وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (گرایش توپولوژی)

وجود گروه‌های لهستانی با عمل ترایا بر فضاهای همگن لهستانی

توسط:

نجما مصدق کردمحله

استاد راهنما:

دکتر محمد ابری

استاد مشاور:

دکتر عباس فخاری

شهریور ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

وجود گروه‌های لهستانی با عمل ترایا بر فضاهای همگن لهستانی

توسط:

نجما مصدق کردمحله

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض (گرایش توپولوژی)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر محمد ابری استادیار دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر عباس فخاری استادیار دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر سید علی تقوی استادیار دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر غلامرضا عباسپور استادیار دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر اکبر هاشمی برزآبادی استادیار دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم به

مادرم

سپاسگزاری

غافل منشین ورقی می‌خراش　　　گر ننویسی قلمی می‌تراش

سپاس آن نگارنده‌ی غیب را که توفیق گردآوری این مجموعه را به من اعطا کرد.

با سپاس صمیمانه از والدینم پدر و بخصوص مادرم بخاطر حمایت بی‌حدشان و از برادرانم بخاطر راهنمایی شان در تمام لحظات سپری شده.

با تشکر ازآقای دکتر ابری استاد راهنمای بزرگوارم و جناب دکتر فخاری که زحمت مشاوره را به عهده داشتند.

در آخر از همه‌ی دوستانم که در این مسیر مشوق من بودند تشکر و برایشان آرزوی موفقیت دارم.

چکیده

وجود گروه‌های لهستانی با عمل ترایا بر فضاهای همگن لهستانی

به وسیله‌ی:

نجما مصدق کردمحله

قضیه‌ی افرس درباره ی عمل‌هایی از گروههای لهستانی روی فضاهای لهستانی در بخشی از موارد خود بیان می دارد که اگر G گروه لهستانی باشد و روی فضای لهستانی X ترایا عمل کند، آنگاه X یک فضای همرده از G است. با الهام از این موضوع، ما نشان می‌دهیم برای هر فضای همگن و موضعا همگن قوی لهستانی X، وجود دارد یک گروه لهستانی که، بطور ترایا روی آن عمل می کند. یعنی X فضای همرده از گروه لهستانی است. همچنین به طور مفصل مثالی از یک فضای همگن ارائه شده که یک فضای همرده نبوده و هیچ گروه توپولوژیکی متریک جدایی‌پذیری روی آن ترایا عمل نمی‌کند.

کلمات کلیدی: فضای همگن، فضای همرده، فضای لهستانی، عمل ترایا

فهرست مطالب

پیشگفتار

فصل یک شامل مفاهیم پایه‌ای در توپولوژی است که ما را در فهم بیشتر مطالب فصل‌های آتی یاری می کند.

درفصل دوم، بنا به قضیه‌ی افرس[1] درباره ی عمل‌هایی از گروههای لهستانی روی فضاهای لهستانی، انگیزه‌ی تحقیق وجود گروههای لهستانی با عمل ترایا روی فضاهای همگن لهستانی را بوجود آورد. اگر گروه توپولوژیک G روی فضای توپولوژیک X ترایا عمل کند، آنگاه X فضایی همگن است. برای فضای همگن X گروه همسانریختی‌های $\mathcal{H}(X)$ آن با توپولوژی گسسته روی آن بطور ترایا عمل می‌کند. و اگر X فشرده باشد، توپولوژی فشرده-باز روی $\mathcal{H}(X)$ بهتر است. همچنین قضیه‌ی افرس موجب می‌شود که اگر G گروه لهستانی باشد و روی فضای لهستانی X ترایا عمل کند آنگاه X فضای همرده از گروه لهستانی است.

مثالی از یک فضای همگن لهستانی ارائه می‌دهیم در حالیکه فضایی همرده نیست و هیچ گروه متریک جدایی‌پذیری روی آن ترایا عمل نمی‌کند. فضای مورد نظرمان به صورت حاصلضرب دو فضا نیست، بطوریکه یکی همبند ودیگری موروثا ناهمبند باشد یعنی ساختار حاصلضربی ندارد و همچنین هیچ فشرده سازی متریک پذیری هم ندارد.

