک گروه، معادل حل پذیری گروه می‌باشد.

فصل اول به مفاهیم مقدماتی مورد نیاز این رساله اختصاص یافته است. در فصل دوم با زیرگروه‌های جدیدی از گروه‌ها آشنا می‌شویم که مطالعه خواص این زیرگروه‌ها برای دسترسی به ساختمان گروه می‌توانند مفید باشند. فصل سوم به مطالعه خواص مقدماتی اندیس نرمال اختصاص دارد. ما با تعیین شرایطی برای اندیس نرمال زیرگروه‌های ماکسیمال گروه، سعی در توصیف ساختار گروه را داریم. فصل چهارم که هسته مرکزی مقاله را تشکیل می دهد، اختصاص به زیرگروه‌های c–نرمال در یک گروه دارد. اینها زیرگروه‌های ویژه‌ای از یک گروه هستند که شناخت کامل آنها در تجزیه گروه مفید واقع می شوند. در فصل پنجم دو قضیه‌ای را که سرنیوسان در [۱۵] و باکلی در [٦] ثابت کرده‌اند را با تغییر خاصیت ضعیف تر c–نرمالی به جای نرمال بودن زیرگروه‌های مطرح شده ثابت می‌کنیم. مراجع اصلی این رساله [۱], [۴], [۷], [۹] و [۱۷] می‌باشند و خواننده علاقمند می‌تواند برای مطالعه بیشتر به مراجع فوق مراجعه نماید.

فصل اول

مفاهیم مقدماتی

این فصل به معرفی مفاهیم مورد نیاز در این رساله اختصاص دارد. ما تلاش خواهیم کرد مفاهیم را به زبانی ساده و با استفاده از مثال‌های متنوع ارائه کنیم. تعدادی از احکام که نقش اساسی در این رساله دارند اثبات خواهند شد. برای باقی احکام و قضایا خواننده علاقمند می‌تواند به مراجع مربوطه رجوع کند.

فرض کنیم H زیرگروهی از گروه G باشد. مجموعه $H_G = \bigcap_{g\in G}(g^{-1}Hg)$ که یک زیرگروه نرمال G است را هسته H در G می‌نامیم. هسته H در G را با $Core_G(H)$ نیز نشان می‌دهند. به سادگی می‌توان دید که هسته H در G بزرگترین زیرگروه نرمال G است که در H قرار دارد.

تعریف ۱–۱: سری نرمال $G = G_0 \geq G_1 ... \geq G_r = 1$ را یک سری اصلی برای گروه G گوییم اگر جملات سری غیر تکراری بوده و آن را نتوان تظریف نمود. هر عامل سری اصلی G را یک عامل اصلی G می‌نامیم.

فرض کنیم G یک گروه و H در G نرمال و سره باشد. گوییم H در G نرمال ماکسیمال است هرگاه $H \leq K \trianglelefteq G$ ایجاب کند $H = K$ یا $K = G$. بنابر قضیه‌ای معروف در نظریه گروه‌ها زیرگروه H از G نرمال ماکسیمال است اگر و تنها اگر $\frac{G}{M}$ ساده باشد. مجدداً فرض کنیم $N \neq ۱$ در G نرمال باشد. N را زیرگروه نرمال می‌نیمال G می‌نامیم هرگاه برای هر زیرگروه نرمال K با شرط $۱ \leq K \leq N$ داشته باشیم $K = N$ یا $K = ۱$.

مثال ۱–۲: یک سری اصلی برای گروه چهارگانی $G = \{۱, -۱, i, -i, j, -j, k, -k\}$ عبارت است از $۱ \leq \{۱, -۱\} \leq \{۱, -۱, i, -i\} \leq G$. $\{۱, -۱\}$ زیرگروه نرمال می‌نیمال G و $\{۱, -۱, i, -i\}$ زیرگروه نرمال ماکسیمال G است. تنها سری اصلی برای $S_۳$، $۱ \leq \langle(۱, ۲, ۳)\rangle \leq S_۳$ بوده و $\langle(۱, ۲, ۳)\rangle$ هم زیرگروه نرمال می‌نیمال و هم زیرگروه نرمال ماکسیمال G است. همچنین در گروه جمعی اعداد صحیح هر زیرگروه تولید شده توسط یک عدد اول زیرگروه نرمال ماکسیمال است و نهایتاً زیرگروه A_n از جایگشت‌های زوج یعنی گروه متناوب روی n–حرف زیرگروه نرمال ماکسیمال S_n است.

