دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده علوم

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی

عنوان

کاربرد روش اختلال هموتوپی برای مسائل مقدار اولیه کسری

اساتید راهنما

دکتر عظیم امین عطائی

دکتر محمد مسجد جامعی

نگارش

زینب چیستان آسیابری

مهر ۱۳۹۱

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ اساتید راهنمای خود، جناب آقای دکتر عظیم امین عطائی و آقای دکتر محمد مسجدجامعی صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

همچنین از پدر و مادر عزیزم که در طی سالیان متمادی تکیه‌گاه و پشتیبان من در طی دوره‌ی تحصیلی بنده بودند، بی‌نهایت سپاسگزارم.

چیستان

شهریور ۱۳۹۱

چکیده:

در این پایان‌نامه، ابتدا مفاهیم اولیه در ارتباط با معادلات دیفرانسیل کسری و برخی قضایای مربوط به این مبحث را بیان می‌کنیم. سپس با معرفی کامل روش‌های اختلال و بالاخص روش‌های اختلال هموتوپی و اختلال هموتوپی اصلاح شده و ارائه‌ی مثال‌هایی از مسائل غیرخطی و حل این مسائل با روش‌های اختلالی، کارایی این روش‌ها را در بدست آوردن جواب‌های تحلیلی مسائل غیرخطی نشان خواهیم داد. در نهایت با بهره‌گیری از روش‌های اختلال هموتوپی و اختلال هموتوپی اصلاح شده به حل معادلات دیفرانسیل کسری و دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری خواهیم پرداخت.

فهرست مطالب

فهرست مطالب ج

لیست تصاویر ح

لیست جداول خ

مقدمه د

۱ تعاریف و قضایای مقدماتی ۱

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ تاریخچه‌ی حسابان کسری ۱

۳.۱ معرفی برخی فضای‌های تابعی ۳

۴.۱ توابع گامای اویلر و بتا ۴

۵.۱ انتگرال کسری ۵

۶.۱ مشتقات کسری ۱۰

۷.۱ توابع میتاگ–لفلر ۱۵

۸.۱ معادلات دیفرانسیل کسری ۱۶

۲ روش اختلال هموتوپی و کاربردهای آن ۲۲

۱.۲ مقدمه ۲۲

۲.۲ روش اختلالی ۲۳
۳.۲ روش اختلال هموتوپی ۲۸
۴.۲ تشریح روش اختلال هموتوپی ۲۹
۵.۲ روش اختلال هموتوپی اصلاح شده ۳۲

۳ حل معادلات دیفرانسیل کسری به روش هموتوپی ۴۴
۱.۳ مقدمه ۴۴
۲.۳ بیان اصلی مسئله ۴۵
۳.۳ روش اختلال هموتوپی استاندارد ۴۶
۴.۳ روش اختلال هموتوپی اصلاح شده ۴۸
۵.۳ مثال‌های عددی ۵۰

۴ حل دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری به روش اختلال هموتوپی ۶۳
۱.۴ مقدمه ۶۳
۲.۴ بیان اصلی مسئله ۶۴
۳.۴ روش اختلال هموتوپی ۶۴
۴.۴ مثال‌های عددی ۶۶

نتیجه‌گیری ۷۶

الف لیست نمادها و اصطلاحات ۷۷

مراجع ۷۹

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۲

لیست تصاویر

۱.۳ نمودار $E_\alpha(-t^\alpha)$ برای ۱ $\alpha = \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴},$ ۵۳
۲.۳ نمودار $E_\alpha(-t^\alpha)$ برای ۲ $\alpha = \frac{۵}{۴}, \frac{۳}{۲}, \frac{۷}{۴},$ ۵۴
۳.۳ نمودار $E_\alpha(-t^\alpha)$ برای ۲ $\alpha = \frac{۵}{۴}, \frac{۳}{۲}, \frac{۷}{۴},$ ۵۴

۱.۴ جواب تقریبی با استفاده از هشت جمله ابتدایی ۶۸
۲.۴ نمودار $\phi_۴(t)$ و $\varphi_۴(t)$ ۷۱
۳.۴ جواب تقریبی با استفاده از هشت جمله ابتدایی ۷۳
۴.۴ نمودار چهار جمله ابتدایی سری‌های ۷۵

لیست جداول

۱.۳ تقریب جواب برای مقادیر مختلف α با استفاده از $\phi_{۱۰}$ ۶۰
۲.۳ تقریب جواب برای مقادیر مختلف α ۶۲

مقدمه

بعد از ظهور ابررایانه‌ها، مشکل پیدا کردن جواب مسائل خطی تقریباً حل شده است. با وجود این، هنوز حل مسائل غیرخطی، بالاخص یافتن جواب تحلیلی این نوع مسائل آسان نیست. هر چند تکنیک‌های حل تحلیلی مسائل غیرخطی پیشرفت چشم‌گیری داشته است، اما هنوز نتوانسته است به طور کامل رضایت ریاضی‌دانان را جلب نماید.