در فصل سوم با معرفی مفهوم لهستانی پذیری به اثبات این قضیه ی مهم می پردازیم که برای هر فضای همگن و موضعا همگن قوی لهستانی، وجود دارد یک گروه لهستانی که بطور ترایا روی آن عمل می‌کند. بنابراین در رده‌ی فضاهای لهستانی هر فضای همگن و موضعا همگن قوی نیز فضایی همرده از یک گروه لهستانی است. در این بین یک محک مبنی بر اینکه زیرگروههای سره از گروههای لهستانی تحت چه شرایطی لهستانی‌پذیر هستند

[1] Effros

بررسی می شوند.

در فصل چهارم ضمن ارائه ی مقدماتی درباره ی مکعب هیلبرت، بر مبنای آن مثالی از فضای لهستانی همگن همبند ارائه می‌دهیم که هیچ گروه توپولوژیکی $\aleph_0$- کرانداری روی آن بطور ترایا عمل نمی‌کند. همچنین نشان می‌دهیم متمم این فضای ساخته شده، یک σZ-مجموعه از آن هست بنابراین با زیرمجموعه‌ی محدب از فضای هیلبرت ℓ^2 همسانریخت است.

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

۱-۱ اصول جداسازی

تعریف ۱.۱.۱. *اگر برای هر جفت نقاط مجزا $x_1, x_2 \in X$ مجموعه‌ی باز $U \subseteq X$ وجود داشته باشد به طوری که دقیقا شامل یکی از آن دو نقطه باشد آنگاه فضای توپولوژیکی X، **فضای** T_0 نامیده می‌شود.*

تعریف ۲.۱.۱. *اگر برای هر جفت نقاط مجزا $x_1, x_2 \in X$، مجموعه‌ی باز $U \subset X$ وجود داشته باشد به طوری که $x_1 \in U$ و $x_2 \notin U$ و همچنین مجموعه‌ی باز $V \subset X$ وجود داشته باشد که $x_2 \in V$ و $x_1 \notin V$ آنگاه X **فضای** T_1 نامیده می‌شود.*

- هر فضای T_1، یک فضای T_0 است.

- X فضای T_1 است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$ مجموعه‌ی $\{x\}$ بسته باشد. در حقیقت اگر X فضای T_1 باشد آنگاه برای هر $x \in X$ داریم $\{x\} = \bigcap\{X \setminus U : x \notin U \in \mathcal{O}\}$ که $\mathcal{O}$ توپولوژی از X است. بنابراین مجموعه‌ی $\{x\}$ بسته است. از طرف دیگر اگر برای هر $x \in X$، مجموعه‌ی $\{x\}$ بسته باشد آنگاه X فضای T_1 است زیرا برای هر جفت نقاط متمایز $x_1, x_2 \in X$ مجموعه‌ی باز $U \setminus \{x_2\}$ شامل x_1 است و شامل x_2 نیست.

تعریف ۳.۱.۱. *اگر برای هر جفت نقاط مجزا $x_1, x_2 \in X$ مجموعه‌های باز U_1 و U_2 به طوری که $x_1 \in U_1$*

و $U_2 \ni x_2$ و $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ وجود داشته باشد آنگاه فضای توپولوژیک X، ***فضای*** T_2 یا ***فضای هاسدورف***[1] نامیده می‌شود.

- هر فضای T_2 یک فضای T_1 است.

تعریف ۴.۱.۱. *اگر X فضای T_1 باشد. و برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی بسته $F \subset X$ به طوری که $x \notin F$ مجموعه‌های باز U_1 و U_2 وجود داشته باشند به طوری که $x \in U_1$ و $F \subset U_2$ و $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ آنگاه فضای توپولوژیک X، **فضای** T_3 یا **فضای منظم** نامیده می‌شود.*

- هر فضای منظم به روشنی فضای هاسدورف است.

