دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض، گرایش توپولوژی

عنوان:

ایدآل های ناب از توابع پیوسته با پشتیبان فشرده (شبه فشرده)

استاد راهنما:

دکتر فریبرز آذرپناه

استاد مشاور:

دکتر معصومه اعتبار

دکتر منیره پیمان

نگارش:

سارا زارع زاده

تیر ۱۳۹۳

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

وجود مقدس پدر عزیزم و مهربان مادرم

که زندگیم را مدیون مهر و عطوفت آنها می دانم

و همسرم

که نشانه لطف الهی در زندگی من است.

تقدیر و تشکر

در ابتدا خداوند بزرگ و مهربان را شاکرم که چنین فرصت ارزشمندی را در اختیار من قرار داد.

از استاد گرامیم جناب آقای "دکتر فریبرز آذرپناه" بسیار سپاسگذارم چرا که بدون راهنماییهای ایشان تامین این پایان نامه بسیار مشکل مینمود. بر خود می دانم از سرکار خانم "معصومه اعتبار" و سرکار خانم "منیره پیمان" به دلیل یاری ها و راهنمایی های بی چشمداشت ایشان که بسیاری از سختیها را برایم آسانتر نمودند، کمال تشکر و قدردانی را نمایم. همچنین از اساتید محترم "دکتر نامداری" و "دکتر محمدیان" که زحمت داوری این پایان نامه را برعهده گرفتند نیز سپاسگذارم.

تیرماه سال هزار و سیصد و نود و سه

چکیده

فرض کنیم $C(X)$ حلقه‌ی توابع پیوسته‌ی حقیقی مقدار بر فضای T_1 و کاملاً منظم X باشد. $C_K(X)$ ایدآل توابع با تکیه‌گاه فشرده باشد. X_L را مجموعه‌ای از نقاط با همسایگی فشرده در X در نظر می‌گیریم. در این پایان نامه شرایطی را بررسی می‌کنیم که در آن $C_K(X)$ یک ایدآل ناب است. ثابت می‌کنیم $C_K(X)$ ناب است، اگر وفقط اگر

$$X_L = \bigcup_{f \in C_K(X)} supp(f).$$

اگر $C_K(X)$ و $C_K(Y)$ ایدآل‌های ناب باشند؛ آن‌گاه $C_K(X)$ و $C_K(Y)$ یکریخت‌اند، اگر و فقط اگر X_L و Y_L همسان‌ریخت باشند. همچنین ثابت می‌کنیم $C_K(X)$ ناب است و X_L ناهمبند پایه‌ای است، اگر و تنها اگر برای هر $f \in C_K(X)$ ، ایدآل (f) یک $C(X)$ مدول تصویری باشد و در انتها نیز نشان می‌دهیم، اگر $C_K(X)$ ناب باشد آن‌گاه X_L یک $F'-$ فضا است، اگر و فقط اگر $C_K(X)$ یک $C(X)-$ مدول تخت باشد.

واژه‌های کلیدی: *مدول تخت، $F-$ فضا، پیرافشرده، ایدآل ناب، ایدآل تصویری.*

فهرست مطالب

پیشگفتار

$C_K(X)$ ایدآل توابع با تکیه‌گاه فشرده است. X_L را مجموعه‌ای از نقاط با همسایگی فشرده در X در نظر می‌گیریم. در این پایان‌نامه شرایطی را که در آن $C_K(X)$ یک ایدآل ناب باشد بررسی می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم $C_K(X)$ ناب است و X_L ناهمبند پایه‌ای است، اگر و تنها اگر برای هر $f \in C_K(X)$ ، ایدآل (f) یک $C(X)-$ مدول تصویری باشد.

این پایان‌نامه دربرگیرنده‌ی سه فصل می‌باشد. در فصل اول، نگاهی گذرا به مفاهیم جبری و توپولوژی می‌اندازیم، در ادامه‌ی فصل، حلقه توابع پیوسته و ایدآل‌های آن را معرفی می‌کنیم و در انتها فشرده‌سازی استون چک و $F-$ فضا را معرفی می‌کنیم.

در فصل دوم، فضای X_L را معرفی نموده و رابطه آن با ایدآل $C_K(X)$ را نشان می‌دهیم و در ادامه شرایطی را بیان می‌کنیم که ایدآل $C_K(X)$ در فضاهای فشرده و شبه فشرده ناب باشد. در پایان فصل به معرفی شرایطی که $C(X)$ پاک است می‌پردازیم.

