چکیده

قاب‌های مخلوط تنگ یک مفهوم نوظهور از نظریه‌ی قاب هستند. این قاب‌ها در فرآیند پخش و مخابرات کاربردهای زیادی دارند. با این حال در مورد وجود این قاب‌ها اطلاعات کمی وجود دارد.
در این پایان‌نامه به طور کامل، مسأله‌ی وجود چنین قاب‌هایی را در حالت خاصی که در آن فضای اصلی با بعد متناهی است و بعد زیرفضاهای قاب مخلوط با هم برابر است را حل می‌کنیم. بدین معنا که شرایطی که تحت آن یک مجموعه از ماتریس‌های تصویر متعامد با رتبه‌ی مساوی وجود دارند و مجموع آن‌ها مضربی عددی از ماتریس همانی است را به طور دقیق مشخص می‌کنیم. برای این منظور ابتدا نشان می‌دهیم چگونه قاب‌های مخلوط تنگ می‌توانند به عنوان موارد خاصی از قاب‌های تنگ یکه در نظر گرفته شوند. سپس با استفاده از این ایده چند روش اساسی را برای ساختن قاب‌های مخلوط تنگ جدید از نمونه‌های موجود معرفی می‌کنیم. در فصل پنجم یک روش اساسی جدید برای ساختن قاب‌های تنگ یکه معرفی می‌کنیم. این روش شبیه به بازی معروف تتریس است. سپس برای ساختن قاب‌های مخلوط تنگ، این ساختار تتریس طیفی با یک روش جدید براساس مدولاسیون ترکیب شده و قاب‌های مخلوط مدوله شده را به ما می‌دهد.
در پایان یک الگوریتم ساده که در واقع یک عملیات همراه با تکرار است، تحت عنوان آزمون وجود قاب مخلوط تنگ ارائه می‌دهیم که به طور کامل وجود قاب‌های مخلوط تنگ با رتبه‌ی مساوی را مشخص می‌سازد. شایان ذکر است که روش‌های ما کاملاً ساختاری و بر پایه‌ی یک روش جدید، انعطاف‌پذیر و مقدماتی برای ساختن قاب‌های تنگ یکه هستند.

واژه‌های کلیدی: قاب، قاب‌های مخلوط، تنگ، عملگر قاب، عملگر آنالیز، عملگر ترکیب، تتریس.
رده‌بندی موضوعی ریاضی۲۰۰۰: 15A60, 42C15

مقدمه

در سال‌های قبل از ۱۹۴۶ میلادی تجزیه پیام‌های مخابراتی به وسیله‌ی سری‌های فوریه انجام می‌گرفت. به این صورت که پیام ابتدا به وسیله‌ی سری فوریه به یک سری تبدیل می‌شد و ضرایب این سری ارسال می‌گردید، در محل مقصد سری مجدداً به پیام برگردانده می‌شد. در طی این تبدیلات پیام اطلاعات مربوطه به ابتدا و انتهای پیام مخفی می‌ماند و همچنین اگر اختلالی در این ارسال پیش می‌آمد، در برگرداندن پیام از سری‌های فوریه این نقص‌ها قابل رفع شدن نبود. دلیل این محدودیت را منحصر به فردی ضرایب در تجزیه به روش فوریه بیان کردند. بالاخره در سال ۱۹۴۶ میلادی گابور شیوه‌ای برای تجزیه سیگنال‌ها به سیگنال‌های مقدماتی ارائه داد که مشکلات و محدودیت‌های بیان شده در شیوه‌ی قبل رفع گردید (به خاطر این موفقیت گابور موفق به دریافت جایزه‌ی نوبل در سال ۱۹۷۱ شد). ۵ سال بعد یعنی در سال ۱۹۵۰ میلادی زمانی که در نظریه‌ی سری‌های فوریه غیرهارمونیک به مسائل مشکل برخورد کردند و به وسیله‌ی اطلاعات گذشته مسائل قابل حل شدن نبود. دافین و شیفر، روش گابور را به کار برده و علی‌رغم انتظار همگان، مسائل با این راه حل شد. با این ایده و انگیزه دافین و شیفر آن‌چه که گابور طرح کرده بود به صورت مجرد انتزاعی بر فضای هیلبرت، با عنوان قاب بیان کردند. نتیجه‌ی این تلاش رسیدن به دنباله‌هایی وسیع‌تر از پایه‌ی متعامد بود با این ویژگی که هر فضای هیلبرت برحسب این دنباله قابل تجزیه بود. البته در این حالت برخلاف تجزیه براساس پایه‌ی متعامد، ضرایب منحصر به فرد نیست و همین ویژگی باعث ترجیح قاب بر پایه متعامد شد. در سال‌های بعد در ادامه‌ی تحقیقات قاب‌ها برای فضاهای باناخ نیز تعریف گردید. البته بحث قاب در فضای باناخ کمی متفاوت با قاب در فضای هیلبرت است. چون تعریف قاب در فضای هیلبرت بر پایه‌ی ضرب این فضا است. حال آن‌که فضای باناخ ضرب ندارد. قاب‌های گابور که اغلب با نام قاب‌های ویل-هایزنبرگ نیز شناخته می‌شوند زمینه‌ای برای آغاز آنالیز طیفی نیز به حساب می‌آید.

