وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

عدد b-رنگی در گراف‌ها

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

حمیده نعمتی میرمحله

استاد راهنما: **دکتر علی طاهرخانی**

مرداد ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

و

شایان و آریوی عزیزم

تشکر و قدردانی

سپاس خدایی را که خدایی می‌کند بندگانی را که بندگی نمی‌کنند.

در ابتدا از پدر و مادر عزیزم که همیشه مشوق و پشتیبان من در تمام مراحل زندگی بوده‌اند و خواهران مهربانم که همیشه همراه و همدم من بوده‌اند، تشکر می‌کنم.

از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر علی طاهرخانی، به خاطر تمام راهنمایی‌ها و زحماتشان از صمیم قلب سپاسگزارم و برایشان بهترین‌ها را آرزومندم.

از جناب آقای دکتر سید عبادا... محمودیان، چهره‌ی ماندگار ریاضی ایران، که زحمت داوری این پایان‌نامه را قبول کردند بسیار سپاسگزارم و حضور ایشان در جلسه‌ی دفاع را افتخاری بزرگ برای خود می‌دانم.

از آقای دکتر منوچهر ذاکر و آقای دکتر علی فروش باستانی به خاطر قبول داوری این پایان‌نامه بسیار سپاسگزارم.

همچنین از همه‌ی کسانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده‌اند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

چکیده

رنگ‌آمیزی مجازی از گراف G را b-رنگ‌آمیزی گویند هرگاه هر کلاس رنگی دارای رأسی باشد که این رأس در تمام کلاس‌های رنگی دیگر همسایه داشته باشد. به بزرگ‌ترین عدد طبیعی k که گراف G، یک b-رنگ‌آمیزی با k رنگ داشته باشد، عدد b-رنگی گراف G گوییم و آن را با $\varphi(G)$ نشان می‌دهیم. در این پایان‌نامه به بررسی برخی ویژگی‌ها و قضیه‌ها در ارتباط با b-رنگ‌آمیزی گراف‌ها می‌پردازیم. ابتدا ارتباط بین اندازه، کمر و قطر با عدد b-رنگی در گراف‌های منتظم را مطالعه می‌کنیم. همچنین کران‌هایی را برای عدد b-رنگی زیرگراف رأس حذف شده بر حسب عدد b-رنگی گراف، اثبات می‌کنیم. سپس به بررسی عدد b-رنگی حاصل‌ضرب‌های قوی، الفبایی و مستقیم گراف‌ها می‌پردازیم. همچنین به بررسی عدد b-رنگی گراف‌های کنسر و تعیین b-طیف گراف $KG(۲n+k, n)$ می‌پردازیم. در انتها، b-پیوستگی گراف‌های منتظم را بررسی خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: *عدد b- رنگی، b- پیوستگی، گراف منتظم، حاصل‌ضرب گراف‌ها، گراف کنسر.*

فهرست

فهرست تصاویر

پیش‌گفتار

یکی از مفاهیم مهم در نظریه‌ی گراف، رنگ‌آمیزی است. منظور از رنگ‌آمیزی مجاز رأسی گراف G تابعی مانند $f : V(G) \to C$ است که برای هر یال $\{x,y\}$ از G، $f(x) \neq f(y)$. معمولاً به دنبال رنگ کردن مجاز یک گراف با کمترین تعداد رنگ ممکن هستیم. کوچک‌ترین عدد طبیعی k که گراف G رنگ‌آمیزی مجاز با k رنگ داشته باشد را عدد رنگی گراف G گوییم و آن را با نماد $\chi(G)$ نشان می‌دهیم. برای عدد داده شده‌ی n، مسئله‌ی $\chi(G) \leq n$ در حالت کلی یک مسئله‌ی NP-سخت[۱] است. یکی از الگوریتم‌های شناخته شده برای رنگ‌آمیزی گراف‌ها، الگوریتم حریصانه است. روش‌های دیگری نیز وجود دارند که در آن‌ها با تغییراتی در رنگ‌آمیزی اولیه‌ی یک گراف، تعداد رنگ‌ها را در صورت امکان کاهش می‌دهیم. یکی از این روش‌ها بدین صورت است که با یکی کردن کلاس‌های رنگی مستقل در رنگ‌آمیزی اولیه از گراف، تعداد رنگ‌ها را کاهش می‌دهیم. این روش رنگ‌آمیزی کامل نامیده می‌شود که نخستین بار توسط هرری[۲]، هدتنیمی[۳] و پرینس[۴] در سال ۱۹۶۷ معرفی شد. روش دیگری که موضوع اصلی این پایان‌نامه است، بدین صورت است که در صورت امکان رنگ‌های یک کلاس رنگی را بین کلاس‌های رنگی دیگر توزیع کنیم. بنابراین موضوع بحث، رنگ‌آمیزی‌هایی خواهند بود که این امکان برای آن‌ها وجود ندارد. رنگ‌آمیزی $f : V(G) \to C$ را یک b-رنگ‌آمیزی می‌نامیم هرگاه هر کلاس رنگی رأسی داشته باشد که این رأس در همه‌ی کلاس‌های رنگی دیگر همسایه

