دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه
جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی

ممانعت در گراف‌های شامل جورسازی

استاد راهنما
دکتر علیرضا غفاری حدیقه

استاد مشاور
دکتر بهروز خیرفام

پژوهشگر
سولماز احمدی

تیرماه ۱۳۹۱
تبریز- ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

پدر و مادر مهربانم، شمع های فروزانی که شعله آنها چراغ راهم بود

پروردگارا...

هیچ کس به پایان و نهایت شکرگزاری تو نمی‌رسد، مگر این که احساس و نیکی تو شکری دیگر را بر او واجب نماید و هر چقدر در طاعت و فرمانبرداری تو کوشش کند، باز به خاطر فضل و احسان بی‌انتهای تو عاجز و ناتوان است .

خدایا، همیشه در لحظات سخت زندگیم با خود می‌گویم: شاید این همان آزمایشی باشد که تو در پشت این پرده‌ی تاریک می‌خواهی تصویر زیبایی از زندگی برایم بسازی، پس ای خدا مرا به اندازه‌ی توانم بیازما و صبوری بیاموز.

به من کمک کن تا قبول کنم، دانسته‌هایم در مقابل دانش لایتناهی تو ندانستنی بیش نیست و بدانم که دانایی تو بیشتر از آنی که من می‌دانم و آن همه را حتی به اندازه‌ی یک قطره جز به یاری تو، دانستن نمی‌توانم.

وقتی جز خدا هیچ ندارم... همه چیز دارم و
وقتی جز خدا همه چیز دارم... هیچ ندارم.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندی را که به من آموخت در لحظه‌های شادی شکرگزار باشم و فراموش نکنم، تمام داشته‌ها و دانسته‌هایم از لطف بی‌منت اوست و آموخت که در لحظه‌های اندوهم صبور باشم که همه‌ی غم‌ها رفتنی است و سربلند کسی است که مطیع تقدیر و حکمت الهی باشد.

اینک به پاس لطف الهی که پایان‌نامه‌ی حاضر، آماده شده است برخود واجب می‌دانم از حمایت‌های بی‌دریغ، بذل توجه و مساعدت‌های استاد راهنمایم جناب آقای دکتر **علیرضا غفاری حدیقه** سپاس‌گزاری نمایم.

از جناب آقای دکتر **بهروز خیرفام**، که مشاوره و مطالعه این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم و از آقای دکتر **سید محمود شیخ الاسلامی** نیز سپاسگزارم که قبول زحمت فرموده و داوری این پایان‌نامه را برعهده گرفتند.

و بوسه می‌زنم بر دستان مادر و پدر عزیزم که توانستم زیر سایه مهربانی و صبوری‌هایشان در راه کسب علم و دانش قدم بردارم. همچنین تشکر می‌کنم از برادران و خواهران عزیزم، به پاس کمک‌های بی‌دریغ و دلگرمی‌های بی‌پایان‌شان، که بهترین پشتیبان من بودند.

سولماز احمدی

شهریورماه ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه دو مساله‌ی شامل جورسازی‌ها را که یکی از آن‌ها به حذف یال‌ها و دیگری به حذف راس‌ها منجر می‌شود، معرفی می‌کنیم.

گراف بدون جهت $G=(V,E)$ را که وزن‌های روی یال‌های آن مثبت است، در نظر بگیرید. در مساله‌ی ممانعت یالی از جورسازی، هر یال گراف G دارای هزینه است و هدف این مساله، حذف زیرمجموعه‌ای از یال‌ها با در نظر گرفتن بودجه‌ی محدود است به طوری که بیشترین جورسازی در گراف حاصل، کمینه شود. مساله‌ی ممانعت راسی از جورسازی نیز همانند مساله‌ی ممانعت یالی از جورسازی است با این تفاوت که در آن زیرمجموعه‌ای از راس‌ها به جای یال‌ها حذف می‌شود. نتایج سختی هر دو مساله تحت محدودیت‌های مختلف روی وزن‌ها و هزینه‌های ممانعت و همچنین انواع مختلفی از گراف‌ها بیان شده است. به علاوه تقریب‌پذیری مساله‌ی ممانعت یالی و راسی از جورسازی روی گراف‌های مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است.