اکنون از این نوع قاب در هر قسمتی که به تجزیه سیگنال‌ها مرتبط است استفاده می‌شود. به عنوان مثال در مخابرات، اپتیک، پردازش تصویر، بانک‌های جدا ساز و... مقالات زیادی نیز در این مورد نوشته شده است.

قاب‌های زیرفضاها که بعدها به قاب مخلوط تغییر نام یافت توسط کاسازا و کوتینیوک [10] معرفی شدند که تعمیم قاب‌های برداری در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ هستند. به راستی قاب‌های برداری می‌توانند به عنوان «قاب‌های مخلوط یک بعدی» تلقی شوند. در طول سال‌های اخیر نظریه‌ی قاب‌های مخلوط

رشد سریعی داشته است. کاربردهای فراوانی از قاب‌های مخلوط بدست آمده است. به طور مثال شبکه‌های سنسور، مبحث عصب، نظریه‌ی کد و... به ویژه کاربردهایی که به فرآیند پخش نیاز دارند به خوبی می‌توانند موارد استفاده قاب‌های مخلوط را شرح دهند.
در این پایان‌نامه با روش ساختن قاب‌های مخلوط تنگ در حالت خاصی که فضای اصلی با بعد متناهی و زیرفضاهای آن دارای بعد مساوی می‌باشند آشنا می‌شویم که در آن از مقاله‌ی اول به عنوان مقاله‌ی اصلی و از مقاله‌های دوم و سوم به عنوان مقاله‌های فرعی استفاده شده است.

P.G. Casazza, M. Fickus, D. Mixon, Y. Wang and Z. Zhou, Constructing tight fusion frames, Appl. Comput. Harmon. Anal. 30, 2011, 175-187.

G. Zimmermann, Normalized tight frame in finite dimensions, Recent Progress in Multivariate Approximation (K. Jetter, W. Haubmann and M. Reimer, eds.), Birkhauser, 2001, 249-252.

P.G. Casazza, M. Fickus, D. Mixon, J. Peterson and I. Smalyanau, Every Hilbert space frame has a Naimark complement, Preprint.

در فصل اول به طرح تعاریف، نمادها و قضایای مربوط به فضای هیلبرت، تعامد، عملگرها، رده اثر و عملگرهای هیلبرت-اشمیت که در فصول بعد نیاز ما را برآورده می‌کند پرداخته‌ایم. قضایای مربوط به این فصل را بدون اثبات می‌آوریم.
در فصل دوم که در دو بخش تنظیم شده است ابتدا تعاریف، خواص، قضایای قاب و سپس عملگر قاب را مطرح کرده‌ایم.
در فصل سوم که از سه بخش تشکیل شده است تعاریف و خواص و قضایای قاب مخلوط، عملگر قاب مخلوط، کران‌های قاب مخلوط را بیان کرده‌ایم.
در فصل چهارم که متشکل از ۳ بخش است ابتدا مقدماتی راجع به قاب‌های مخلوط تنگ ارائه می‌دهیم، سپس در بخش دوم وجود قاب‌های مخلوط تنگ در یک فضای با بعد متناهی را مشخص می‌کنیم. در بخش سوم نیز که از دو زیربخش تشکیل شده است چند روش برای ساختن قاب‌های مخلوط تنگ را ارائه می‌کنیم. برای این ساختارها از ضرب‌های تانسوری و مکمل‌های متعامد استفاده می‌کنیم.
در فصل پنجم که شامل ۳ بخش است، ابتدا به معرفی یک روش اساسی جدید برای ساخت قاب‌های تنگ نرم واحد می‌پردازیم. این روش که شبیه به روش بازی معروف تتریس است، یک طیف مسطح با

بلوک‌هایی دارای مساحت ثابت می‌سازد، سپس در بخش دوم این ساختار تتریس طیفی با یک روش جدید براساس مدولاسیون ترکیب می‌شود که نتیجه‌ی آن قاب‌های مخلوط مدوله شده است که وجود آن‌ها کلید اثبات قسمت آخر یکی از قضایای اصلی ما است. در بخش پایانی نتایجمان را با یک سری تحلیل‌های جدید ترکیب می‌کنیم تا دومین قضیه‌ی اصلی‌مان را ثابت کنیم. به بیان دقیق‌تر یک الگوریتم ساده که در واقع یک عملیات همراه با تکرار است ارائه می‌دهیم که آزمون وجود قاب مخلوط تنگ نامیده می‌شود. این الگوریتم وجود یا عدم وجود قاب‌های مخلوط تنگ با رتبه‌ی مساوی را به طور کامل مشخص می‌کند.

فهرست مطالب

فصل ۱

نمادها و مقدمات

در این فصل سعی کرده‌ایم نمادها، تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصول بعد را بیان نماییم.