در فصل سوم کاربردهایی از $C_K(X)$ در فضاهای فشرده و شبه فشرده نشان می‌دهیم و ثابت می‌کنیم اگر $C_K(X)$ ایدآلی ناب باشد، آن‌گاه برای هر ایدآل سره از $C_K(X)$ $Coz(I)$ زیرمجموعه محض X_L است و در پایان نشان می‌دهیم که اگر $C_K(X)$ ناب باشد، آن‌گاه X_L یک $F'-$ فضا است، اگر و تنها اگر $C_K(X)$ یک $C(X)-$ مدول تخت باشد.

فصل ۱

پیش‌نیازها

مقدمه: هدف این فصل آشنایی با مفاهیم اولیه‌ی جبر، توپولوژی و تعاریف مورد نیاز در این رساله می‌باشد که از مقالات و منابع مختلف گردآوری شده است.

۱.۱ مفاهیمی از جبر

۱.۱.۱ برخی از تعاریف جبر

تعریف ۱.۱.۱. *رابطه $\leqslant$ روی مجموعه A یک رابطه ترتیب جزئی است، اگر این رابطه روی A بازتابی، پادتقارن و انتقالی باشد. در این‌صورت زوج مرتب $(A, \leqslant)$ یک مجموعه جزئاً مرتب نامیده می‌شود.*

تعریف ۲.۱.۱. *اگر $(A, \leqslant)$ یک مجموعه جزئاً مرتب باشد، آن‌گاه $(A, \leqslant)$ را یک مجموعه کاملاً مرتب گوییم، هرگاه هر دو عضو $a, b \in A$ قابل مقایسه باشند؛ یعنی $a \leqslant b$ یا $b \leqslant a$.*

تعریف ۳.۱.۱. *اگر R یک حلقه و ترتیب $\leqslant$ روی آن یک ترتیب جزئی باشد، آن‌گاه $(R, \leqslant)$ را یک حلقه‌ی جزئاً مرتب نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:*

۱. اگر $a,b\in R$ و $a\leqslant b$، آن‌گاه برای هر $x\in R$، $a+x\leqslant b+x$؛
۲. اگر $a,b\in R$ و $a\geqslant 0$ و $b\geqslant 0$، آن‌گاه $ab\geqslant 0$.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید R و S دو حلقه باشند. تابع $f:R\longrightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ها است، هرگاه به ازای هر $a,b\in R$ داشته باشیم

$$f(a+b)=f(a)+f(b);$$

$$f(a.b)=f(a)f(b).$$

اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد تکریختی، اگر پوشا باشد بورریختی و اگر دوسویی باشد یکریختی حلقه‌ها نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم نگاشت $\phi:R\longrightarrow R'$ یک همریختی حلقه‌ها باشد. زیر حلقه‌ی $\phi^{-1}[0']=\{r\in R\ :\ \phi(r)=0'\}$ از R را هسته ϕ نامیده و با $Ker(\phi)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۶.۱.۱. زیرمجموعه I از حلقه R را ایدآل چپ R نامیم، هرگاه $(I,+)$ یک گروه آبلی باشد و

$$\forall a\in I,\forall r\in R: ra\in I.$$

هرگاه R یک حلقه باشد، آن‌گاه $I\subseteq R$ را یک ایدآل گویند، هرگاه I ایدآل چپ و راست باشد.

تعریف ۷.۱.۱. هرگاه R یک حلقه و X یک زیر مجموعه متناهی R باشد، ایدآل تولید شده توسط X به صورت زیر تعریف می‌شود

$$<X>=RXR=\{\sum_{i=1}^{n}r_ix_is_i\ :\ r_i,s_i\in R\}$$

ایدآل تولید شده توسط X را ایدآل با تولید متناهی گوییم.

تعریف ۸.۱.۱. یک ایدآل ماکسیمال حلقه‌ی R ایدآلی مانند M است که $M\neq R$ و هیچ ایدآل سره‌ی N از R و در حقیقت شامل M وجود نداشته باشد و همچنین

M ایدآل ماکسیمال حلقه تعویض‌پذیر R است، اگر و تنها اگر برای هر $f \in R \setminus M$ $g \in R$ وجود داشته باشد که $1 - fg \in M$.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه، $(M, +)$ یک گروه آبلی باشد و $\cdot : R \times M \longrightarrow M$ یک تابع باشد که در ویژگی‌های زیر صدق می‌کنند.