تکنیک‌های اختلالی از جمله روش‌های پرکاربرد برای بدست آوردن جواب‌های تحلیلی مسائل غیرخطی است که نتایج بدست آمده از این روش‌ها، بسیار جالب و از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند.

این پایان‌نامه که بر اساس مراجع [۲، ۳] تنظیم شده است، شامل چهار فصل است که در آن به کاربرد روش‌های اختلال هموتوپی جهت بدست آوردن جواب‌های تحلیلی معادلات و دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری پرداخته می‌شود.

در فصل اول، با ارائه‌ی مقدمه‌ای بر حسابان کسری به بیان تاریخچه‌ای کوتاه بر پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال پرداخته‌ایم. در ادامه با معرفی فضاهای تابعی مورد نیاز، تعاریف انتگرال و مشتقات کسری را ارائه و قضایای اساسی و مورد نیاز برای مباحث آتی را بیان کرده‌ایم. در نهایت این فصل را با معرفی توابع میتاگ–لفلر و بیان قضایای وجود و یکتایی معادلات دیفرانسیل کسری به پایان خواهیم رساند.

فصل دوم را با عنوان روش اختلال هموتوپی و کاربردهای آن نامگذاری کرده‌ایم.

مطالب این فصل را در پنج بخش مجزا بیان کرده‌ایم. به این ترتیب که با ارائه‌ی مقدمه‌ای کوتاه بر روش‌های اختلال، به معرفی روش‌های اختلال، روش اختلال هموتوپی و روش اختلال هموتوپی اصلاح شده، به تشریح هر یک از روش‌ها و بیان مزایا و معایب این روش‌ها پرداخته‌ایم. قابل ذکر است که کارایی تمامی روش‌های بیان شده را با ارائه‌ی مثال‌هایی نشان داده‌ایم.

در فصل سوم با ارائه‌ی مقدمه‌ای بر مسائل مقدار اولیه‌ی کسری از نوع کاپوتو و بیان تاریخچه‌ای بسیار کوتاه در ارتباط با روش‌های عددی و تحلیلی ارائه شده، به بیان اصلی مسئله پرداخته، سپس در بخش‌هایی مجزا به تشریح روش‌های اختلال هموتوپی و اختلال هموتوپی اصلاح شده روی مسائل مقدار اولیه‌ی کسری کاپوتو می‌پردازیم. این فصل را نیز با ارائه‌ی مثال‌هایی کاربردی به پایان خواهیم برد.

در فصل چهارم نیز دقیقاً مشابه فصل سوم عمل می‌کنیم. با این تفاوت که به جای حل معادلات دیفرانسیل کسری با مقدار اولیه به حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با مقادیر اولیه خواهیم پرداخت. شایان ذکر است که اکثر مسائل فیزیکی درگیر با معادلات دیفرانسیل کسری، به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی در حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری

۱.۱ مقدمه

هدف از این فصل مقدماتی، معرفی برخی فضاهای تابعی و بیان مقدماتی در حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری می‌باشد. در واقع به منظور تسهیل در امر ارجاع به قضایا و تعاریف مورد نیاز در بخش‌های آتی این پایان‌نامه، ما را بر آن داشت تا این فصل مقدماتی را به رشته تحریر درآوریم. اثبات یک نتیجه فقط در صورتی ارائه شده است که کاملاً ناآشنا باشد.

۲.۱ تاریخچه‌ی حسابان کسری

محاسبات کسری شاخه‌ای کهن با قدمتی بیش از سه قرن، از حساب دیفرانسیل و انتگرال است که ایده‌ی اولیه‌ی آن را منتسب به هوپیتال [۱] می‌دانند. در واقع، زمانی که لایب‌نیتز [۲] و

[۱] L'Höspital
[۲] Leibniz

نیوتن[۳] اصول حساب دیفرانسیل و انتگرال را گسترش دادند و لایب‌نیتز نماد

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x)$$

را برای اشاره به مشتق مرتبه‌ی n–ام تابع f بیان کرد، هوپیتال با طرح سوالی از روی کنجکاوی، مفهوم نماد $\frac{d^n}{dx^n}$ را در حالت $n=\frac{1}{2}$ جویا شد. لایب‌نیتز در پاسخ نوشت :

«این یک پارادوکس آشکار از چیزی است که یک روز نتایج مفیدی خواهد داد.»