۱.۱ فضای هیلبرت

تعریف ۱.۱.۱. اگر X یک فضای توپولوژیک و f تابعی با مقادیر مختلط روی X باشد، محمل f که با نماد $supp(f)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$suppf := \overline{\{x \in X : \ \ f(x) \neq \circ\}}.$$

تعریف ۲.۱.۱. **تابع کف** x را که با $\lfloor x \rfloor$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$floor(x) = \lfloor x \rfloor,$$

بزرگترین عدد صحیحی که از x بزرگتر نیست. یا به طور معادل

$$\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} : \ \ m \leq x\}.$$

همچنین **تابع سقف** x را که با $\lceil x \rceil$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$ceiling(x) = \lceil x \rceil,$$

کوچکترین عدد صحیحی که از x کوچکتر نیست یا به طور معادل

$$\lceil x\rceil = \min\{n \in \mathbb{Z}: \quad n \geq x\}.$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان ($\mathbb{R}$یا$\mathbb{C}$) $= \mathbb{F}$ باشد.تابع $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{F}$ را که برای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{F}$ در شرایط زیر صدق کند یک نیم نرم روی X می‌نامیم:

۱. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

۲. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ نامساوی مثلثی .

توجه داشته باشیم بنابر ۱. اگر $\alpha = 0$ آن‌گاه $\|0\| = \|0x\| = |0|\|x\| = 0$ و همچنین بنابر ۲.

$$0 = \|0\| = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|.$$

این نتیجه می‌دهد که برای هر $x \in X$ داریم: $\|x\| \geq 0$. اگر نیم نرم $\|.\|$ دارای این خاصیت باشد که $\|x\| = 0$ ایجاب کند $x = 0$ آن را یک نرم نامند. همچنین زوج $(X, \|.\|)$ را نیز فضای نرم‌دار نامند.

تعریف ۴.۱.۱. فضای نرمدار $(X, \|.\|)$ را یک **فضای باناخ** روی میدان $\mathbb{F}$ نامند هرگاه یک فضای کامل باشد. یعنی هر دنباله کوشی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به عضوی از X مانند x نسبت به $\|.\|$ همگرا باشد. با این مفهوم که $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ وقتی $n \longrightarrow \infty$.

تعریف ۵.۱.۱. نرم‌های $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ را روی فضای نرم‌دار X معادل گوییم اگر اعداد مثبتی مانند a و b موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2.$$

قضیه ۶.۱.۱. *[1, p 177] هر دو نرم دلخواه روی فضای برداری متناهی‌البعد معادلند.*

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ باشد. یک **ضرب داخلی** روی X تابعی مانند $\langle .,. \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{F}$ است به‌طوری‌که به ازای هر $x, y, z \in X$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$.

۲. $\langle x, x\rangle \geq 0$

۳. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

۴. تساوی $\langle x, x\rangle = 0$ ایجاب می‌کند $x = 0$.

زوج $(X, \langle .,.\rangle)$ را یک **فضای ضرب داخلی** نامند.

تعریف ۸.۱.۱. در فضای ضرب داخلی مفروض $(X, \langle .,.\rangle)$ تابع زیر براساس ضرب داخلی برای هر $x \in X$ قابل تعریف است: $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ بوضوح $\|.\|$ یک نرم روی X است. در این صورت فضای $(X, \langle .,.\rangle)$ را **پیش-هیلبرت** گوییم. در صورتیکه X با نرم فوق تشکیل یک فضای باناخ دهد آن را یک فضای هیلبرت می‌نامیم.

مثال ۹.۱.۱. *با ضرب داخلی زیر $\mathbb{C}^n$ یک فضای هیلبرت است.*

به ازای هر $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ و $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ تعریف می‌کنیم

$$\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i$$

تبصره: فضای هیلبرت رده خاصی از فضاهای باناخ را تشکیل می‌دهد و تمام قضایای باناخ در مورد فضاهای هیلبرت نیز برقرار است. هندسه فضاهای هیلبرت از بسیاری جهات شبیه به هندسه اقلیدسی و بسیار در دسترس‌تر از نظریه فضاهای باناخ است.
در سراسر این پایان‌نامه فضای هیلبرت را با $\mathcal{H}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۰.۱.۱. *[25, 12.2,12.3] فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت داریم*

۱. *به ازای هر* $y \in \mathcal{H}$ *و هر* $\alpha \in \mathbb{F}$، $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$.

۲. *برای هر* $y \in \mathcal{H}$، $\langle 0, y\rangle = 0$.

۳. *به ازای هر* $x, y, z \in \mathcal{H}$، $\langle z, x + y\rangle = \langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle$.

۴. برای هر $y \in \mathcal{H}$، نگاشت $f_y : x \longrightarrow \langle x, y\rangle$ تابعکی خطی کران‌دار بر $\mathcal{H}$ است و داریم $\|f_y\| = \|y\|$.