تعریف ۵.۱.۱. *فضای توپولوژیک X را **فضای** $T_{3\frac{1}{2}}$ یا **فضای تیخونوف** یا **فضای منظم کامل** گویند هرگاه X فضای T_1 باشد و برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی بسته $F \subset X$ به طوری که $x \notin F$، تابع پیوسته‌ی $f : X \to \mathbb{I}$ وجود داشته باشد به طوری که $f(x) = 0$ و $f(y) = 1$ برای هر $y \in F$.*

- چون برای مجموعه‌های باز $U_1 = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ و $U_2 = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ داریم $x \in U_1$ و $F \subset U_2$ و $U_1 \cap U_2 = \emptyset$، هر فضای تیخونوف یک فضای منظم است.

تعریف ۶.۱.۱. *اگر X فضای T_1 باشد و برای هر جفت از زیرمجموعه‌های بسته $A, B \subset X$،مجموعه‌های باز U و V وجود داشته باشند به طوری که $A \subset U$ و $B \subset V$ و $U \cap V = \emptyset$ آنگاه فضای توپولوژیک X، **فضای نرمال** یا **فضای** T_4 نامیده می‌شود.*

- به روشنی هر فضای T_4 فضای T_3 است و همچنین فضای $T_{3\frac{1}{2}}$ هم است.

تعریف ۷.۱.۱. *اگر X فضای هاسدروف باشد و هر پوشش باز از آن یک زیرپوشش متناهی داشته باشد یعنی اگر برای هر پوشش باز $\{U_s\}_{s\in S}$ از X مجموعه‌ی متناهی $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\} \subset S$ وجود داشته باشد به طوری که $X = U_{s_1} \cup U_{S_2} \cup \ldots \cup U_{s_k}$ آنگاه X **فضای فشرده** نامیده می‌شود.*

خانواده‌ی $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s\in S}$ از زیرمجموعه‌های X، خاصیت اشتراک متناهی دارد اگر $\mathcal{F} \neq \emptyset$ و $F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_k} \neq \emptyset$ برای هر مجموعه‌ی متناهی $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\} \subset S$.

[1] Hausdorff

تعریف ۸.۱.۱. *اجتماع شمارا از مجموعه‌های فشرده را σ- **فشرده** می‌گویند.*

قضیه ۹.۱.۱. *فضای هاسدورف X فشرده است اگر وتنها اگر هر خانواده از زیرمجموعه‌های بسته از X در حالیکه خاصیت اشتراک متناهی دارد، اشتراک ناتهی داشته باشد.*

اثبات. به [۱۰، قضیه ۳.۱.۱] مراجعه شود. □

تعریف ۱۰.۱.۱. *اگر برای هر $x \in X$ همسایگی U از نقطه‌ی x وجود داشته باشد به طوری که $\overline{U}$ یک زیرفضای فشرده از X باشد آنگاه X فضای **موضعا فشرده** نامیده می‌شود.*

چون فضای فشرده $\overline{U}$ یک فضای $T_۱$ است، مجموعه‌ی $\{x\}$ در $\overline{U}$ بسته است. این موجب می‌شود که $\{x\}$ در X بسته باشد یعنی هر فضای موضعا فشرده یک فضای $T_۱$ است. بنابراین نتیجه‌ی زیر را داریم.

قضیه ۱۱.۱.۱. *هر فضای موضعا فشرده یک فضای تیخونوف است.*

اثبات. به [۱۰، قضیه ۳.۳.۱] مراجعه شود. □

تعریف ۱۲.۱.۱. *اگر X یک مجموعه باشد، مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های یک عضوی X پایه ای برای توپولوژی روی X تعریف می‌کنند که **توپولوژی گسسته** نامیده می‌شود.*

فرض می‌کنیم $\pi_۱ : X \times Y \to X$ با رابطه‌ی

$$\pi_۱(x,y) = x$$

و $\pi_۲ : X \times Y \to Y$ با رابطه‌ی

$$\pi_۲(x,y) = y$$

تعریف شود. نگاشت‌های $\pi_۱$ و $\pi_۲$ تصویری از $X \times Y$ به ترتیب داخل اول و دومین مولفه هستند.