---

[۱] NP-hard

[۲] Harary

[۳] Hedetniemi

[۴] Prins

دارد. مفهوم b-رنگ‌آمیزی به وسیله‌ی ایروینگ[۱] و منلاو[۲] در سال ۱۹۹۹ معرفی شد. به بزرگ‌ترین عدد طبیعی k که b-رنگ‌آمیزی با k رنگ برای گراف G وجود داشته باشد، عدد b-رنگی گراف G می‌گوییم و آن را با $\varphi(G)$ نمایش می‌دهیم. ایروینگ و منلاو در [۷] ثابت کردند که در حالت کلی تعیین عدد b-رنگی گراف‌ها، مسئله‌ای NP-سخت است. گراف G را b-پیوسته گوییم هرگاه برای هر عدد طبیعی k که $\chi(G) \leq k \leq \varphi(G)$، یک b-رنگ‌آمیزی با k رنگ برای گراف G وجود داشته باشد. در فصل اول در این پایان نامه، به بیان تعاریف اولیه در گراف، نظریه‌ی رنگ‌آمیزی در گراف و مفهوم b-رنگ‌آمیزی می‌پردازیم. گراف‌های منتظم نقش مهمی را در مطالعه‌ی b-رنگ‌آمیزی دارند. کراتوچویل، توزا و ویگت در [۱۲] ثابت کردند که عدد b-رنگی هر گراف d-منتظم با $d^۴$ رأس، $d+۱$ است. در فصل دوم به بررسی کامل مقاله‌ی [۴] از کبلو و جیکواک می‌پردازیم. در این مقاله، آن‌ها نشان دادند که عدد b-رنگی هر گراف d-منتظم با حداقل $۲d^۳$ رأس برابر با $d+۱$ است. همچنین ثابت کردند که عدد b-رنگی گراف‌های منتظم با کمر ۵، دارای یک کران پایین خطی بر حسب d است. در ادامه‌ی فصل دوم مقاله‌ی [۱] از بالاکریشنان و فرانسیس راج را بررسی می‌کنیم که کران‌هایی برای عدد b-رنگی زیرگراف رأس حذف شده‌ی $G-v$ بر حسب عدد b-رنگی گراف G ثابت شده است. در فصل سوم، عدد b-رنگی حاصل‌ضرب‌های قوی، الفبایی و مستقیم که برگرفته از [۸] است را می‌آوریم. در فصل چهارم، عدد b-رنگی گراف‌های کنسر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این زمینه مقاله‌های [۲]، [۵] و [۹] را مطرح می‌کنیم. جوادی و عمومی در [۹] با استفاده از به‌کارگیری سیستم‌های سه‌گانه‌ی اشتاینر، عدد b-رنگی گراف $KG(n,۲)$ را به‌دست آوردند. همچنین آن‌ها حدس زدند که برای هر عدد صحیح و مثبت n، $\varphi(KG(m,n)) = \Theta(m^n)$. در ادامه، مقاله‌ی [۵] از حاجی ابوالحسن را بررسی می‌کنیم که در آن حدس جوادی و عمومی اثبات شده است. از بالاکریشنان و

---

۱ Irving

۲ Manlove

کاواسکار مقاله‌ی [۲] را مطالعه می‌کنیم که با محدود کردن رأس‌های گراف $KG(۲n+k,n)$، کران بالایی را برای عدد b-رنگی این گراف ثابت کردند. در انتها، به بررسی مفهوم b-پیوستگی می‌پردازیم. قضیه‌ای که b-طیف گراف $KG(۲n+k,n)$ به‌دست آمده را از مقاله‌ی [۲] مطرح می‌کنیم و همچنین b-پیوستگی در گراف‌های منتظم را بررسی خواهیم کرد.