قضیه ۱.۱.۱۱. *[25, 12.2,12.3] فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی باشد، در این صورت به ازای هر x, y از X داریم*

۱. $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ (نامساوی کوشی- شوارتز)

۲. $\|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ = ۲(\|x\|^۲ + \|y\|^۲)$ (قانون متوازی‌الاضلاع)

۳. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلثی)

قضیه ۱.۱.۱۲. *[26, 4.6] توابع نرم و ضرب داخلی روی فضای ضرب داخلی نرم‌دار X پیوسته هستند و همچنین ضرب داخلی نسبت به هر دو مؤلفه پیوسته است.*

۱.۲ تعامد

تعریف ۱.۲.۱. اگر A و B و $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$ زیرمجموعه‌هایی از $\mathcal{H}$ و x و y نیز اعضایی از $\mathcal{H}$ باشند، آنگاه

۱. x و y را **متعامد** یا عمود بر هم گوییم هرگاه $\langle x, y\rangle = ۰$ و می‌نویسیم $x \perp y$.

۲. x بر A عمود است اگر برای هر $y \in A$ داشته باشیم $\langle x, y\rangle = ۰$ و می‌نویسیم $x \perp A$.

۳. A و B را عمود بر هم یا **متعامد** نامیم هرگاه برای هر $x \in A$ و $y \in B$، $\langle x, y\rangle = ۰$ و می‌نویسیم $A \perp B$.

۴. **مکمل متعامد** A را با $A^\perp$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم:

$$A^\perp = \{y \in \mathcal{H} : \langle x, y\rangle = ۰, \quad \forall x \in A\}.$$

۵. A را **یکا متعامد** گوییم هرگاه دو عضو متمایز A بر هم عمود بوده و برای هر $x \in A$، $\|x\| = ۱$.

۶. اگر $\mathcal{H}$ دارای زیرمجموعه‌ی چگال شمارش‌پذیری باشد، $\mathcal{H}$ را **فضای هیلبرت جدایی‌پذیر** می‌نامیم.

۷. $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ را یک **دنباله‌ی متعامد** گویند هرگاه برای هر $\alpha \neq \acute{\alpha}$ ، $\langle u_\alpha, u_{\acute{\alpha}}\rangle = ۰$. همچنین $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یکا متعامد است هرگاه متعامد باشد و به ازای هر $\alpha \in I$، $\langle u_\alpha, u_{\acute{\alpha}}\rangle = \|u_\alpha\|^۲ = ۱$.

۸. دنباله‌ی $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ **یکا متعامد ماکسیمال** است اگر یکا متعامد باشد و به طور سره درون هیچ مجموعه‌ی متعامد دیگری از $\mathcal{H}$ قرار نگیرد.

۹. دنباله‌ی $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ را در $\mathcal{H}$ **کامل** گوییم اگر و تنها اگر تنها عضو عمود بر این خانواده صفر باشد. یعنی اگر $x \in \mathcal{H}$ چنان باشد که برای هر $\alpha \in I$، $\langle x, u_\alpha\rangle = ۰$، آن‌گاه $x = ۰$.

قضیه ۱.۲.۲. *[26, 4.21] هر مجموعه یکا متعامد $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ از $\mathcal{H}$ درون یک مجموعه ماکسیمال از $\mathcal{H}$ قرار می‌گیرد.*

قضیه ۱.۲.۳. *هر خانواده‌ی یکا متعامد در یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر شمارا است.*

تعریف ۱.۲.۴. زیرفضای تولید شده توسط $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ عبارت است از مجموعه تمام ترکیب‌های خطی متناهی از u_αها، یعنی:

$$span\{u_\alpha\}_{\alpha\in I} = \Big\{ \sum_{i\in F} c_i x_i, \quad \text{متناهی} F \subseteq I, \;\; c_i \in F \Big\}.$$

قضیه ۱.۲.۵. *خانواده یکا متعامد $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ ماکسیمال است اگر و تنها اگر $span\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ در $\mathcal{H}$ چگال باشد یعنی $\overline{span}\{u_\alpha\}_{\alpha\in I} = \mathcal{H}$*

برهان. اثبات به راحتی از تعریف نتیجه می‌شود. □

قضیه ۱.۲.۶. *[26, 4.18] فرض کنیم $\{u_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک مجموعه یکا متعامد در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت احکام زیر هم‌ارزند:*

۱. *دنباله‌ی $\{u_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک پایه‌ی یکا متعامد برای $\mathcal{H}$ است.*

۲. *برای هر $x \in \mathcal{H}$ داریم $\|x\|^{2} = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n\rangle|^{2}$، که این تساوی به* ***اتحاد پارسوال***[1] *معروف است.*

۳. $\overline{span}\{u_n\}_{n=1}^{\infty} = \mathcal{H}$.

۴. *برای هر $x \in \mathcal{H}$ داریم $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n\rangle u_n$.*

۵. *اگر $x \in \mathcal{H}$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\langle x, u_n\rangle = 0$، آن‌گاه $x = 0$.*

تبصره. برای هر $i, j \in \mathbb{Z}$، δ_{ij} را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

آن را دلتای کرونکر می‌نامند.

قضیه ۱.۲.۷. *[25, 12.8] فرض کنیم $x \in \mathcal{H}$. در این صورت*

$$\|x\| = \sup\{|\langle x, y\rangle| : y \in \mathcal{H}, \ \ \|y\| = 1\}.$$

تعریف ۱.۲.۸. فرض کنید $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک مجموعه یکا متعامد در $\mathcal{H}$ باشد، در این صورت به ازای هر $x \in \mathcal{H}$ تابع مختلط $\hat{x}$ بر مجموعه اندیس‌گذار I که با ضابطه‌ی

$$\hat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha\rangle, \qquad\qquad (\alpha \in A),$$

تعریف می‌شود، مربوط است و آن را **ضریب فوریه**[2] x نسبت به مجموعه $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ می‌نامند.