تعریف ۱۳.۱.۱. *فرض می‌کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ یک خانواده‌ی اندیس‌دار از فضاهای توپولوژیکی باشد. مجموعه‌ی $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ که برای هر $\alpha \in J$، U_α در X_α باز است یک پایه برای یک توپولوژی روی $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ باشد.توپولوژی تولید شده بوسیله‌ی این پایه **توپولوژی جعبه‌ای** نامیده می‌شود.*

فرض می‌کنیم $\pi_\beta : \prod\limits_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_\beta$ تابع تصویر هر عنصر از فضای حاصلضرب به βامین مولفه باشد.

$$\pi_\beta((X_\alpha)_{\alpha\in J}) = X_\beta;$$

یک نگاشت تصویری وابسته با اندیس β نامیده می‌شود. فرض می‌کنیم

$$\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) | \text{ در } X_\beta \text{ باز است } U_\beta\}$$

و در نظر می‌گیریم $\mathcal{S} = \bigcup\limits_{\beta\in J} \mathcal{S}_\beta$. توپولوژی تولید شده بوسیله‌ی زیر پایه‌ی $\mathcal{S}$ توپولوژی حاصلضربی نامیده می‌شود.

فرض می‌کنیم X فضای توپولوژیک باشد. اگر U و V زیرمجموعه‌های باز و ناتهی از X باشند. به طوری که $V \cap U = \emptyset$ و $V \cup U = X$ آنگاه X یک جداسازی دارد.

تعریف ۱.۱.۱۴. *اگر فضای توپولوژیکی X هیچ جداسازی نداشته باشد، **فضای همبند** نامیده می‌شود.*

فضای X همبند است اگر و تنها اگر زیرمجموعه‌های بسته-باز نابدیهی نداشته باشد.

۱-۲ فشرده‌سازی

جفت (Y, c) که Y فضای فشرده و $c : X \to Y$ یک نشاندن همسانریخت از X به Y است به طوری که $\overline{c(X)} = Y$، فشرده‌سازی از فضای X نامیده می‌شود.

اگر فضای X قابل نشاندن در یک فضای فشرده Y باشد یعنی اگر همسانریختی $f : X \to M$ به یک زیر فضای $M = f(X)$ از Y وجود داشته باشد آنگاه به روشنی جفت $(\overline{f(X)}, if(X))$ که i نشاندن از M در $\overline{M}$ را مشخص می‌کند یک فشرده‌سازی از فضای X است. بنابراین هر فضایی که قابل نشاندن در یک فضای فشرده باشد، یک فشرده‌سازی دارد.

قضیه ۱.۲.۱. *فضای توپولوژیک X یک فشرده‌سازی دارد اگر و تنها اگر X فضای تیخونوف باشد.*

اثبات. به [۱۰، قضیه ی ۳.۵.۱] مراجعه شود. □

تعریف ۲.۲.۱. *فرض می‌کنیم cX یک فشرده‌سازی از فضای X باشد مجموعه‌ی $cX \setminus c(X)$ یعنی مجموعه نقاط cX که از $c(X)$ متفاوت هستند، **باقیمانده فشرده‌سازی** cX نامیده می‌شود.*

فرض می‌کنیم $\mathcal{C}(X)$ خانواده‌ی همه‌ی فشرده‌سازی‌ها در X را نشان دهد. اکنون رابطه‌ی ترتیب را روی آن تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۲.۱. *می‌گوییم دو فشرده‌سازی c_1X, c_2X از یک فضای X* ***هم‌ارزند*** *اگر یک همسانریختی $f : c_1X \to c_2X$ وجود داشته باشد به طوری که نمودار زیر*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{id_X} & X \\ {\scriptstyle c_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle c_2}\big\downarrow \\ c_1X & \xrightarrow{f} & c_2X \end{array}$$

جابه‌جا شود. یعنی $f \circ c_1 = c_2$.

اگر نگاشت پیوسته‌ی $f : c_1X \to c_2X$ وجود داشته باشد به طوری که $f \circ c_1 = c_2$ آنگاه $c_2X \leq c_1X$ یعنی c_1X به c_2X برده می‌شود. قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که $\leq$ یک ترتیب روی خانواده‌ی $\mathcal{C}(X)$ است.