فصل اول

مقدمه

در بخش اول این فصل تعریف‌های اولیه‌ای از نظریه‌ی گراف و آنچه که در فصل‌های بعدی این پایان‌نامه مورد نیاز است را می‌آوریم. در بخش دوم به مقدماتی از رنگ‌آمیزی گراف‌ها و مباحثی که در فصل‌های بعدی مطرح شده، اشاره می‌کنیم.

۱.۱ تعریف‌های اولیه

در سراسر این پایان‌نامه، منظور از یک گراف، گرافی ساده (بدون طوقه و یال چندگانه) با مجموعه رأس‌های متناهی و ناتهی است. همچنین مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ..., n\}$ را با نماد $[n]$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱. گرافی که در آن بین هر دو رأس یال وجود دارد را **گراف کامل** می‌نامیم. گراف کامل n رأسی را با K_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. اگر بتوان رأس‌های گراف G را به دو بخش X و Y چنان افراز کرد که یک سر هر

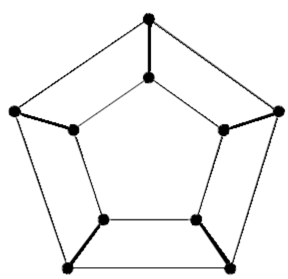
یال از G در X و سر دیگر آن در Y باشد، گراف G را **گرافی دوبخشی** می‌نامیم. گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y که در آن هر رأس X با همه‌ی رأس‌های Y مجاور است را گراف دوبخشی کامل می‌گوییم. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$، در این‌صورت گراف دوبخشی کامل روی X و Y را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. گراف G با n رأس که یک رأس آن از درجه‌ی $n - ۱$ و بقیه‌ی رأس‌ها از درجه‌ی یک باشد را **گراف ستاره** می‌نامیم و با $K_{۱,n-۱}$ نشان می‌دهیم.

برای مثال در شکل ۱.۱، نمونه‌هایی از گراف‌های ستاره آورده شده است.

شکل ۱.۱: گراف‌های ستاره.

تعریف ۴.۱.۱. رأس‌هایی از گراف که زیرگراف القایی روی آن‌ها کامل باشد را **خوشه** می‌گوییم. تعداد رأس‌های بزرگ‌ترین خوشه در گراف G را **عدد خوشه‌ای** G گوییم و آن را با $\omega(G)$ نشان می‌دهیم.



شکل ۲.۱: تطابق کامل در یک گراف.

تعریف ۵.۱.۱. یک **تطابق** در گراف G، زیرمجموعه‌ای از یال‌های G است که هیچ دو یال از آن دارای رأس مشترک نباشند. فرض کنید M یک تطابق در گراف G باشد. به رأس‌هایی که روی یال‌های M واقع شده‌اند رأس‌های M-آلوده گوییم. یک تطابق در گراف G را **تطابق کامل** گوییم هرگاه تمامی رأس‌های G توسط یال‌های تطابق آلوده شده باشند. شکل ۲.۱، یک تطابق کامل است (یال‌های پررنگ تطابق هستند).

تعریف ۶.۱.۱. به طول کوتاهترین مسیر بین دو رأس v و u در گراف، **فاصله‌ی** v و u می‌گوییم و با $d(u,v)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۱. گراف G را **همبند** گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن مسیر وجود داشته باشد.

تعریف ۸.۱.۱. گراف G را **منتظم** گوییم هرگاه درجه‌ی همه‌ی رأس‌هایش برابر باشد.

تعریف ۹.۱.۱. طول کوتاهترین دور در گراف را **کمر** گراف می‌نامند. به طول بیشترین فاصله‌ی بین دو رأس در گراف، **قطر** گراف گوییم. قطر گراف G را با $\mathrm{diam}(G)$ نشان می‌دهیم.

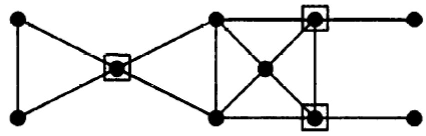
قطر گراف‌های کامل برابر با یک و قطر در گراف‌های دوبخشی کامل دو است.