قضیه ۱.۲.۹. *[26, 4.18] هر فضای هیلبرت دارای پایه یکا متعامد است.*

تعریف ۱.۲.۱۰. فرض کنیم $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ فضاهای هیلبرت باشند. جمع مستقیم دو فضای هیلبرت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2 = \{(x_1, x_2); \ \ x_1 \in \mathcal{H}_1, x_2 \in \mathcal{H}_2\}.$$

---

[1] Parseval

[2] Fourier

در فرم دوم نمایش فوق، جمع فقط یک نماد است و مفهوم دیگری ندارد.
فضای جمع مستقیم دو فضای هیلبرت با جمع و ضرب مؤلفه‌ای و فرم زیر بوضوح یک فضای هیلبرت است:
برای $(x_۱, x_۲)$ و $(y_۱, y_۲)$ از $\mathcal{H}_۱ \bigoplus \mathcal{H}_۲$ داریم:

$$\langle (x_۱, x_۲), (y_۱, y_۲) \rangle = \langle x_۱, y_۱ \rangle_{\mathcal{H}_۱} + \langle x_۲, y_۲ \rangle_{\mathcal{H}_۲}$$

در نتیجه

$$\|(x_۱, x_۲)\| = \Big(\sum_{i=۱}^{۲} \|x_i\|^۲_{\mathcal{H}_i}\Big)^{\frac{۱}{۲}}.$$

این تعریف برای تعداد متناهی فضای هیلبرت نیز قابل تعمیم است.

تعریف ۱.۲.۱۱. فرض کنید M یک زیرفضای بسته از فضای نرمدار X باشد. اگر یک زیرفضای بسته مانند N از X وجود داشته باشد به طوری که $M \cap N = \{۰\}$ و $X = M + N$ آن‌گاه به M یک زیرفضای **متکامل** از X گویند. در این حالت می‌نویسیم $X = M \oplus N$.
اگر X یک فضای هیلبرت باشد، آن‌گاه همواره یک زیرفضای بسته از X مانند N وجود دارد به طوری که X مجموع مستقیم M و N باشد. در این حالت N را زیرفضای **مکمل متعامد** M می‌نامند و می‌نویسند $N = M^\perp$.

قضیه ۱.۲.۱۲. *[20, p 85] اگر M یک زیرفضای دلخواه از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد آن‌گاه شرایط زیر برقرارند:*

۱. *$M^\perp$ زیرفضای بسته از $\mathcal{H}$ است.*

۲. *$\overline{M}^\perp = M^\perp$، $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$ و $M \cap M^\perp = \{۰\}$.*

۳. *$\mathcal{H} = \overline{M}$ اگر و تنها اگر $M^\perp = \{۰\}$.*

قضیه ۱.۲.۱۳. *[18, p 386]* **(تجزیه متعامد)** *فرض کنیم M یک زیر فضای بسته از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، در این صورت $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$.*

۳.۱ عملگرها

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید X و Y دو فضای برداری باشند. نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ را یک **تبدیل خطی** (عملگر خطی) نامند هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{F}$،

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y).$$

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار باشند. در این صورت **نرم عملگر خطی** T را با $\|T\|$ نشان می‌دهند که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq ۱\} &= \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| = ۱\} \\ &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq ۰\} \\ &= \inf\{M > ۰ : \|Tx\| \leq M\|x\|, \text{به ازای هر} \, x \in X\}.\end{aligned}$$

اگر $\|T\| < \infty$، آن‌گاه تبدیل خطی T **کران‌دار** است. تمام عملگرهای خطی کران‌دار از X به Y را با نماد $B(X,Y)$ و اگر $X = Y$ با نماد $B(X)$ نشان می‌دهند. اگر $Y = \mathbb{F}$، آن‌گاه T را **تابعک خطی** گویند و مجموعه‌ی تمام تابعک‌های خطی-کراندار روی X را با X^* نشان داده و آن‌را **دوگان** X می‌نامیم. همچنین اگر $X \cong X^{**}$ آن‌گاه فضای X را بازتابی می‌نامیم. همچنین زیرفضاهای $N(T) = \{x \in X : T(x) = ۰\}$ و $R(T) = \{T(x) : x \in X\}$ به ترتیب از X و Y را **فضای پوچ** و **فضای برد** T نامند. همچنین بعد برد T را رتبه‌ی T می‌نامند.