یک الگوریتم شبه چندجمله‌ای برای حل مساله‌ی ممانعت یالی از جورسازی روی گراف‌هایی با عرض درختی کران‌دار که به راحتی قابل تبدیل به یک مساله‌ی ممانعت راسی از جورسازی است، ارائه شده است. این الگوریتم، یک چارچوب کلی را برای حل دسته‌ی وسیعی از مسائل $\min-\max$، با به کارگیری برنامه‌ریزی پویا روی گراف‌هایی با عرض درختی کراندار بیان می‌کند. به علاوه در مسائل ممانعت یالی از جورسازی، روشی را برای تبدیل الگوریتم‌های شبه‌چندجمله‌ای به طرح تقریبی تمام چندجمله‌ای با استفاده از روش مقیاس‌گذاری و گردکردن بیان می‌کنیم.

کلمات کلیدی: بیشترین جورسازی، ممانعت، پیچیدگی، الگوریتم تقریبی، عرض درختی کراندار.

پیشگفتار

مطالعه‌ی مساله ممانعت از جریان در شبکه از جنگ جهانی دوم شروع شد. زمانی که تحلیلگران در شرکت راند چگونگی مقابله با ترافیک راه‌آهن اتحاد جماهیر شوروی به شرق اروپا با کمترین بودجه را مورد بررسی قرار دادند.

در واقع مطالعه روی مسائل ممانعت از جریان در شبکه، در سال ۱۹۶۶ توسط ولمر [۱] [۲۹] شروع شد که حذف یال‌ها از شبکه را با هدف بیشینه کردن کاهش جریان بین یک مبدا و مقصد، بررسی کرد. مک‌مسترز و ماستین [۲] [۲۶] در سال ۱۹۷۰ الگوریتمی را برای تعیین یک برنامه‌ی ممانعت بهینه به منظور کمینه کردن ظرفیت جریان در شبکه، در حالتی که هزینه‌ی ممانعت با میزان کاهش ظرفیت رابطه‌ی خطی دارد، ارائه کردند. لوبر [۳] [۲۵] در سال ۱۹۷۱ چگونگی یافتن مجموعه‌ای از یال‌ها را که حذف هم‌زمان این یال‌ها از شبکه‌ای تک‌کالایی بیشترین کاهش را در ظرفیت شبکه‌ی باقیمانده ایجاد می‌کند، بررسی کرد.

علاقه به مساله‌ی ممانعت در شبکه به خاطر تلاش‌های سازمان مبارزه با مواد مخدر در آمریکا در سال ۱۹۹۳ دوباره رواج یافت. وود [۴] [۳۰] اولین کسی بود که در سال ۱۹۹۳ روش‌های ریاضی را برای این مساله اتخاذ کرد. او یک قالب $\min - \max$ را برای مساله‌ی ممانعت از جریان بیشینه در شبکه، ایجاد کرد و سپس آن را به یک قالب برنامه‌ریزی عددصحیح تبدیل کرد. تمام مطالعات پیشین به جز وود (۱۹۹۳) به کاربردها محدود هستند و تعمیم‌های بیشتر را شامل نمی‌شوند. در سال ۱۹۹۸ کرمیکن [۵] [۱۰] نوع تصادفی مساله‌ی

[۱] Wollmer
[۲] McMasters and Mustin
[۳] Lubore
[۴] Wood
[۵] Cormican

ممانعت از جریان بیشینه در شبکه را مورد مطالعه قرار داد.
دسته‌ی دیگری از مسائل ممانعت از جریان در شبکه، بیشینه کردن کوتاه‌ترین مسیر است که در آن مجموعه‌ای از یال‌ها به منظور بیشینه کردن طول کوتاه‌ترین مسیر بین s و t در شبکه‌ی مورد نظر از کار انداخته می‌شوند [۱۷].