تعریف ۱–۳: فرض کنیم H زیرگروهی از گروه G باشد. زیرگروه K از G را یک مکمل H در G نامیم هرگاه $G = HK$. همچنین اگر $H \cap K = ۱$ آنگاه K را متمم H در G می‌نامیم. به‌علاوه متمم یک p–سیلو از G را یک p–متمم G می‌نامیم.

فراتینی در سال ۱۸۸۵ قضیه مهم زیر را که معروف به بحث فراتینی [۱] است بیان و ثابت کرده است.

قضیه۱–۴: فرض کنیم K یک زیرگروه نرمال از گروه G و P یک p–سیلوی K باشد. در این صورت $G = KN_G(P)$.

[1] Frattini argument

اثبات: فرض کنیم $g \in G$. در این صورت چون $P \leq K \trianglelefteq G$ نتیجه می‌شود $P^g \leq K^g = K$ و ازاین‌رو P^g نیز p−سیلوی K می‌باشد. لذا بنابر قضیه سیلو عضو x در K وجود دارد به طوری که $P^{gx} = P$. بنابراین $gx \in N_G(P)$ و درنتیجه $g \in N_G(P)K$. لذا $G \leq N_G(P)K = KN_G(P)$. به وضوح $KN_G(P) \leq G$ و از این‌رو $G = KN_G(P)$. □

زیرگروه H از G را مشخصه گوییم هرگاه برای هر خودریختی f از G داشته باشیم $f(H) \subseteq H$. زیرگروه‌های $G', G, 1$ و $Z(G)$ در G مشخصه هستند. به سادگی می‌توان دید که اگر H تنها زیرگروه، گروه G از مرتبه n باشد آنگاه H در G مشخصه است. به علاوه اگر A زیرگروه مشخصه B و B در G نرمال باشد آنگاه A زیرگروه نرمال G خواهد بود.

تعریف ۱−۵: فرض کنیم $p_1 > p_2 > \ldots > p_n$ همه عامل‌های اول مرتبه گروه متناهی G باشند. گوییم G برج سیلو دارد هرگاه $G_{p_1} \lhd G_{p_2}G_{p_1} \lhd \cdots \lhd G = G_{p_n} \cdots G_{p_1}$ که در آن $G_{p_i} \in Syl_{p_i}(G)$.

از قضایای مهم این بخش می‌توان از قضیه p−متمم برنساید[1] نام برد. با استفاده از این قضیه می‌توان غیرساده بودن بسیاری از گروه‌ها را اثبات نمود.

قضیه ۱−۶: (p−متمم برنساید) اگر G یک گروه متناهی باشد، $P \in Syl_p(G)$ و $N_G(P) = C_G(P)$ آنگاه G، p−متمم نرمال دارد.

اثبات: به قضیه ۹−۲−۶ در [۱۴] رجوع شود.

حال یکی از کاربردهای قضیه p−متمم برنساید را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱−۷: فرض کنیم G یک گروه متناهی و p کوچکترین عدد اولی باشد که مرتبه G را می‌شمارد. همچنین فرض کنیم $P \in Syl_p(G)$ دوری باشد در این صورت G، p−متمم نرمال دارد.

---

[1] Burnside

اثبات: فرض کنیم $|P| = p^n$. در این صورت بنابر قضیه NC، $\frac{N_G(P)}{C_G(P)}$ با زیرگروهی از $Aut(G)$ یکریخت می‌باشد. اما $|Aut(P)| = p^n(p-1)$ و لذا $|\frac{N_G(P)}{C_G(P)}||p^n(p-1)$. از طرفی چون P دوری است پس $P \subseteq C_G(P)$، $\frac{|N_G(P)|}{|C_G(P)|} \nmid |P|$ و $\frac{|N_G(P)|}{|C_G(P)|}|(p-1)$. حال اگر $N_G(P) \neq C_G(P)$ آنگاه $\frac{N_G(P)}{C_G(P)}$ داری عامل اولی چون q است. درنتیجه $q|p-1$ و $p < p-1 \leq q$ که این با انتخاب p متناقض است. بنابراین $N_G(P) = C_G(P)$ و بنابه قضیه ۱—۶ حکم ثابت می‌شود. □

زیرگروه تولید شده توسط همه زیرگروه‌های نرمال پوچ‌توان گروه G را زیرگروه فی‌تینگ G می‌نامیم. زیرگروه فی‌تینگ G بزرگترین زیرگروه نرمال پوچ‌توان G است و آن را با $F(G)$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد، در این صورت می‌توان دید $F(G) = O_{p_1}(G)...O_{p_n}(G)$ که در آن $O_{p_i}(G)$ اشتراک تمام p_i—سیلوهای G است. همچنین اشتراک تمام زیرگروه‌های ماکسیمال G را با $\phi(G)$ نشان داده و آن را زیرگروه فراتینی G می‌نامیم. در صورتی که G گروه بدیهی باشد قرار می‌دهیم $\phi(G) = 1$. به راحتی می‌توان دید که $\phi(G)$ یک زیرگروه مشخصه G است.