الف. $r.(m_1 + m_2) = r.m_1 + r.m_2$ ؛

ب . $(r_1 + r_2).m = r_1.m + r_2.m$ ؛

ج. $r.(s.m) = (r.s).m$

در این‌صورت M را یک R− مدول چپ گوییم.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم A یک R− مدول باشد و $\emptyset \neq S \subseteq R$. اگر $s_1, s_2, ..., s_n \in S$ و $n \in \mathbb{N}$ و $r_1, r_2, ..., r_n \in R$ به قسمی وجود داشته باشند که

$$\sum_{i=1}^{n} r_i s_i = 0$$

به طوری که s_i ها متمایز بوده و حداقل یکی از r_i ها صفر نباشد، آن‌گاه S را زیرمجموعه‌ی وابسته خطی R− مدول A می‌نامیم.

اگر S وابسته خطی نباشد، آن را مستقل خطی می‌نامیم. با توجه به تعریف، مجموعه تهی مستقل خطی است.

R− مدول F را یک R− مدول آزاد می‌نامیم، هرگاه F دارای یک مجموعه‌ی مستقل خطی باشد و این مجموعه مولد مستقل خطی را پایه‌ی R− مدول آزاد می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. ایدآل $P \neq R$ در حلقه‌ی تعویض‌پذیر R، یک ایدآل اول است هرگاه به ازای هر $a, b \in R$ که $ab \in P$ نتیجه بگیریم $a \in P$ یا $b \in P$.

۲.۱.۱ ضرب تانسوری و مدول‌های تخت

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم که M و N دو R− مدول چپ باشند. در این صورت تابع $f : M \longrightarrow N$ را یک R− مدول همریختی می‌نامیم، هرگاه

$$\forall\, m_1, m_2 \in M \;,\; \forall\, r \in R \;:\; f(rm_1 + m_2) = rf(m_1) + f(m_2).$$

مثال. هرگاه M یک $R-$ مدول و $N \leq M$، آن‌گاه

$$i : N \overset{\text{شمول}}{\longrightarrow} M$$

$$i(n) = n$$

به وضوح یک $R-$ مدول همریختی است.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنیم A و B و C سه $R-$ مدول بوده و $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$ دو $R-$ مدول همریختی باشند. در این صورت رشته

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

از $R-$ مدول‌ها و $R-$ همریختی‌ها را یک رشته‌ی دقیق گوییم، هرگاه $Ker(g) = Im(f)$. بنابراین، اگر $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ یک رشته دقیق باشد، آن‌گاه $gof = ۰$. به همین ترتیب رشته‌ی زیر از $R-$ مدول‌ها و $R-$ همریختی‌ها مانند

$$A_۰ \xrightarrow{f_۱} A_۱ \xrightarrow{f_۲} A_۲ \xrightarrow{f_۳} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n$$

یا

$$\cdots \longrightarrow A_{i-۱} \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{f_{i+۱}} A_{i+۱} \longrightarrow \cdots$$

را دقیق گویند، به ازای هر i،

$$Im(f_i) = Ker(f_{i+۱}).$$

توجه کنید، اگر رشته‌ی $۰ \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{f} B$ (φ همریختی صفر است) دقیق باشد آن‌گاه f یک‌به‌یک است و اگر رشته‌ی $B \xrightarrow{g} C \longrightarrow ۰$ دقیق باشد، آن‌گاه g پوشا است. رشته‌ی دقیق

$$۰ \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow ۰$$

را یک رشته دقیق کوتاه نامیم.

تعریف ۱۴.۱.۱. گوییم رشته دقیق کوتاه $۰ \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow ۰$ شکافته شده است یا شکافته می‌شود، هرگاه یکی از شرایط قضیه زیر را داشته باشد.

قضیه ۱.۱.۱۵. فرض کنیم R یک حلقه بوده و A و B و C سه $R-$ مدول باشند. اگر

$$0 \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

یک رشته دقیق کوتاه باشد گزاره‌های زیر معادل می‌باشند.

الف. $R-$ مدول همریختی $h : C \longrightarrow B$ وجود دارد به‌طوری‌که $gh = 1_C$.

ب. $R-$ مدول همریختی $k : B \longrightarrow A$ وجود دارد به‌طوری‌که $kf = 1_A$.