بعد از این بحث بی‌سابقه، موضوع محاسبات کسری بطور مستقیم و غیرمستقیم، مورد توجه ریاضیدانان بزرگی مانند اویلر[۴]، لاپلاس[۵]، فوریه[۶]، لاکروا[۷]، آبل[۸]، ریمان[۹] و لیوویل[۱۰] گردید و در این مدت، توسیع‌های متفاوتی برای $\frac{d^n}{dx^n}$ در حالت $n \notin \mathbb{N}$، ارائه گردید که در بین آن‌ها تعاریف ریمان–لیوویل و کاپوتو مورد توجه بیشتری واقع شدند.

در سال‌های اخیر، پیدایش کاربردهای محاسبات کسری در زمینه‌های مختلف و مدل‌بندی پدیده‌های فیزیکی به صورت معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرالی کسری، پیش‌بینی لایب‌نیتز را به حقیقت بدل کرد. در ارتباط با کاربردهای محاسبات کسری می‌توانید منابع [۲۳، ۲۲، ۱۴] را مطالعه فرمایید. قبل از پرداختن به تعاریف و قضایای مربوط به مشتقات و انتگرال‌های کسری، در قالب بخشی کوتاه و مختصر به معرفی فضاهای تابعی و قضایای مقدماتی مورد نیاز آنها می‌پردازیم.

[۳] Newton
[۴] Euler
[۵] Laplace
[۶] Fourier
[۷] Lacroix
[۸] Abel
[۹] Riemann
[۱۰] Liouville

۳.۱ معرفی برخی فضاهای تابعی

در این بخش برخی فضاهای مهم تابعی مورد نیاز در بخش‌های آتی را معرفی کرده، خواص و ارتباط مابین این فضاها را بیان می‌کنیم.

نمادگذاری: در این بخش Ω مجموعه‌ای باز و ناتهی در $\mathbb{R}$ در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۱.۳.۱. فضای مجموعه‌ی توابع با مقادیر حقیقی که روی Ω پیوسته‌اند را با $C(\Omega)$ نشان می‌دهیم. از اینکه Ω باز است، پس توابع $C(\Omega)$ لزوماً کراندار نیستند. به همین ترتیب می‌توان فضاهای زیر را تعریف کرد:

$$C^m(\Omega) = \{f \in C(\Omega), \quad f^{(i)} \in C(\Omega), \quad i \leq m\},$$

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{f \in C(\overline{\Omega}), \quad f^{(i)} \in C(\overline{\Omega}), \quad i \leq m\},$$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega) = \{f \in C(\Omega), \quad f \in C^m(\Omega), \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+\},$$

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنیم $\mu \in \mathbb{R}$. تابع $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ را از کلاس C_μ گوییم، هرگاه عدد حقیقی $p > \mu$ چنان موجود باشد که $f(t) = t^p f_1(t)$، که در آن $f_1(t) \in C[0, \infty)$. به همین ترتیب، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، تعریف می‌کنیم

$$C_\mu^n := \{f : (0, \infty) \to \mathbb{R} : f^{(n)}(t) \in C_\mu\}.$$

مشاهده می‌کنیم به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، داریم

$$C_\nu^n \subset C_\mu^n, \qquad \mu < \nu.$$

تعریف ۳.۳.۱. گوییم تابع f از کلاس $\mathcal{O}_a(t^\epsilon)$ است، هرگاه

$$f(t) = O(t^\epsilon), \qquad t \to a, \tag{۱.۱}$$

به عبارتی $\delta > 0$ و $M > 0$ای موجود باشد که به ازای $t \in (a-\delta, a+\delta)$،

$$|f(t)| \leq M|t^{\epsilon}|.$$

تعریف ۴.۳.۱. گوییم f تابعی از کلاس ریمان در همسایگی نقطه‌ی $a \in \mathbb{R}$ است، هرگاه $\epsilon > -1$ای، موجود باشد که $f \in \mathcal{O}_a(t^{\epsilon})$. گردایه توابع متعلق به کلاس ریمان در همسایگی نقطه‌ی $a \in \mathbb{R}$ را با نماد $\mathcal{R}_a$ نشان خواهیم داد.