قضیه ۴.۲.۱. *دو فشرده‌سازی c_1X, c_2X از یک فضای X هم‌ارزند هستند اگر و تنها اگر $c_1X \leq c_2X$ و $c_2X \leq c_1X$.*

اثبات. به [۱۰، قضیه ۳.۵.۴] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۵.۲.۱. *هر زیرخانواده‌ی ناتهی $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}(X)$، با توجه به رابطه‌ی $\leq$ دارای کوچکترین کران بالا است.*

اثبات. به [۱۰، قضیه ۳.۵.۹] مراجعه شود. $\square$

نتیجه ۶.۲.۱. *برای هر فضای تیخونوف X، در $\mathcal{C}(X)$ با در نظرگرفتن رابطه‌ی $\leq$، بزرگترین عنصر وجود دارد.*

بزرگترین عنصر در خانواده‌ی $\mathcal{C}(X)$ از همه‌ی فشرده‌سازی‌های از یک فضای تیخونوف X، فشرده‌سازی استون-چخ یا ماکسیمال فشرده‌سازی از X می‌گویند و بوسیله‌ی βX نشان می‌دهند. در ارتباط با قضیه‌ی قبلی سوالی مطرح می‌شود که برای کدام یک ازفضاهای X، هر زیرخانواده از $\mathcal{C}(X)$ دارای بزرگترین کران پایین است؟

اگر برای یک زیرخانواده‌ی $\mathcal{C}_0$ از $\mathcal{C}(X)$ خانواده‌ی $\mathcal{C}'_0 = \{c'X : c'X \leq cX \quad \forall cX \in \mathcal{C}_0\}$ ناتهی باشد، آنگاه بزرگترین کران بالای آن، بزرگترین کران پایین از $\mathcal{C}_0$ است.بنابراین بزرگترین کران پایین در $\mathcal{C}(X)$ وجود دارد اگر و تنها اگر کوچکترین عنصر در $\mathcal{C}(X)$ وجود داشته باشد. به روشنی این معادل است با اینکه X فضای موضعا فشرده باشد.

قضیه ۷.۲.۱. *هر فضای نافشرده‌ی موضعا فشرده X، فشرده‌سازی wX با مانده‌ی تک نقطه‌ای دارد. این فشرده‌سازی کوچکترین عنصر در $\mathcal{C}(X)$ با در نظر گرفتن رابطه‌ی ترتیب $\leq$ می‌باشد.*

اثبات. به [۱۰، قضیه ی ۳.۵.۱۱] مراجعه شود. □

فشرده‌سازی wX از فضای نافشرده‌ی موضعا فشرده X، فشرده‌سازی الکساندروف[۲] از X، فشرده‌سازی تک-نقطه‌ای یا فشرده‌سازی مینیمال نامیده می‌شود. می‌توان گفت که آن بوسیله‌ی، اضافه کردن یک نقطه به فضای X بدست می‌آید.

قضیه ۸.۲.۱. *هر نگاشت پیوسته $f : X \to Z$ از فضای تیخونوف X به فضای فشرده Z قابل گسترش به نگاشت پیوسته $F : \beta X \to Z$ است. بعلاوه اگر هر نگاشت پیوسته از یک فضای تیخونوف به یک فضای فشرده بطور پیوسته قابل گسترش روی یک فشرده‌سازی αX از X، باشد آنگاه αX معادل با فشرده‌سازی استون-چخ[۳] می‌باشد.*

اثبات. به [۱۰، قضیه ۳.۶.۱] مراجعه شود. □

۱-۳ فضاهای صفربعدی

در ادامه فرض می کنیم فضاها متریک باشند.

تعریف ۱.۳.۱. *فضای توپولوژیکی X را **فضای صفربعدی** می‌گویند، اگر ناتهی و دارای یک پایه از مجموعه‌های بسته-باز باشد. یعنی برای هر نقطه $x \in X$ و هر همسایگی U از x، زیرمجموعه‌ی بسته-باز C در X وجود دارد به طوری که $x \in C \subset U$.*

روشن است که زیرفضای یک فضای صفربعدی، صفربعدی است. همچنین حاصلضرب فضاهای صفربعدی نیز صفربعدی است.