در این پایان‌نامه به حل مساله‌ی ممانعت از بیشترین جورسازی در گراف می‌پردازیم. در فصل اول، تعاریف و مفاهیم اولیه بیان شده است. در فصل دوم، پیچیدگی مساله را بررسی می‌نماییم و در فصل سوم، به معرفی تقریب‌هایی برای به دست آوردن بیشترین جورسازی در گراف ممانعت شده، یعنی گرافی که مجموعه‌ی یال‌های بهینه‌ی R از مجموعه‌ی یال‌های گراف حذف شده است، می‌پردازیم. در فصل چهارم، تجزیه‌ی درختی گراف و درخت مطلوب آن معرفی می‌شود و با استفاد از برنامه‌ریزی پویا، الگوریتمی شبه‌چندجمله‌ای برای محاسبه‌ی وزن گره‌ها و هزینه‌های مربوط به آن‌ها، در درخت مطلوب معرفی می‌شود که با استفاده از آن، وزن بیشترین جورسازی در گراف ممانعت شده محاسبه می‌شود. در پایان نیز یک الگوریتم تمام چندجمله‌ای برای محاسبه‌ی بیشترین جورسازی در گراف ممانعت شده معرفی می‌شود.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱
تعاریف مقدماتی

۱.۱ شبکه

شبکه‌ی $G = (V, E)$، گرافی با مجموعه راس‌های V و مجموعه‌ی یال‌های E است که در آن راس‌ها با یال‌هایی که جریان و ظرفیت دارند به هم متصل می‌شوند.

یال‌های یک شبکه ممکن است جهت‌دار و یا بدون جهت باشند. در یک گراف جهت‌دار، یال متصل کننده‌ی راس i به j که با (i, j) نشان داده می‌شود با یال متصل کننده‌ی راس j به i که به صورت (j, i) نمایش داده می‌شود متفاوت است.

طوقه یالی است که یک راس را به خودش متصل می‌کند. **گراف ساده**، گراف بدون جهتی است که طوقه نداشته باشد و بین هر دو راس متفاوت، حداکثر یک یال وجود داشته باشد. **گراف دوبخشی**، گرافی است که مجموعه‌ی راس‌های آن را بتوان به دو زیر مجموعه‌ی X و Y افراز کرد به طوری که هر یال یک انتها در X و یک انتها در Y دارد. گراف دوبخشی را با $G = (X, Y, E)$ نشان می‌دهیم که در آن E مجموعه‌ی یال‌های گراف است. یک **گراف دوبخشی** است اگر و فقط اگر شامل دور فرد نباشد. **تعداد** راس‌های گراف G را **مرتبه‌ی گراف** G می‌نامند. گراف همبند بدون دور را **درخت** می‌گویند. یک **زیردرخت** از یک گراف، زیرگرافی است که خود یک درخت است. یک درخت را **درخت ریشه‌دار** نامند هرگاه در آن راسی به عنوان ریشه وجود دارد که یال‌ها یک جهت طبیعی به سمت ریشه یا به خارج از ریشه دارند. در درخت ریشه‌دار، راسی که بلافاصله زیر یک راس قرار می‌گیرد، فرزند آن راس محسوب می‌شود. یک راس والد راس دیگر است، اگر بلافاصله بالاتر از آن و نزدیک‌تر به ریشه قرار داشته باشد.

درخت دودویی، درختی است که هر راس آن حداکثر دو فرزند دارد. راس بدون فرزند را **برگ** است.

۲.۱ جورسازی

گراف $G=(V,E)$ داده شده باشد. یک **جورسازی** M در G مجموعه‌ای از یال‌ها است که هیچ دو یالی راس مشترک ندارند. **بیشترین جورسازی** در گراف G، جورسازی است که بیشترین تعداد یال‌های ممکن را دارد. عدد بیشترین جورسازی را با $\nu(G)$ نشان می‌دهیم.

راس v به وسیله‌ی جورسازی M **اشباع** می‌شود هرگاه یالی از M از v بگذرد. هرگاه تمام راس‌های گراف G به وسیله‌ی جورسازی M اشباع شده باشد، جورسازی M کامل است.

زیرمجموعه‌ی C از V را به طوری که $e \nsubseteq C$ به ازای هر یال در به گراف G، **مجموعه‌ی مستقل** می‌گویند. **مجموعه‌ی مستقل بیشینه** بزرگترین مجموعه‌ی مستقل در گراف است.

مساله‌ی پیدا کردن مجموعه‌ی مستقل بیشینه را **مساله‌ی مجموعه‌ی مستقل** می‌گویند. در مساله‌ی مجموعه‌ی مستقل، یک گراف بدون جهت و عدد k در نظر گرفته می‌شود. این مساله به بررسی این که آیا گراف داده شده، شامل مجموعه‌ی مستقل از اندازه‌ی k است، می‌پردازد.