تذکر ۵.۳.۱. به وضوح به ازای هر $\mu \geq -1$، $C_{\mu} \subset \mathcal{R}_0$.

۴.۱ توابع گامای اویلر و بتا

در این بخش به معرفی توابع گاما و بتا که نقش مهمی در حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری ایفا می‌کنند، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۴.۱. به ازای هر $\alpha > 0$، تابع

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt,$$

را تابع گامای اویلر می‌نامیم.

تعریف ۲.۴.۱. به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$، تابع

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt,$$

را تابع بتا می‌نامیم.

تذکر ۳.۴.۱. به آسانی و با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توان نشان داد

- به ازای هر $\alpha > 0$،

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha),$$

و در نتیجه به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

که ارتباط مابین تابع گامای اویلر و فاکتوریل را نشان می‌دهد.

- به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$،

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

و در نتیجه

$$\int_y^x (t-y)^{\alpha-1}(x-t)^{\beta-1}\, dt = (x-y)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

که در واقع ارتباط تنگاتنگ توابع گاما و بتا را نشان می‌دهد.

۵.۱ انتگرال کسری

طبق فرمول مشهور منسوب به کشی، می‌دانیم انتگرال مکرر از مرتبه‌ی n–ام تابع $f(t)$ را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} J^n f(t) &= \int_0^t \int_0^{\tau_{n-1}} \cdots \int_0^{\tau_1} f(\tau)\, d\tau\, d\tau_1 \cdots\, d\tau_{n-1} \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau, \qquad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.1) \end{aligned}$$

نوشت. مشابه آنچه در تعمیم فاکتوریل از اعداد طبیعی به اعداد حقیقی از تابع گاما استفاده کردیم، شاید طبیعی‌ترین توسیع انتگرال از اندیس اعداد طبیعی به اندیس مقادیر حقیقی، می‌تواند به صورت زیر باشد.

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنید $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ تابعی دلخواه و $\alpha\geq 0$ باشد. عملگر J^α تعریف شده به صورت

$$J^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\,d\tau, \quad (\alpha>0), \tag{۳.۱}$$

$$J^0 f(t) = f(t), \tag{۴.۱}$$

را در صورت وجود، انتگرال کسری ریمان–لیوویل تابع f از مرتبه α می‌نامیم.

تذکر ۲.۵.۱. یک شرط لازم برای همگرایی انتگرال (۳.۱)، این است که f تابعی از کلاس ریمان $\mathcal{R}_0$ باشد و در نتیجه با توجه به تذکر ۵.۳.۱، انتگرال کسری مرتبه‌ی $\alpha>0$، توابع از کلاس C_{-1} وجود دارد.

لم ۳.۵.۱. فرض کنید $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ تابعی از کلاس C_μ و $\alpha>0$. آنگاه $J^\alpha f$ متعلق به کلاس $C_{\mu+\alpha}$ است.

برهان. بنابه فرض و با توجه به تعریف کلاس C_μ، $\epsilon>0$ای موجود است که

$$f(t) = t^{\mu+\epsilon} f_1(t), \quad f_1\in C[0,\infty),$$

از طرفی بنابه تعریف داریم

$$\begin{aligned} J^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\,d\tau && (۵.۱)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\mu+\epsilon} f_1(\tau)\,d\tau, && (۶.۱)\end{aligned}$$

حال با توجه به پیوستگی $f_1(\tau)$ روی بازه $[0,t]$ و انتگرال‌پذیری $(t-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\mu+\epsilon}$ و با بهره‌گیری از قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال‌ها و با توجه به تذکر ۵.۳.۱، داریم

$$\begin{aligned} J^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}f_1(\zeta)\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\,\tau^{\mu+\epsilon}d\tau && (۷.۱)\\ &= Cf_1(\zeta)t^{\alpha+\mu+\epsilon}, && (۸.۱)\end{aligned}$$

که در آن $C=\frac{\Gamma(\mu+\epsilon+1)}{\Gamma(\mu+\epsilon+\alpha+1)}$ و $\zeta\in[0,t]$ مقدار میانگین تابع پیوسته f_1 روی بازه‌ی $[0,t]$ است. $\square$

تذکر ۴.۵.۱. اگر انتگرال (۳.۱) را به صورت انتگرال ریمان اشتیلیس

$$J^{\alpha}f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t f(\tau)\,dg(\tau), \quad (\alpha>0), \tag{۹.۱}$$