گزاره ۲.۳.۱. *زیرفضای ناتهی X از $\mathbb{R}$ صفربعدی است اگر و تنها اگر شامل هیچ بازه‌ای نباشد.*

---

[۲] Alexandroff

[۳] Cech-stone

اثبات. فرض می‌کنیم $X \subseteq \mathbb{R}$ صفربعدی باشد. اگر X شامل یک بازه ناتباهیده E باشد آنگاه X یک زیرفضای همبند ناتباهیده دارد و بنابراین صفربعدی نیست.

حال فرض می‌کنیم که $X \subseteq \mathbb{R}$ که شامل هیچ بازه ی ناتباهیده نباشد. آنگاه مجموعه‌ی $D = \mathbb{R} \setminus X$ در $\mathbb{R}$ چگال است. خانواده ی

$$\{(d_۱, d_۲) \cap X : d_۱ < d_۲ \text{ و } d_۱, d_۲ \in D\}$$

به آسانی دیده می‌شود یک پایه برای X متشکل از مجموعه‌های بسته- باز از X است. در نتیجه، X صفربعدی است.

□

تعریف ۱.۳.۳. *فرض کنید X فضای توپولوژیکی باشد، A و B را یک جفت از زیرمجموعه‌های مجزا X در نظر می‌گیریم. $L \subset X$ را یک **افراز** بین A و B می‌گوییم اگر زیرمجموعه‌های باز U و W از X وجود داشته باشند به طوری که*

$$A \subset B, \;\; B \subset W, \;\; U \cap W = \emptyset, \;\; X \setminus L = U \cup W.$$

- به وضوح افراز L یک زیرفضای بسته از X می‌باشد.

تعریف ۱.۳.۴. *فضای توپولوژیکی X **تماما ناهمبند** نامیده می‌شود اگر برای هر جفت نقاط متمایز x, y از X یک مجموعه‌ی بسته- باز $U \subset X$ وجود داشته باشد به طوری که $x \in U$ و $y \in X \setminus U$. یعنی مجموعه‌ی تهی یک افراز بین هر دو نقطه‌ی متمایز از فضای X باشد.*

هر فضای صفر بعدی X تماما ناهمبند است. زیرا X متریک است بنابراین یک فضای $T_۱$ نیز است یعنی برای هر $x, y \in X$ و $x \neq y$ آنگاه وجود دارد همسایگی $U \subset X$ به طوری که $x \in U$ و $y \notin U$. بنا به صفربعدی بودن X، برای هر $x \in X$ و هر $U \subseteq X$ یک بسته-باز C وجود دارد که $x \in C \subset U$.

تعریف ۱.۳.۵. ***شبه مولفه*** *از فضای توپولوژیکی X مینیمال اشتراک ناتهی از زیرمجموعه‌های بسته- باز X تعریف می‌شود یعنی مجموعه ناتهی $k \subset X$ یک شبه مولفه فضای X است اگر K اشتراک مجموعه‌های بسته- باز باشد و برای هر مجموعه بسته- باز U زیرمجموعه‌ی X اگر $K \cap U \neq \emptyset$ آنگاه $K \subset U$.*

شبه مولفات فضاهای تماما ناهمبند مجموعه‌های تک نقطه‌ای هستند. شبه مولفات فضای X، آن را بطور بسته افراز می‌کنند.

تعریف ۶.۳.۱. *فضای توپولوژیکی X* ***موروثا ناهمبند*** *نامیده می‌شود. اگر X شامل هیچ زیرفضای همبند با کاردینال بزرگتر از یک نباشد.*

هر فضای تماما ناهمبند، موروثا ناهمبند است. در حقیقت اگر X یک فضای تماما ناهمبند باشد آنگاه برای هر زیرفضای $M \subset X$ که شامل حداقل دو نقطه‌ی متمایز x, y است، مجموعه‌های $M \cap U$ و $M \setminus U$ که U یک زیرمجموعه بسته-باز در X است به طوری که $x \in U$ و $y \in X \setminus U$ فضای M را به دو زیرمجموعه‌ی باز مجزا ناتهی افراز می‌کنند بنابراین M ناهمبند است. فضاهای تماما ناهمبند، مولفه‌هایشان مجموعه‌های تک نقطه‌ای هستند.