یک **پوشش راسی**، زیر مجموعه‌ی W از V است به طوری که به ازای هر یال e از گراف G، $e \cap W \neq \phi$.

قضیه ۱.۱ (جورسازی کنیگ [۱]) *در هر گراف دوبخشی $G=(V,E)$، داریم*
$\nu(G)=\tau(G)$ که در آن $\nu(G)=\max\{|M| \mid M$ یک جورسازی است$\}$ و
$\tau(G)=\min\{|W| \mid W$ یک پوشش راسی است$\}$.

برهان : رجوع شود به قضیه‌ی ۲.۱۶ مرجع [۲۷]. □

جورسازی وزن‌دار. گراف $G=(V,E)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $w: E\to \mathbb{R}$ یک تابع وزن روی یال‌ها است. برای هر جورسازی M از E، وزن M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$w(M)=\sum_{e\in M} w(e).$$

در این پایان‌نامه از واژه‌ی بیشترین جورسازی به جای جورسازی با بیشترین وزن استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم که B بودجه‌ی در نظر گرفته شده برای تخریب یال‌ها و راس‌ها باشد، که در آن c^V هزینه‌ی تخریب راس‌ها و c^E هزینه‌ی تخریب یال‌ها است.

[۱] Konig's matching

هدف اصلی در **مساله‌ی ممانعت یالی از جورسازی در شبکه‌های شامل جورسازی**، حذف مجموعه‌ای از یال‌ها با در نظر گرفتن بودجه‌ی محدود است به طوری‌که وزن بیشترین جورسازی در گراف نهایی، کمینه شود.

در واقع در مساله ممانعت یالی از جورسازی، هدف پیدا کردن زیرمجموعه‌ای از یال‌ها مانند R است به‌طوری‌که $c^E(R) = \sum_{e \in R} c^E(e) \leq B$ و وزن بیشترین جورسازی در گراف G بدون مجموعه R کمینه شود.

مساله‌ی ممانعت راسی از جورسازی در شبکه‌های شامل جورسازی نیز همانند مساله‌ی ممانعت یالی از جورسازی است با این تفاوت که در آن مجموعه‌ای از راس‌ها به جای یال‌ها حذف می‌شود.

در واقع در مساله ممانعت راسی از جورسازی، هدف پیدا کردن زیرمجموعه‌ای از راس‌ها مانند R است به‌طوری‌که $c^V(R) = \sum_{v \in R} c^V(v) \leq B$ و وزن بیشترین جورسازی در گراف G بدون راس‌های مجموعه‌ی R کمینه شود.

۳.۱ الگوریتم‌های دقیق و تقریبی

الگوریتم‌های دقیق قادر به یافتن جواب دقیق بهینه یک مساله هستند، اما در مورد مسائل بهینه‌سازی سخت کارایی ندارند و زمان حل آن‌ها در این مسائل، به صورت نمایی افزایش می‌یابد. **الگوریتم‌های تقریبی** قادر به یافتن جواب‌های خوب (نزدیک به بهینه)، در زمان حل کوتاه، برای مسائل بهینه‌سازی سخت هستند.

لازم است دو شرط زیر، برای الگوریتم‌های تقریبی، برقرار باشد.

۱. مساله همیشه شدنی باشد و بتوان یک جواب شدنی را برای مساله در زمان چندجمله‌ای ساخت.

۲. سود یا هزینه‌ی جواب بهینه، همیشه مثبت است.

الگوریتم‌های تقریبی به دو دسته تقسیم می‌شوند که یکی از آن‌ها الگوریتم‌های ابتکاری است.

الگوریتم‌های ابتکاری، راه‌حل‌هایی بهینه، اغلب بدون اثبات و بدون کران برای جواب خود هستند.

فرض کنید $۰ \leq \rho < ۱$. یک مساله‌ی بیشینه‌سازی را که در فرض‌های گفته شده برای الگوریتم‌های تقریبی، صدق می‌کند، در نظر بگیرید. یک **الگوریتم** ρ**−تقریبی**، یک الگوریتم ابتکاری است که زمان اجرای آن یک چندجمله‌ای است و همیشه یک جواب شدنی را که سود آن، حداقل ρ برابر سود بهینه است،

به دست می‌دهد.