بنویسیم که

$$g(\tau) = -(t-\tau)^{\alpha}, \tag{۱۰.۱}$$

تابعی (پیوسته) صعودی روی بازه‌ی $[0,t]$ است، آنگاه اگر f تابعی پیوسته روی $[0,t]$ باشد، قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال‌ها نتیجه می‌دهد که $x\in[0,t]$ای چنان موجود است که

$$\int_0^t f(\tau)\,dg(\tau) = f(x)\,t^{\alpha},$$

و در نتیجه

$$\lim_{t\to 0} J^{\alpha}f(t) = 0. \tag{۱۱.۱}$$

مثال ۵.۵.۱. تابع $f(t) = t^\gamma$ که $\gamma > -1$ روی $\mathbb{R}_+$ را در نظر بگیرید. بنابر تعریف انتگرال کسری و با بهره‌گیری از تذکر ۳.۴.۱، داریم

$$\begin{aligned} J^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^\gamma d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+\alpha)} t^{\gamma+\alpha}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$J^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+\alpha)} t^{\gamma+\alpha} \qquad \alpha > 0, \quad \gamma > -1, \quad t > 0. \tag{۱۲.۱}$$

به ویژه اگر $\gamma = 0$ باشد، آنگاه انتگرال کسری از مرتبه‌ی α–ام تابع ثابت $f(t) = C$ چنین است

$$J^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha, \qquad \alpha > 0. \tag{۱۳.۱}$$

تذکر ۶.۵.۱. اگر f تابعی از کلاس C_{-1} باشد، اما پیوسته نباشد، آنگاه رابطه‌ی (۱۱.۱) لزوماً برقرار نیست. در واقع با توجه به مثال ۵.۵.۱، مشاهده می‌کنیم که

$$\lim_{t\to 0} J^\alpha t^\gamma = \begin{cases} 0, & \alpha+\gamma > 0, \\ \Gamma(\gamma+1), & \alpha+\gamma = 0, \\ \infty, & \alpha+\gamma < 0. \end{cases}$$

به همین ترتیب و با بهره‌گیری دوباره از مثال ۵.۵.۱، در حالتی که $\alpha > 0$ و $\alpha+\gamma < 1$ باشد، نتیجه می‌گیریم برخلاف قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، پیوستگی f روی $[0,t]$ نمی‌تواند مشتق‌پذیری $J^\alpha f(t)$ را در $t = 0$ تضمین نماید.

قضیه ۱.۵.۷. فرض کنید $f \in C_{-۱}$ و $\alpha, \beta > ۰$ باشد. آنگاه

$$J^{\alpha}[J^{\beta} f(t)] = J^{(\alpha+\beta)} f(t) = J^{\beta}[J^{\alpha} f(t)]. \tag{۱.۱۴}$$

برهان. با توجه به تعریف داریم

$$J^{\alpha}[J^{\beta} f(t)] = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{۰}^{t} (t-\zeta)^{\alpha-۱} \left(\int_{۰}^{\zeta} (\zeta-\tau)^{\beta-۱} \, f(\tau) \, d\tau \right) \, d\zeta. \tag{۱.۱۵}$$

با توجه به لم ۱.۵.۳ و تذکر ۱.۵.۲ مشاهده می‌کنیم که انتگرال (۱.۱۵) موجود است. حال با استفاده از قضیه‌ی فوبینی و با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری، داریم

$$\begin{aligned} J^{\alpha}[J^{\beta} f(t)] &= \frac{۱}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{۰}^{t} \int_{\tau}^{t} (t-\zeta)^{\alpha-۱}(\zeta-\tau)^{\beta-۱} \, f(\tau) \, d\zeta d\tau \\ &= \frac{۱}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{۰}^{t} f(\tau) \underbrace{\int_{\tau}^{t} (t-\zeta)^{\alpha-۱}(\zeta-\tau)^{\beta-۱} \, d\zeta}_{K(t,\tau)} \, d\tau. \end{aligned}$$

حال با استفاده از تذکر ۱.۴.۳ داریم

$$K(t,\tau) = (t-\tau)^{\alpha+\beta-۱} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} J^{\alpha}[J^{\beta} f(t)] &= \frac{۱}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{۰}^{t} (t-\tau)^{\alpha+\beta-۱} \, f(\tau) \, d\tau \\ &= J^{(\alpha+\beta)} f(t). \end{aligned}$$

و این حکم را ثابت می‌کند. □