قضیه ۳.۳.۱. *[25, 1.32] برای تبدیل خطی $T : X \longrightarrow Y$ احکام زیر هم‌ارزند:*

۱. *T پیوسته است.*

۲. *T کران‌دار است.*

۳. *T در صفر پیوسته است.*

قضیه ۴.۳.۱. *[18, p 94] برای تبدیل خطی پیوسته $T : X \longrightarrow Y$ شرایط زیر هم‌ارزند:*

۱. $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$

۲. *برای هر $x \in X$ داریم $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ و $\|T\|$ کوچکترین مقدار مثبتی است که در این نامساوی برای هر $x \in X$ صدق می‌کند.*

تعریف ۱.۳.۵. فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار و $T : X \longrightarrow Y$ یک تبدیل خطی باشد، اگر T یک به یک و پوشا باشد آن‌گاه T را **وارون‌پذیر** نامند.

قضیه ۱.۳.۶. *[25, 4.10] اگر $T \in B(X, Y)$، آن‌گاه عملگر یکتای $T^* \in B(Y^*, X^*)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x \in X$ و $y^* \in Y^*$ ، $\langle Tx, y^* \rangle = \langle x, T^*y^* \rangle$ و همچنین $\|T^*\| = \|T\|$. T^* را الحاقی T می‌نامیم.*

قضیه ۱.۳.۷. *[25] فرض کنیم $T \in B(\mathcal{H})$ و $R(T)$ را برد یا مجموعه مقادیر T در نظر می‌گیریم. $R(T) = \mathcal{H}$ اگر و تنها اگر T^* از پایین کران‌دار باشد. همچنین $R(T^*) = \mathcal{H}$ اگر و تنها اگر T از پایین کران‌دار باشد.*

تعریف ۱.۳.۸. $T \in B(\mathcal{H})$ را **خودالحاق** می‌گوییم اگر $T = T^*$. T^* عملگری است که در قضیه‌ی قبل بدست آمد. به عبارت دیگر T خودالحاق است هرگاه برای هر $x, y \in \mathcal{H}$ داشته باشیم $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$.

تعریف ۱.۳.۹. عملگر $T \in B(\mathcal{H})$ را **مثبت** گوییم اگر برای هر $x \in \mathcal{H}$ داشته باشیم $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ و می‌نویسیم $T \geq 0$.

تعریف ۱.۳.۱۰. عملگرهای خوالحاق $T, S \in B(\mathcal{H})$ مفروض هستند. $S \geq T$ هرگاه $S - T \geq 0$.

قضیه ۱.۳.۱۱. *[25, 12.7] فرض کنیم $T \in B(\mathcal{H})$ چنان باشد که برای هر $x \in \mathcal{H}$ داشته باشیم $\langle Tx, x \rangle = 0$. آن‌گاه $T = 0$.*

نتیجه ۱.۳.۱۲. *هر عملگر مثبت خودالحاق است.*

برهان. فرض کنیم $x \in \mathcal{H}$. چون عملگر T مثبت است داریم

$$\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \langle x, Tx \rangle = \langle T^*x, x \rangle$$

پس برای هر $x \in \mathcal{H}$ داریم $\langle (T - T^*)(x), x\rangle = 0$. و با توجه به قضیه قبل $T - T^* = 0$ و در نتیجه T خودالحاق است. $\square$

تعریف ۱.۳.۱۳. فرض کنید $T \in B(\mathcal{H})$. در این صورت آن‌را

۱. به طور خطی ایزومتری (طولپا) گوییم اگر برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\|Tx\| = \|x\|$.

۲. عملگر T را یک **هم-ایزومتری** (همطولپا) نامیم هر گاه T^* ایزومتری باشد.

۳. **نرمال** نامند هرگاه $T^*T = TT^*$.

۴. **یکانی** نامند هرگاه $T^*T = TT^* = I_{\mathcal{H}}$ ($I_{\mathcal{H}}$ عملگر همانی روی $\mathcal{H}$ است).

۵. **تصویر** نامند هرگاه $T^2 = T$.

۶. **متعامد** نامند هرگاه $N(T)^{\perp} = R(T)$.

قضیه ۱.۳.۱۴. *[25] اگر $T \in B(\mathcal{H})$ آن‌گاه گزاره‌های زیر هم‌ارزند:*

۱. *T یکانی است.*

۲. *$R(T) = \mathcal{H}$ و $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$.*

۳. *$R(T) = \mathcal{H}$ و برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\|Tx\| = \|x\|$.*

قضیه ۱.۳.۱۵. *[25, 12.14] فرض کنیم $P \in B(\mathcal{H})$ یک تصویر باشد. دراین صورت احکام زیر هم‌ارزند:*

۱. *P خودالحاق است.*

۲. *P نرمال است.*

۳. *P متعامد است.*

۴. *برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$.*

قضیه ۱.۳.۱۶. *[25, 12.25] فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $T \in B(\mathcal{H})$ عملگری نرمال باشد. در این صورت*

$$\|T\| = \sup\{\langle Tx, x\rangle : \quad x \in \mathcal{H}, \ \ \|x\| = ۱\}.$$

تعریف ۱.۳.۱۷. ریشه دوم عملگر مثبت T عبارت است از عملگری مثبت مانند S که $S^{۲} = T$. معمولاً ریشه دوم T را با $T^{\frac{۱}{۲}}$ نشان می‌دهند.