حال فرض کنید $\rho > 1$. یک مساله‌ی کمینه‌سازی را که در فرض‌های گفته شده برای الگوریتم‌های تقریبی، صدق کند، در نظر بگیرید. یک **الگوریتم** $\rho-$**تقریبی**، یک الگوریتم ابتکاری است که زمان اجرای آن یک چندجمله‌ای است و همیشه یک جواب شدنی را که هزینه‌ی آن، حداکثر ρ برابر هزینه‌ی بهینه است، به دست می‌دهد.

۴.۱ برنامه‌ریزی خطی عددصحیح

برنامه‌ریزی خطی روشی برای به دست آوردن مقدار بهینه‌ی تابع هدف خطی، نسبت به قیدهای خطی است. برنامه‌ریزی عددصحیح، یک واژه‌ی عام برای قالب‌های برنامه‌ریزی ریاضی با شرط عدد صحیح بودن مقادیر متغیرهاست. قالب‌های خطی برنامه‌ریزی عددصحیح به صورت زیر طبقه‌بندی می‌شوند:

برنامه‌ریزی خطی عددصحیح محض، قالبی است که تمامی متغیرهای آن عدد صحیح و قیدها و تابع هدف، خطی هستند. این قالب با صرف‌نظر کردن از محدودیت عدد صحیح بودن متغیرها، به یک قالب برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌گردد.

برنامه‌ریزی عددصحیح آمیخته، قالبی است که تنها تعدادی از متغیرهای آن عدد صحیح باشند.

در بعضی از قالب‌ها، متغیرهای عدد صحیح، محدود به انتخاب مقادیر صفر یا یک هستند. این قالب‌ها، قالب‌های صفر-یک نام دارند.

در این پایان‌نامه تنها از مدل برنامه‌ریزی خطی صفر-یک استفاده می‌شود.

۵.۱ چند مساله‌ی خاص

۱.۵.۱ مساله‌ی خوشه

در گراف بدون جهت $G = (V, E)$، زیرمجموعه‌ی C از V را یک **خوشه** گویند، هرگاه هر دو راس متمایز از C، مجاور باشند.

مساله ۱.۱ (خوشه) *به هر مسالهای که به یافتن یک زیرگراف کامل در یک گراف منجر شود، مسالهی خوشه گفته میشود. مسالهی خوشهی بیشینه، به دنبال خوشهای با بیشترین تعداد رأس است. نوع دیگری از مسالهی خوشه، یافتن خوشه با بیشترین وزن است.*

۲.۵.۱ مسالهی کولهپشتی

مساله ۱.۲ (کولهپشتی) *یکی از مسائل معروف برنامهریزی خطی عدد صحیح است. این مساله در ارتباط با حمل کالا یا بار توسط اتومبیل، کشتی یا افراد است. اقلام مورد حمل در این گونه مسائل، غیرقابلتقسیم، متفاوت و با وزن و ارزشی متفاوت هستند. در صورتی که هدف حمل n نوع کالا با وزنهای $a_1, \cdots, a_n$ و ارزش $c_1, \cdots, c_n$ با وسیلهای به ظرفیت C باشد، مدل زیر انتخاب ترکیب مناسبی از محمولهها را با استفاده از ظرفیت وسیلهی نقلیه نشان میدهد.*

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t.\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq C$$

$$x_j = 0 \text{ و } 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

فصل ۲
پیچیدگی محاسباتی

در این فصل به بیان نتایج مختلفی از پیچیدگی محاسباتی برای مساله‌ی ممانعت راسی از جورسازی و مساله‌ی ممانعت یالی از جورسازی می‌پردازیم. در طول این بخش، هر زمانی که درباره‌ی پیچیدگی‌های این مسائل صحبت می‌کنیم، فرض می‌کنیم شرایط زیر برقرار باشد.

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف بدون جهت است که تابع وزن $w : E \to N$ روی یال‌های آن تعریف شده است و $B \in Z_+$ بودجه ثابت در نظر گرفته شده برای ممانعت است و $K \in Z_+$.