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنیم A یک مدول راست و B یک مدول چپ روی حلقه R باشند. همچنین F، $\mathbb{Z}-$ مدول آزاد تولید شده توسط $A \times B$ باشد. فرض کنیم K زیر مدولی از F باشد که به‌وسیله اجتماع سه مجموعه‌ی

$$\{(a+a^{'}, b) - (a, b) - (a^{'}, b) \ : \ a, a^{'} \in A \ \ , \ b \in B\};$$

$$\{(a, b+b^{'}) - (a, b) - (a, b^{'}) \ : \ a \in A \ \ , \ b, b^{'} \in B\};$$

$$\{(ar, b) - (a, rb) \ : \ a \in A \ \ , \ b \in B \ , \ r \in R\}$$

تولید شده باشد. مدول خارج قسمتی F/K را حاصل‌ضرب تانسوری A و B می‌نامیم و با $A \otimes_R B$ نمایش می‌دهیم. چون F توسط مجموعه $A \times B$ تولید شده است، گروه خارج قسمتی

$$F/K = A \otimes_R B$$

به‌وسیله $\{a \otimes b \ : \ a \in A \ , \ b \in B\} = (a, b) + K$ تولید می‌شود. بدیهی است که هر عنصر $A \otimes_R B$ به‌صورت $a \otimes b$ نیست بلکه به‌صورت $\sum_{i=1}^{r} n_i a_i \otimes b_i$ است که n_i ها متعلق به $\mathbb{Z}$ می‌باشند.

قضیه ۱.۱.۱۷. فرض کنیم A یک مدول راست و B یک مدول چپ روی حلقه R باشند. به ازای هر $a, a^{'} \in A$ و $b, b^{'} \in B$ و $r \in R$

الف . $(a + a^{'}) \otimes b = a \otimes b + a^{'} \otimes b$؛

ب. $a \otimes (b + b^{'}) = a \otimes b + a \otimes b^{'}$؛

ج. $ar \otimes b = a \otimes rb$.

برهان . فقط گزاره ۱ را ثابت می‌کنیم و دیگر گزاره‌ها به طور مشابه اثبات می‌شوند. فرض کنیم $a, a' \in A$ و $b, b' \in B$. چون $(a+a', b) - (a, b) - (b', b) \in K$ پس

$$\begin{aligned}(a+a') \otimes b &= (a+a', b) + K \\ &= (a, b) + (a', b) + K \\ &= (a, b) + K + (a', b) + k \\ &= a \otimes b + a' \otimes b\end{aligned}$$

■

تعریف ۱.۱.۱۸. *فرض کنیم A یک مدول راست و B یک مدول چپ روی حلقه R باشند، اگر C یک $\mathbb{Z}$– مدول باشد، آن‌گاه تابع $f : A \times B \longrightarrow C$ را نگاشت دوخطی میانی از $A \times B$ به توی C می‌نامیم، هرگاه برای هر $a, a' \in A$ و $b, b' \in B$ و $r \in R$ شرایط زیر برقرار باشد:*

الف . $f(a+a', b) = f(a, b) + f(a', b)$؛

ب. $f(a, b+b') = f(a, b) + f(a, b')$؛

ج . $f(ar, b) = f(a, rb)$.

قضیه ۱.۱.۱۹. *هرگاه $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ یک دنباله کامل از R همریختی‌ها بوده و D یک R– مدول راست باشد، آن‌گاه $D \otimes_R A \xrightarrow{1_D \otimes f} D \otimes_R B \xrightarrow{1_D \otimes g} D \otimes_R C$ یک دنباله کامل از R– همریختی‌ها است (این مطلب برای R– مدول چپ نیز برقرار است).*

برهان . رجوع کنید به [۱] .

■

قضیه ۱.۱.۲۰. *فرض کنیم R یک حلقه و $_RB$ و A_R دو R– مدول باشند. در این صورت $A \otimes_R R \cong A$ و $R \otimes_R B \cong B$.*

برهان . رجوع کنید به [۱] . ■

تعریف ۲۱.۱.۱. اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ ، گردایه‌ای از $R-$ مدول‌ها و I یک مجموعه‌ی جهت‌دار باشد و برای هر $i,j \in I$ که $i \leqq j$، $R-$ همریختی $\varphi_{ij} : A_i \longrightarrow A_j$ به قسمی وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

الف. برای هر $i \in I$، φ_{ij} همانی روی A_i باشد؛

ب. برای هر $i,j,k \in I$، اگر $i \leqq j \leqq k$، آن‌گاه $\varphi_{ij}\varphi_{jk} = \varphi_{ik}$. در این صورت $\{A_i, \varphi_{ij}\}_{i\in I}$ را یک سیستم مستقیم می‌نامیم.