قضیه ۱.۳.۱۸. *[25, 12.33] هر عملگر مثبت T دارای ریشه دوم منحصربه فردی است. ضمناً اگر U عملگری خطی و کران‌دار باشد که با T جابه‌جا شود، با $T^{\frac{۱}{۲}}$ نیز جابه‌جا می‌شود.*

تعریف ۱.۳.۱۹. فرض کنید $(X, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد. عملگر $P \in B(X)$ را یک **تصویر متعامد** نامند هرگاه خودالحاق و خودتوان باشد. یعنی $P = P^*$ و $P^{۲} = P$.

قضیه ۱.۳.۲۰. *[26, 4.11] فرض کنیم M زیرفضای بسته‌ای از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت احکام زیر برقرارند:*

۱. *هر $x \in \mathcal{H}$ تجزیه منحصر به فردی به صورت $x = z + y$ دارد که در آن $y \in M^{\perp}$ و $z \in M$.*
این فرم تجزیه x را نمایش x وابسته به زیرفضای M از $\mathcal{H}$ نامند.

۲. *z و y به ترتیب نزدیکترین به x در M و در $M^{\perp}$ هستند.*

۳. $\|x\|^{۲} = \|y\|^{۲} + \|z\|^{۲}$.

قضیه ۱.۳.۲۱. *فرض کنیم W زیرفضایی از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت احکام زیر هم‌ارزند:*

۱. *W زیرفضای بسته‌ای از $\mathcal{H}$ است.*

۲. *تصویر متعامد منحصر به فردی مانند P موجود است به طوری که $P(\mathcal{H}) = W$ و $\|P\| = ۱$.*

برهان. ۱ $\Longleftarrow$ ۲ برای هر $x \in \mathcal{H}$، $y \in W$ و $z \in W^{\perp}$ موجودند به طوری که $x = z + y$. بنابر قضیه قبل P را تعریف می‌کنیم $P(x) = y$. بوضوح P خطی و منحصر به فرد است و باز با توجه به

قضیه قبل برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\|P(x)\| \leq \|x\|$ و از طرفی برای هر $x \in W$، $P(x) = x$ و در نتیجه $\|P\| = ۱$.

حال کافی است نشان دهیم P تصویر خودالحاق است. برای هر $x \in \mathcal{H}$،

$$P^{۲}(x) = P^{۲}(y+z) = P(P(y+z)) = P(y) = y$$

و در نتیجه $P^{۲} = P$.

اکنون الحاقی بودن P را بررسی می‌کنیم. برای هر $x_۱, x_۲ \in \mathcal{H}$ بنابه قضیه قبل اعضای $y_۱, y_۲ \in W$ و $z_۱, z_۲ \in W^{\perp}$ موجودند به‌طوری‌که $x_۱ = y_۱ + z_۱$ و $x_۲ = y_۲ + z_۲$. حال بنابر خاصیت تصویر P

$$\langle P(x_۱), x_۲\rangle = \langle y_۱, x_۲\rangle = \langle y_۱, y_۲ + z_۲\rangle = \langle y_۱, y_۲\rangle + \langle y_۱, z_۲\rangle.$$

چون $y_۱ \in W$ ، $z_۲ \in W^{\perp}$ لذا $\langle y_۱, z_۲\rangle = ۰$ و همچنین چون $y_۲ \in W$ و $z_۱ \in W^{\perp}$ پس $\langle z_۱, y_۲\rangle = ۰$ و در نتیجه

$$\langle P(x_۱), x_۲\rangle = \langle y_۱, y_۲\rangle + \langle z_۱, y_۲\rangle = \langle y_۱ + z_۱, y_۲\rangle = \langle x_۱, P(x_۲)\rangle$$

یعنی برای هر $x_۱, x_۲ \in \mathcal{H}$، $\langle P(x_۱), x_۲\rangle = \langle x_۱, P(x_۲)\rangle$. که نشان می‌دهد P خودالحاق است.

۲ $\Longleftarrow$ ۱ [18, p 294] $\square$

نتیجه ۲۲.۳.۱. *اگر $\mathcal{H}$ و P و W همان‌هایی باشند که در قضیه قبل بکار بردیم، از منحصر به فردی نمایش و تجزیه هر عضو، بخصوص برای هر $x \in W$ داریم $x = x + ۰$. پس برای هر $x \in W$، $P(x) = x$ یعنی تحدید P به W همان نگاشت همانی روی W است.*

به آسانی دیده می‌شود که اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $P \in B(\mathcal{H})$، آن‌گاه P یک تصویر متعامد است اگر و تنها اگر $I - P$ نیز یک تصویر متعامد باشد.

تعریف ۲۳.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای نرمدار باشند و $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. در این صورت

۱. T را **بدور از صفر** می‌نامند هرگاه ثابت مثبتی مانند δ موجود باشد که به ازای هر $x \in \mathcal{H}$ داشته باشیم $\delta\|x\| \leq \|Tx\|$ و δ را یک کران پایین T می‌نامند.

۲. هرگاه $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ فضای هیلبرت باشند، T را **ایزومتری جزیی** می‌نامند هرگاه تحدید آن به $N(T)^{\perp}$ یک ایزومتری باشد.