همچنین در مساله‌ی ممانعت یالی از جورسازی، $c^E : E \to N$ را هزینه‌ی ممانعت روی یال‌ها در نظر می‌گیریم و هدف تصمیم‌گیری در مورد این است که آیا $\nu_B^E(G) \leq K$. برای مساله‌ی ممانعت راسی از جورسازی نیز، $c^V : V \to N$ به عنوان هزینه‌ی ممانعت روی راس‌ها در نظر گرفته شده است و هدف تصمیم‌گیری درباره‌ی این است که آیا $\nu_B^V(G) \leq K$.

۱.۲ آشنایی با نظریه‌ی پیچیدگی

تعداد عملیات مقدماتی لازم برای اجرای یک الگوریتم را پیچیدگی گویند.

زمان اجرای یک الگوریتم، **خطی** است، هرگاه پیچیدگی زمانی آن، $O(n)$ باشد. به عبارت دیگر برای یک ورودی به اندازه‌ی کافی بزرگ، زمان اجرای الگوریتم، نسبت به اندازه‌ی ورودی، به صورت خطی افزایش می‌یابد. یک الگوریتم **زمان‌چندجمله‌ای**، الگوریتمی است که زمان اجرای آن کراندار به یک چندجمله‌ای است. نماد $O(n^k)$ در یک الگوریتم، نشان می‌دهد که زمان اجرای آن الگوریتم، به یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر k، کراندار است. یک مساله به **کلاس پیچیدگی** P تعلق دارد اگر تعداد گام‌های مورد نیاز

برای محاسبه‌ی جواب آن مساله به یک چندجمله‌ای کراندار باشد. مجموعه‌ای از مسائل تصمیم‌گیری که یافتن جواب بله برای آن‌ها در زمان چندجمله‌ای صورت می‌گیرد در **کلاس** NP قرار دارند.
کلاس پیچیدگی $NP-$**کامل**، پیچیده‌ترین مسائل NP هستند که برای حل مسائل موجود در این کلاس هیچ الگوریتم شناخته شده قابل اجرا در زمان چندجمله‌ای وجود ندارد. در واقع مساله‌ای که هم در کلاس پیچیدگی NP و هم $NP-$سخت قرار داشته باشد، $NP-$کامل است.

به عنوان مثال مساله‌ی کوله‌پشتی و مساله‌ی خوشه جزء مسائل $NP-$کامل هستند [۱۴].
کلاس پیچیدگی $NP-$**سخت**، شامل چندهزار مسالهٔ مختلف با کاربردهای فراوان است که تاکنون برای آن‌ها راه حل سریع و قابل اجرا در زمان معقول پیدا نشده است و به احتمال زیاد در آینده نیز یافت نخواهد شد. عدم وجود راه حل سریع برای آن‌ها وجود هم اثبات شده‌است. البته ثابت شده است که اگر فقط برای یکی از این مساله‌ها راه حل سریعی پیدا شود، این راه حل موجب حل سریع بقیه‌ی مساله‌ها خواهد شد. البته احتمال پیدا شدن چنین الگوریتمی ضعیف است. منظور از راه حل سریع آن است که زمان اجرای آن با اندازه‌ی ورودی مساله به صورت چندجمله‌ای رابطه داشته باشد.

کلاس پیچیدگی شبه‌چندجمله‌ای. پیچیدگی یک الگوریتم از نوع شبه‌چندجمله‌ای است هرگاه زمان اجرای آن، یک چندجمله‌ای بر حسب مقدار عدد ورودی باشد.

۲.۲ پیچیدگی مساله‌ی ممانعت از جورسازی

قضیه‌ی بعدی به بررسی پیچیدگی مساله ممانعت یالی و راسی از جورسازی روی گراف‌هایی که فقط یال تنها دارند می‌پردازد، زیرا این گراف‌ها در واقع جورسازی‌های گراف داده شده‌ی G هستند.
درجه‌ی یک راس گراف G تعداد یال‌هایی است که از آن راس می‌گذرند. یال e را در گراف G، **یال تنها** گویند هرگاه درجه‌ی هر راس یال e، یک باشد.