تعریف ۲۲.۱.۱. یک سیستم مستقیم $R-$ همریختی‌ها از $\{A_i, \varphi_{ij}\}_{i\in I}$ به توی $R-$ مدول L ، گردایه‌ای از $R-$ همریختی‌های $\{U_iA_i \longrightarrow L\}$ است که برای هر $i,j \in I$ که $i \leqq j$، $U_j\varphi_{ij} = U_i$.

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنیم $\{A_i, \varphi_{ij}\}_{i\in I}$ یک سیستم مستقیم و A یک $R-$ مدول باشد. سیستم مستقیم $R-$همریختی‌های $\{\varphi_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ را حد مستقیم $\{A_i, \varphi_{ij}\}_{i\in I}$ گوییم هرگاه، $R-$ همریختی یکتای $u : A \longrightarrow B$ به قسمی وجود داشته باشد که برای هر $i \in I$، $u\varphi_i = u_i$.

اگر $\{\varphi'_i : A_i \longrightarrow A'\}_{i\in I}$ حد مستقیم دیگری از $\{A_i, \varphi_{ij}\}_{i\in I}$ باشد، آن‌گاه بنابر تعریف حد مستقیم، $R-$ یکریختی $h : A \longrightarrow A'$ به قسمی وجود دارد که برای هر $i \in I$، $h\varphi_i = \varphi'_i$. لذا A با تقریب یکریختی منحصر به فرد است. از این رو می‌نویسیم $A = limA_i$ و حد مستقیم $\{A_i, \varphi_{ij}\}_{i\in I}$ را با $(\varphi_i, limA_i)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲۴.۱.۱. هر ایدآل برابر با حد مستقیم ایدآل‌های با تولید متناهی خودش است.

برهان . رجوع کنید به [۱]. ■

تعریف ۲۵.۱.۱. $R-$ مدول راست D را تخت می‌نامیم، اگر برای هر دنباله کامل از $R-$ همریختی‌های

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

دنباله

$$0 \longrightarrow D\otimes_R A \xrightarrow{1_D\otimes f} D\otimes_R B \xrightarrow{1_D\otimes g} D\otimes_R C \longrightarrow 0$$

از $\mathbb{Z}-$ همریختی‌ها،دنباله کوتاه کامل باشد.

R مدول چپ تخت نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

قضیه ۲۶.۱.۱. *D_R تخت است، اگر و تنها اگر برای هر R همریختی یک‌به‌یک $A \xrightarrow{f} B$، $\mathbb{Z}-$ همریختی $D \otimes_R A \xrightarrow{1_D \otimes f} D \otimes_R B$ یک‌به‌یک باشد و به عبارت دیگر اگر $A' \subseteq A$، آن‌گاه $D \otimes_R A'$ در $D \otimes_R A$ نشانده می‌شود.*

برهان. رجوع کنید به [۱]. ■

قضیه ۲۷.۱.۱. *فرض کنیم $\{A_i\}_{i\in I}$ گردایه‌ای از $R-$ مدول‌ها باشد و $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$. A یک $R-$ مدول تخت است، اگر و تنها اگر برای هر $i \in I$، A_i یک $R-$ مدول تخت باشد.*

برهان. رجوع کنید به [۱]. ■

قضیه ۲۸.۱.۱. *هر زیر مدول یک مدول تخت، تخت است.*

برهان. رجوع کنید به [۱]. ■

قضیه ۲۹.۱.۱. *مدول M تخت است، اگر و تنها اگر هر زیر مدول متناهیاً تولید شده آن تخت باشد.*

برهان. رجوع کنید به [۱]. ■

قضیه ۳۰.۱.۱. *فرض کنیم B یک $R-$ مدول راست باشد، اگر برای هر ایدآل متناهیاً تولید شده چپ I در R و به ازای تابع شمول $i : I \longrightarrow R$ دنباله*

$$0 \longrightarrow B \otimes_R I \xrightarrow{1 \otimes i} B \otimes_R R$$

کامل باشد، آن‌گاه B تخت است.