قضیه ۲۴.۳.۱. *فرض کنیم $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای باناخ باشند و $T \in B(\mathcal{H})$ بدور از صفر باشند. در این صورت T یک به یک است و $R(T)$ در $\mathcal{H}$ بسته است. بعلاوه اگر T وارون‌پذیر نیز باشد آن‌گاه $\|T^{-1}\| \leq \delta^{-1}$ که در آن δ یک کران پایینی T است.*

برهان. بنا به خواص نرم حکم ثابت است. □

قضیه ۲۵.۳.۱. *فرض کنیم $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای هیلبرت و $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. در این صورت T پوشاست اگر و تنها اگر T^* بدور از صفر باشد.*

تعریف ۲۶.۳.۱. فرض کنیم f یک تابع روی $\mathbb{R}$ باشد. عملگرهای E_b و T_a که به ترتیب آن‌ها را **مدولاسیون** و **انتقال** می‌نامیم به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱. $E_b(f(x)) = e^{2\pi ibx} f(x)$ $b \in \mathbb{R}$

۲. $T_a(f(x)) = f(x-a)$ $a \in \mathbb{R}$

که همه عملگرهایی روی $L^2(\mathbb{R})$ هستند.

۴.۱ رده اثر و عملگرهای هیلبرت- اشمیت

قضیه ۱.۴.۱. *[15, 18.1] اگر $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ پایه‌های یکا متعامد برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند، آن‌گاه به ازای هر عملگر کراندار A داریم*

$$\sum_{\mathcal{E}} \|Ae\|^2 = \sum_{\mathcal{F}} \|A^* f\|^2 = \sum_{\mathcal{E}} \sum_{\mathcal{F}} |\langle Ae, f\rangle|^2.$$

نتیجه ۲.۴.۱. *مجموع $\sum_{e\in\mathcal{E}} \langle |A|e, e\rangle$ مستقل از انتخاب پایه $\mathcal{E}$ است.*

تعریف ۳.۴.۱. عملگر $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ **از رده اثر** است هرگاه یک پایه یکا متعامد $\mathcal{E}$ موجود باشد به‌طوری‌که $\sum_{e\in\mathcal{E}} \langle |A|e, e\rangle < \infty$. مجموعه عملگرهای از رده اثر روی $\mathcal{H}$ را با $B_1(\mathcal{H})$ نشان می‌دهند.

به کمک نتیجه ۱.۴.۲ عملگر A از رده اثر است اگر و تنها اگر $\sum_{e\in\mathcal{E}}\langle |A|e,e\rangle$ برای یک انتخاب و لذا به ازای هر انتخاب پایه یکا متعامد $\mathcal{E}$ متناهی باشد و

$$\|A\|_{۱} \equiv \sum_{e\in\mathcal{E}}\langle |A|e,e\rangle$$

خوش تعریف و فقط به عملگر A وابسته است. عدد $\|A\|_{۱}$ **نرم اثر** A نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۴.۴. یک عملگر A روی $\mathcal{H}$ را یک عملگر **هیلبرت-اشمیت** نامند هرگاه $|A|^{۲}$ از رده اثر باشد. مجموعه همه عملگرهای هیلبرت-اشمیت را با $B_{۲}(\mathcal{H})$ نشان می‌دهند. به ازای هر عملگر هیلبرت-اشمیت A و هر پایه $\mathcal{E}$ تعریف می‌کنیم

$$\|A\|_{\mathcal{H}S} = \|A\|_{۲} \equiv \big[\sum_{\mathcal{E}}\langle |A|^{۲}e,e\rangle\big]^{\frac{۱}{۲}} = \||A|^{۲}\|_{۱}^{\frac{۱}{۲}}.$$

قضیه ۱.۴.۵. *[15, 18.6] فرض کنیم A عملگری در $B_{۲}(\mathcal{H})$ باشد. در این صورت*

۱. *به ازای هر پایه $\mathcal{E}$،* $\|A\|_{۲} = \big[\sum_{e\in\mathcal{E}}\|Ae\|^{۲}\big]^{\frac{۱}{۲}}$.

۲. $\|A^*\|_{۲} = \|A\|_{۲}$.

۳. $\|A\| \le \|A\|_{۲}$.

۴. *اگر* $T \in B(\mathcal{H})$*، آن‌گاه* $AT, TA \in B_{۲}(\mathcal{H})$ *و* $\|AT\|_{۲}, \|TA\|_{۲} \le \|T\|\|A\|_{۲}$.

۵. $B_{۲}(\mathcal{H})$ *یک ایده‌ال* $B(\mathcal{H})$ *و* $\|.\|_{۲}$ *یک نرم روی* $B_{۲}(\mathcal{H})$ *است.*

قضیه ۱.۴.۶. *[15, 18.8] اگر* $A \in B(\mathcal{H})$*، آن‌گاه حکم‌های زیر هم‌ارزند:*

۱. $A \in B_{۱}(\mathcal{H})$.

۲. $|A|^{\frac{۱}{۲}} \in B_{۲}(\mathcal{H})$.

۳. A *حاصلضرب دو عملگر هیلبرت-اشمیت است.*

۴. $|A|$ *حاصلضرب دو عملگر هیلبرت-اشمیت است.*