قضیه۱—۸: در هر گروه G زیرگروه فراتینی مجموعه غیر مولدهای G است.

اثبات: به قضیه ۳ـ۱۵ـ۲۰ در [۱۱] رجوع شود.

تعریف ۱—۹: فرض کنیم p عددی اول باشد. p—گروه آبلی A را آبلی مقدماتی می‌نامیم هرگاه مرتبه هر عضو A برابر p باشد.

تعریف ۱—۱۰: فرض کنیم π یک مجموعه از اعداد اول باشد. عدد صحیح مثبت m را یک π— عدد می‌نامیم هرگاه هر عامل اول m متعلق به مجموعه π باشد. گوییم عضو $x \in G$ یک π—عنصراست هرگاه مرتبه x یک π—عدد باشد. همچنین گروه G را یک π—گروه می‌نامیم، در صورتی که هر عضو آن یک π—عنصر باشد.

چنانچه $\pi = \{p\}$ به جای π–عنصر و π–گروه از عبارات p–عنصر و p–گروه استفاده می‌کنیم. به علاوه متمم مجموعه π را با π' نمایش داده و مجموعه همه عامل های اول مرتبه گروه G را با $\pi(G)$ نشان می‌دهیم و منظور از $|G|_p$ عامل p–ام مرتبه G است.

اگر قرار دهیم $\pi = \{۲,۳,۵\}$. دراین صورت به سادگی می‌توان دید که $S_۳$، $S_۴$ و $S_۵$ همگی π–گروه هستند.

در ادامه به مطالعه ضرب نیم مستقیم گروه‌ها که تعمیمی از حاصل ضرب مستقیم گروه‌ها می‌باشد، می‌پردازیم. فرض کنیم H و K زیرگروه‌هایی از گروه G باشند به طوری که $H \trianglelefteq G$، $G = HK$ و $H \cap K = ۱$. در این صورت G را حاصل ضرب نیم مستقیم K و H می نامیم و آن را با $H \rtimes K$ نشان می‌دهیم. به سادگی می‌توان دید $S_۳$ حاصل ضرب نیم مستقیم دو زیرگروه سره خود است. مثال زیر نشان می‌دهد که یک گروه ممکن است حاصل ضرب نیم مستقیم دو زیرگروه سره خود نباشد.

مثال ۱–۱۱: گروه کواترنیون مرتبه ۸ حاصل ضرب نیم مستقیم دو زیرگروه سره خود نیست. نمایش این گروه به صورت $Q_۸ = \langle a, b | a^۴ = ۱, a^۲ = b^۲, b^{-۱}ab = a^{-۱}\rangle$ می‌باشد. تنها عضو مرتبه ۲ این گروه $a^۲$ است. حال اگر $Q_۸$ به صورت حاصل ضرب نیم مستقیم دو زیرگروه سره K و H باشد آنگاه باید $|K| = ۴$ و $|H| = ۲$ یا $|K| = ۲$ و $|H| = ۴$. در هر حال طبق قضیه کشی K و H هر کدام دارای عضو با مرتبه ۲ هستند و چون $H \cap K = ۱$ پس $Q_۸$ باید حداقل دو عضو از مرتبه ۲ داشته باشند که این امکان ندارد. بنابراین $Q_۸$ را نمی‌توان به صورت حاصل ضرب نیم مستقیم دو زیرگروه سره خود نوشت.

تعریف ۱–۱۲: گروه G را اولیه می‌نامیم هرگاه زیرگروه ماکسیمال M از G موجود باشد به طوری که $M_G = ۱$. در این حالت M را یک پایدارساز G می‌نامیم. همچنین فرض کنیم H زیرگروهی از G

و K زیرمجموعه‌ای از G باشد، در این صورت گوییم K، H-پایا است هرگاه برای هر $h \in H$ و هر $k \in K$ داشته باشیم $k^h \in K$.