برهان. رجوع کنید به [۱۹]. ■

مثال. *$R-$ مدول آزاد، تخت است. بنابراین حلقه R تخت است.*

تعریف ۳۱.۱.۱. *ایدآلی را تخت می‌نامیم که $C(X)$– مدول تخت باشد.*

قضیه ۳۲.۱.۱. *برای فضای کاملاً منظم X، گزاره‌های زیر برقرارند:*
الف. هر ایدآل متناهیاً تولید شده $C(X)$، مشمول در یک ایدآل اصلی است؛
ب. هر z– ایدآل در $C(X)$، حد مستقیم ایدآل‌های اصلی است؛
ج. هر z– ایدآل در $C(X)$ یک $C(X)$– مدول تخت است.

برهان. رجوع کنید به [۱]. ■

قضیه ۳۳.۱.۱. *فرض کنیم F یک R– مدول راست تخت و*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\subseteq} F \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 0$$

یک دنباله‌ی کامل کوتاه از R– همریختی‌ها باشد، اگر B یک R– مدول تخت باشد، آن‌گاه برای هر ایدآل چپ I، $K \cap FI = KI$.
برعکس، اگر برای هر ایدآل متناهیاً تولید شده‌ی I در R، $K \cap FI = KI$، آن‌گاه B یک R– مدول تخت است.

برهان. رجوع کنید به [۱]. ■

قضیه ۳۴.۱.۱. *فرض کنیم $\{A_i, \varphi_{ij}\}_{i\in I}$ یک سیستم مستقیم از R– مدول‌ها باشد و $A = limA_i$. اگر برای هر $i \in I$، A_i یک R– مدول تخت باشد، آن‌گاه A یک R– مدول تخت است.*

برهان. رجوع کنید به [۱]. ■

۳.۱.۱ مدول‌های تصویری

تعریف ۳۵.۱.۱. R مدول P را تصویری گوییم، هرگاه به ازای هر R–مدول همریختی پوشا B : $g : A \longrightarrow B$ و R–مدول همریختی $f : P \longrightarrow B$، R مدول همریختی $h : P \longrightarrow A$ وجود داشته باشد که $gh = f$.

قضیه ۳۶.۱.۱. *هر R–مدول آزاد تصویری است.*

برهان . رجوع کنید به [۱] . ■

قضیه ۳۷.۱.۱. *گزاره‌های زیر برای R– مدول P معادل‌اند.*

۱. R *مدول* P *تصویری است.*

۲. *هر دنباله کامل کوتاه* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ *از* R– *همریختی‌ها، شکافته می‌شود؛ یعنی،* $B \cong A \otimes P$.

۳. R *مدول آزاد* F *و* R– *مدول* K *وجود دارند به طوری‌که* $F \cong K \otimes P$*؛ یعنی،* P *جمع‌وند مستقیم یک* R– *مدول آزاد است.*

برهان . رجوع کنید به [۱] . ■

۲.۱ مفاهیمی از توپولوژی

در این قسمت برخی از مفاهیم اولیه‌ی توپولوژی را یادآوری می‌کنیم که در فصل‌های دوم و سوم مورد نیاز هستند.

تعریف ۱.۲.۱. *فرض کنیم* X *یک مجموعه دلخواه (ناتهی) و* $\mathcal{P}(X)$ *مجموعه توانی آن باشد، گردایه‌ی* $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ *را یک توپولوژی روی* X *نامیم، هرگاه*

۱. $X, \emptyset \in \tau$*؛*

۲. *اگر* $A, B \in \tau$ *، آن‌گاه* $A \cap B \in \tau$. *به عبارت دیگر* τ *تحت اشتراک متناهی بسته باشد؛*

۳. *اگر برای هر* $\alpha \in S$ *داشته باشیم* $A_\alpha \in \tau$ *، آن‌گاه*

$$\bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha \in \tau.$$

به عبارت دیگر τ *تحت اجتماع دلخواه بسته باشد.*

تعریف ۲.۲.۱. *مجموعه‌ی* $A \subseteq X$ *را در* X *بسته می‌نامیم، هرگاه* $A^c \in \tau$*؛ یعنی،* A^c *در* X *باز باشد.*

مثال. *اگر X یک مجموعه‌ی دلخواه ناتهی باشد، آن‌گاه $\tau = \mathcal{P}(X)$ به وضوح توپولوژی روی X است که آن را توپولوژی گسسته می‌گوییم. در این صورت هر زیرمجموعه، باز و بسته است.*