تعریف ۷.۳.۱. *ماکسیمال زیرمجموعه همبند ناتهی فضای توپولوژیکی X،* ***مولفه*** *X نامیده می‌شود.*

مجموعه‌ی ناتهی $S \subset X$ یک مولفه است اگر S همبند باشد و برای هر مجموعه همبند $A \subset X$ به طوری که $S \subset A$ آنگاه $S = A$. مولفات فضای توپولوژیکی X، آن را به زیرمجموعه‌های بسته-باز دوبه دو مجزا افراز می‌کنند.

لم ۸.۳.۱. *در هر فضای فشرده مولفات و شبه مولفات بر هم منطبق هستند.*

اثبات. برای شروع ثابت می‌کنیم که در فضای توپولوژیک دلخواه X شبه مولفات کوچکتر از مولفات نیستند. S را یک مولفه در X در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم x یک نقطه در S و K شبه مولفه از X باشد به طوری که $x \in K$. نشان می‌دهیم $S \subset K$. اکنون $U \subset X$ را یک بسته-باز شامل x می‌گیریم. چون مجموعه‌های $S \cap U$ و $S \setminus U$ در S باز و مجزا هستند و $S \cap U \neq \emptyset$ بنابراین از همبندی S نتیجه می‌شود که $S \subset U$ می‌باشد. K را مجموعه‌ی اشتراک همه‌ی زیرمجموعه‌های بسته-باز از X که شامل x هستند در نظر می‌گیریم. داریم $S \subset K$.

برای کامل کردن اثبات کافی است نشان دهیم شبه مولفات در هر فضای فشرده، همبند هستند. افرازی از یک شبه مولفه‌ی K از فضای فشرده X به دو زیرمجموعه‌ی بسته‌ی مجزا A و B را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم. $A \neq \emptyset$. با توجه به نرمال بودن فضاهای فشرده مجموعه‌های باز V و W وجود دارند به طوری که

$A \subset V$ و $B \subset W$ و $V \cap W = \emptyset$. فرض می‌کنیم $\mathcal{U}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های بسته-باز X با خاصیت $\bigcap \mathcal{U} = K$ باشد. چون $\bigcap \mathcal{U} \subset V \cup W$ و خانواده‌ی $\mathcal{F} = \{U \setminus (V \cup W) : U \in \mathcal{U}\}$ از زیرمجموعه‌های بسته از X اشتراک تهی دارد. از فشردگی X نتیجه می‌شود یک زیرخانواده‌ی متناهی از $\mathcal{F}$ همچنین اشتراک تهی دارد. یعنی تعدادی متناهی از مجموعه‌های $U_۱, U_۲, \cdots, U_K$ عضو $\mathcal{U}$ وجود دارند به طوری که

$$U = U_۱ \cap U_۲ \cap \cdots \cap U_K \subset V \cup W$$

مجموعه‌ی U بسته-باز است. چون

$$\overline{V \cap U} \subset \overline{V} \cap U = \overline{V} \cap (V \cup W) \cap U = V \cap U$$

مجموعه $V \cap U$ همچنین بسته-باز است. از رابطه‌ی $\emptyset \neq A \subset V \cap U$ ثابت می‌شود که $K \subset V \cap U$ است همچنین $B \subset K \cap W \subset V \cap U \cap W = \emptyset$ و بنابراین ثابت می‌شود که شبه مولفه‌ی K همبند است.