قضیه ۲.۱ *مساله ممانعت یالی از جورسازی و مساله‌ی ممانعت راسی از جورسازی روی گراف‌هایی که فقط شامل یال‌های تنها هستند، $NP-$کامل هستند.*

برهان : هر دو مساله به طور واضح در NP قرار دارند. این قضیه با تبدیل مساله‌ی ممانعت به مساله‌ی کوله‌پشتی که یک مساله‌ی $NP-$کامل است [۱۴]، حاصل می‌شود. ابتدا مساله‌ی ممانعت یالی از

جورسازی را در نظر می‌گیریم و سپس این مساله را با یک مساله ممانعت راسی از جورسازی مطابقت می‌دهیم. یک مساله‌ی کوله‌پشتی را با یک مجموعه‌ی متناهی از عنصرهای I و اعداد صحیح نامنفی B و Z و برای هر $i \in I$ یک اندازه‌ی $s(i) \in \mathbb{N}$ و مقدار $v(i) \in \mathbb{N}$ در نظر بگیرید.

هدف در مساله‌ی کوله‌پشتی یافتن $I' \subseteq I$ است که $\sum_{i\in I'} s(i) \leq B$ و $\sum_{i\in I'} v(i) \geq Z$.

فرض کنید گراف بدون جهت $G = (V, E)$، شامل $|I|$ تا از یال‌های تنهای $E = \{e_i \mid i \in I\}$ است. برای هر عنصر $e_i \in E$، می‌گوییم که عنصر i با e_i متناظر است. وزن‌های یالی w روی مجموعه‌ی E متناظر با ارزش عنصرهای کوله‌پشتی است، یعنی به ازای هر $i \in I$، $w(e_i) = v(i)$ و هزینه‌های یالی C^E برابر با اندازه‌ی عنصرهای کوله‌پشتی متناظر هستند، یعنی به ازای هر $i \in I$، $c^E(e_i) = s(i)$. به علاوه فرض کنید $K = \sum_{i\in I} v - Z$. چون هر زیرمجموعه‌ی E، یک جورسازی در G است، مجموعه‌ی ممانعت $R \subseteq E$ که در $C^E(R) \leq B$ و $v(G - R) \leq K$ صدق کند، متناظر با یک مجموعه‌ی عنصرهای کوله‌پشتی، یعنی $I' \subseteq I$ است به طوری که $\sum_{i\in I'} s(i) \leq B$ و $\sum_{i\in I'} w(e_i) \geq Z$ ؛ که این دقیقاً مساله‌ی کوله‌پشتی است.

برای تبدیل مساله‌ی کوله‌پشتی به مساله ممانعت راسی از جورسازی، دوباره از گراف G با وزن‌های یالی متناظر که به صورت بالا تعریف شد، استفاده می‌کنیم. به علاوه به ازای هر راس v، هزینه‌ی ممانعت $c^V(v)$ برابر است با $s(i)$، به طوری که به ازای هر عنصر $i \in I$، e_i تنها یال مجاور با راس v است. با تبدیل مساله‌ی ممانعت راسی از جورسازی به مساله‌ی ممانعت یالی از جورسازی، دوباره نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

قضیه ۲.۲ *مساله‌ی ممانعت راسی از جورسازی روی گراف‌هایی با وزن‌ها و هزینه‌های واحد، یک مساله‌ی $NP-$کامل است [۲۷]. به علاوه تصمیم‌گیری در مورد اینکه آیا*

$\nu_B^E(G) = ۰$ یک مساله‌ی $NP-$کامل است.

برهان : برای اثبات این قضیه از تبدیل مساله‌ی مجموعه‌ی مستقل استفاده می‌کنیم، که به این مساله که آیا مجموعه‌ای مستقل با اندازه‌ی $r \in \{۱, \cdots, |V|\}$ در گراف G وجود دارد، می‌پردازد.

چون مساله‌ی مجموعه‌ی مستقل، یک مساله‌ی $NP-$کامل است، با بررسی آن اثبات تمام است. گراف G را به عنوان نمونه‌ای از مساله‌ی ممانعت راسی از جورسازی با وزن‌های واحد روی یال‌ها و هزینه‌های واحد روی راس‌ها در نظر می‌گیریم. فرض کنید $B = |V| - r$. ملاحظه می‌شود که $\upsilon_B^E(G) = ۰$ اگر و تنها