در ادامه گروه های حل‌پذیر و ابرحل‌پذیر را تعریف و احکامی را در مورد آنها بیان و بعضی از آنها را ثابت خواهیم کرد.

تعریف ۱—۱۳: فرض کنیم G یک گروه باشد. زیرگروه تولید شده به وسیله مجموعه $\{aba^{-1}b^{-1}|a, b \in G\}$ زیرگروه تعویض‌گر G نام دارد و با G' نموده می شود. قرار می‌دهیم $G' = G^{(1)}$ و برای هر $i > 1$، $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$. گروه G را حل‌پذیر می‌نامیم، هرگاه عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که $G^{(n)} = 1$.

بنابه قضیه‌ای در نظریه مقدماتی گروه‌ها، گروه G حل‌پذیر است اگر و تنها اگر G زیرگروهی نرمال چون N داشته باشد که N و $\frac{G}{N}$ حل‌پذیر باشند. ما در موارد متعدد از این حکم بدون ذکر مرجع استفاده خواهیم کرد.

مثال ۱—۱۴: اگر G گروهی آبلی باشد آنگاه $G' = 1$ و لذا G گروهی حل‌پذیر است.

مثال ۱—۱۵: اگر G یکی از گروه‌های Q_8 یا D_8 باشد آنگاه $|Z(G)| = 2$. پس $\frac{G}{Z(G)}$ گروهی از مرتبه ۴ و درنتیجه آبلی است پس $G' \subseteq Z(G)$. از طرف دیگر چون G ناآبلی است، پس $G' \neq 1$ و درنتیجه باید $|G'| = 2$، یعنی G' گروهی دوری است. بنابراین $G'' = 1$ و گروه G حل‌پذیر است.

به سادگی می‌توان دید که اگر G گروهی ساده و ناآبلی باشد، آنگاه چون $G' \trianglelefteq G$ و $G' \neq 1$ پس G گروهی غیرحل‌پذیر است.

قضیه ۱—۱۶: (فلیپ هال) فرض کنیم G یک گروه حل‌پذیر متناهی از مرتبه mn باشد که $(m, n) = 1$، در این صورت:

۱) G شامل زیرگروهی از مرتبه m است.

۲) هر دو زیرگروه G از مرتبه m مزدوجند.

۳) هر زیرگروه G از مرتبه k که $k|m$ مشمول زیرگروهی از مرتبه m است.

اثبات : به قضیه ۳—۱۵—۳۰ در [۱۱] رجوع شود.

تعریف ۱—۱۷: گروه G را ابرحل‌پذیر می‌نامیم درصورتی که دارای سری نرمال با عوامل دوری باشد.

بنابر قضیه شناخته شده‌ای در نظریه گروه‌ها هر گروه ابرحل‌پذیر دارای برج سیلو است. به وضوح هر گروه ابرحل‌پذیر، حل‌پذیر می‌باشد. قضیه زیر یکی از خواص ابتدایی گروه‌های حل‌پذیر(ابرحل‌پذیر) را بیان می‌کند.

قضیه ۱—۱۸: فرض کنیم H و G دو گروه حل‌پذیر(ابرحل‌پذیر) باشند دراین صورت:

الف) هر زیرگروه و هر گروه خارج قسمتی G حل‌پذیر(ابرحل‌پذیر) است.

ب) هر نگاره همریخت G حل‌پذیر(ابرحل‌پذیر) است.

ج) $G \times H$ حل‌پذیر(ابرحل‌پذیر) است.

اثبات : به قضیه ۲—۱ در [۱۷] رجوع شود.

با استفاده از قضیه قبل به راحتی می‌توان دید که اگر N_1 و N_2 دو زیرگروه نرمال G باشند به طوری که $\frac{G}{N_1}$ و $\frac{G}{N_2}$ حل‌پذیر(ابرحل‌پذیر) باشند آنگاه $\frac{G}{N_1 \cap N_2}$ با زیرگروهی از $\frac{G}{N_2} \times \frac{G}{N_1}$ یکریخت بوده و لذا حل‌پذیر(ابرحل‌پذیر) خواهد بود. ما از این نتیجه نیز بدون ذکر مرجع استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱—۱۹: فرض کنیم A یک π'—گروه از اتومورفیسم‌های π—گروه G باشد و همچنین فرض کنیم حد اقل یکی از گروه‌های A یا G حل‌پذیر باشند، در این صورت برای هر $p \in \pi$، هر دو p—سیلوی G که A—پایا باشند در $C_G(A)$ مزدوج هستند.