□

تعریف ۹.۳.۱. *فضای توپولوژیکی X* ***ناپیوسته*** *نامیده می شود، اگر شامل هیچ زیرفضای همبند و فشرده ی ناتباهیده نباشد.*

قضیه ۱۰.۳.۱. *در فضاهای موضعا فشرده صفربعدی، تماما ناهمبندی، موروثا ناهمبندی و ناپیوستگی معادلند.*

اثبات. به [۱۱، قضیه‌ی ۱.۴.۵] مراجعه شود. □

۱-۴ فضای هیلبرت

حاصلضرب داخلی معمولی روی $\mathbb{R}^n$ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=۱}^{n} x_i y_i$$

اگر این ضرب داخلی را برای $\mathbb{R}^\infty$ تعمیم دهیم باید با سری‌های نامتناهی کار کنیم. زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^\infty$ را در نظر می‌گیریم.

$$\ell^۲ = \{x \in s : \sum_{i=۱}^{\infty} x_i^۲ < \infty\}$$

(s فضای برداری $\mathbb{R}^\infty$ با توپولوژی حاصلضربی تیخونوف است.)

ابتدا نشان می‌دهیم که $\ell^۲$ زیرفضای خطی از $\mathbb{R}^\infty$ است. برای هر $x \in \ell^۲$، در نظر می‌گیریم $p(x) = \sqrt{\sum\limits_{i=۱}^{\infty} x_i^۲}$. اگر $x, y \in \ell^۲$ آنگاه نامساوی شوارتز[۴] روی $\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهد که $|\sum\limits_{i=۱}^{n} x_i y_i| \leq p(x).p(y)$ و نتیجه می‌شود که

$$|\sum_{i=۱}^{\infty} x_i y_i| \leq p(x).p(y) < \infty$$

و بنابراین

$$\sum_{i=۱}^{\infty}(x_i + y_i)^۲ = \sum_{i=۱}^{\infty} x_i^۲ + \sum_{i=۱}^{\infty} y_i^۲ + \sum_{i=۱}^{\infty} ۲x_i y_i < \infty$$

چون همه‌ی سریهای نامتناهی مورد نظر همگرا هستند. نتیجه می‌گیریم که برای هر $x, y \in \ell^۲$ داریم $x+y \in \ell^۲$.
اگر $x \in \ell^۲$ و $t \in \mathbb{R}$ آنگاه به روشنی $tx \in \ell^۲$. در نتیجه $\ell^۲$ زیرفضای خطی از $\mathbb{R}^\infty$ است.

چون $\sum\limits_{i=۱}^{\infty} x_i y_i < \infty$ برای همه‌ی $x, y \in \ell^۲$ تابع خوش‌تعریف $\langle .,. \rangle : \ell^۲ \times \ell^۲ \to \mathbb{R}$ را داریم با $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{i=۱}^{\infty} x_i y_i$ در حالیکه حاصلضرب داخلی است. در نتیجه $\| x \| = p(x)$ یک نرم روی $\ell^۲$ تعریف می‌کند و متریک حاصل از این نرم

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=۱}^{\infty}(x_i - y_i)^۲}$$

است. $\ell^۲$ با توپولوژی حاصل از این متریک، به عنوان **فضای هیلبرت** در نظر گرفته می‌شود.

۱-۵ مجموعه‌ی کانتور C

از $\mathbb{I} = [۰, ۱]$ بازه‌ی $(\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$ یعنی یک سوم میانی بازه را حذف می‌کنیم و دوباره از بازه‌های بدست‌آمده یک سوم میانیشان را حذف می‌کنیم و این روش را ادامه می‌دهیم. در مرحله‌ی iام این ساختن داریم خانواده‌ی $\mathcal{F}_i$ از ۲^i زیربازه‌ی بسته مجزا از $\mathbb{I}$ که طول هر کدام ۳^{-i} است. اجتماع $\mathcal{F}_i$ را با H_i نشان می‌دهیم. H_i یک زیرمجموعه بسته از $\mathbb{I}$ است. و بنابراین فشرده می‌باشد. اشتراک H_i **مجموعه یک سوم میانی کانتور C** نامیده می‌شود.
به روشنی C در $\mathbb{I}$ بسته است و بنابراین فشرده است. همچنین بنا به گزاره‌ی ۲.۳.۱، مجموعه کانتور صفربعدی است.

---

[۴] Schwartz