نکته ۱.۲.۳. *فضای X گسسته است، اگر و تنها اگر هر نقطه‌اش تنها باشد.*

تعریف ۱.۲.۴. *فرض کنیم (X,τ_1) و (Y,τ_2) دو فضای توپولوژی باشند، این دو را همسان‌ریخت گوییم، هرگاه نگاشت پیوسته‌ی $f : X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد به طوری که f در تناظر یک‌به‌یک X را به توی Y برده و همچنین $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ نیز یک تابع پیوسته باشد. در این صورت می‌نویسیم $X \simeq Y$ و نگاشت f را همسان‌ریختی می‌نامیم.*

۱.۲.۱ اصول جداسازی

تعریف ۱.۲.۵. *فضای توپولوژی (X,τ) را یک فضای T_1 نامیم، هرگاه برای هر دو عضو متمایز $x,y \in X$ ، مجموعه باز U وجود داشته باشد که شامل یکی از عناصر x,y و فاقد دیگری می‌باشد.*

تعریف ۱.۲.۶. *فضای X را هاسدورف یا T_2 می‌گوییم، هرگاه برای هر $x,y \in X$ و $x \neq y$ ، دو مجموعه‌ی باز و مجزای G و H در X وجود داشته باشند که $x \in G$ و $y \in H$. به عبارت دیگر، X یک فضای هاسدورف است، هرگاه هر دو نقطه‌ی متمایز در آن را بتوان با دو مجموعه‌ی باز و مجزا از هم جدا کرد.*

تعریف ۱.۲.۷. *فضای X را منظم گوییم، هرگاه برای هر مجموعه بسته A در X و هر $x \notin A$ دو مجموعه باز مجزای H و G در X موجود باشند که $x \in G$ و $A \subseteq H$.*

قضیه ۱.۲.۸. *اگر فضای X منظم باشد، آن‌گاه برای هر مجموعه باز U در X و هر $x \in U$، مجموعه باز V در X وجود دارند که $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

برهان. رجوع کنید به [۱]. ■

تعریف ۹.۲.۱. *فضای توپولوژی X را نرمال گوییم، هرگاه برای هر دو مجموعه‌ی بسته و مجزای E و F در X دو مجموعه‌ی باز و مجزای G و H در X وجود داشته باشند به طوری که $E \subseteq G$ و $F \subseteq H$.*

تعریف ۱۰.۲.۱. *فضای توپولوژی X را کاملاً منظم گوییم در صورتی‌که، اگر F زیر مجموعه بسته X باشد و $x \in X \setminus F$، آن‌گاه $f \in C(X)$ به‌قسمی وجود داشته باشد که $f(x) = ۱$ و $f[F] = ۰$.*

قضیه ۱۱.۲.۱. *فضای هاسدورف X کاملاً منظم است، اگر و تنها اگر صفر مجموعه‌ها پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در X تشکیل بدهند.*

برهان. رجوع کنید به [۱]. ■

قضیه ۱۲.۲.۱. *فرض کنیم X یک فضای کاملاً منظم و هاسدورف باشد، هرگاه $A \subseteq X$ بسته و $B \subseteq X$ فشرده باشد و $A \cap B = \emptyset$، آن‌گاه A و B در X کاملاً مجزا خواهند بود. به عبارت دیگر تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که $f[A] = \{۰\}$ و $f[B] = \{۱\}$.*

برهان. رجوع کنید به [۱]. ■

تعریف ۱۳.۲.۱. *دو زیر مجموعه A و B از فضای توپولوژی X را کاملاً مجزا گوییم، هرگاه تابعی پیوسته مانند $f : X \longrightarrow [۰, ۱]$ موجود باشد که $f[B] = \{۱\}$ و $f[A] = \{۰\}$.*

قضیه ۱۴.۲.۱. *هر فضای کاملاً منظم، منظم است.*

برهان. اگر A در X بسته باشد و $x \notin A$ و $f : X \longrightarrow R$ پیوسته باشد و $f(A) = ۱$ و $f(x) = ۰$. کافی است G و H را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$G = f^{-۱}((\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})) \ , H = f^{-۱}((\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۲})).$$

G و H باز و مجزا هستند و $A \subseteq G$ و $x \in H$. ■