تعریف ۱۰.۱.۱. به زیرمجموعه‌ی S از رأس‌های گراف، **مستقل** گوییم هرگاه هیچ یالی بین رأس‌های S واقع نشده باشد. تعداد رأس‌های بزرگ‌ترین مجموعه‌ی مستقل در گراف G را **عدد استقلال** گوییم و آن را با نماد $\alpha(G)$ نشان می‌دهیم.

مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ای از رأس‌های گراف، مجموعه‌ی **احاطه‌گر** است اگر و تنها اگر هر رأس گراف یا متعلق به A باشد و یا همسایه‌ای در A داشته باشد.

در شکل ۳.۱ مثالی از مجموعه‌ی احاطه‌گر آورده شده است (رأس‌هایی که با مربع مشخص شده‌اند).

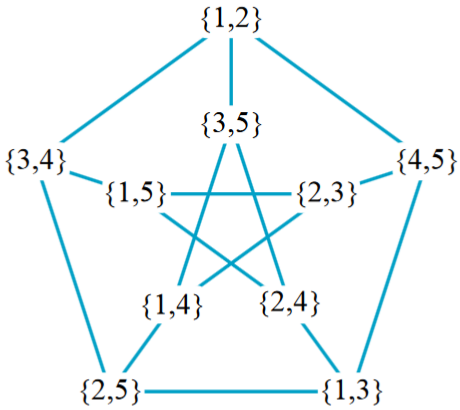
تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید $m,n \in \mathbb{N}$ و $n \geq m$. **گراف کنسر** $KG(n,m)$، گرافی است که مجموعه‌ی رأس‌های آن، مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های m عضوی از $[n]$ است. دو رأس X و Y در این گراف مجاور هستند اگر و تنها اگر $X \cap Y = \emptyset$. گراف $KG(۵,۲)$ را **گراف پترسن** می‌نامیم



شکل ۳.۱: مجموعه‌ی احاطه‌گر.

(شکل ۴.۱).

بنابر تعریف گراف کنسر، مجموعه‌های مستقل در این گراف باید عضوی مشترک داشته باشند. برای مثال همه‌ی رأس‌هایی در گراف پترسن که عضو مشترک یک را دارند، مجموعه‌ای مستقل در این گراف هستند.



شکل ۴.۱: گراف پترسن.

۲.۱ رنگ‌آمیزی گراف‌ها

همواره یکی از مفاهیم مورد توجه در نظریه‌ی گراف، مسئله‌ی رنگ‌آمیزی بوده است. از اولین مسائل رنگ‌آمیزی می‌توان به قضیه یا حدس ۴-رنگ اشاره کرد که سال‌ها اثبات نشده باقی مانده بود. حدود سال ۱۸۵۰، فرانسیس گاتری[۱] در حین رنگ‌آمیزی نقشه‌ی انگلستان متوجه شد که برای این کار چهار رنگ کافی است. این نخستین گام برای بیان مسئله‌ی ۴-رنگ بود. به بیان ساده این قضیه می‌گوید که برای رنگ کردن هر نقشه به‌طوری‌که کشورها و نواحی همسایه در نقشه هم‌رنگ نباشند فقط چهار رنگ کافی است. تلاش‌های بسیاری برای اثبات این مسئله انجام شد. در نهایت در سال ۱۹۷۶ اپل[۲] و هیکن[۳] به کمک رایانه این حدس را اثبات کردند.

تعریف ۱.۲.۱. منظور از یک **رنگ‌آمیزی مجاز رأسی** از گراف G، تابعی مانند $f : V(G) \to C$ است که برای هر یال $\{x, y\}$ از G، $f(x) \neq f(y)$. هر عضو از C را یک رنگ می‌نامیم. همچنین می‌گوییم رأس x با رنگ $c \in C$ رنگ شده است هرگاه $f(x) = c$. رأس‌های با یک رنگ تشکیل یک کلاس رنگی می‌دهند.

معمولاً به دلیل بهینه کردن امکانات، به دنبال این هستیم که یک گراف را با کمترین تعداد رنگ‌های ممکن رنگ‌آمیزی کنیم.

تعریف ۲.۲.۱. کوچک‌ترین عدد طبیعی k را که گراف G رنگ‌آمیزی مجاز با k رنگ داشته باشد **عدد رنگی** گراف G می‌نامیم و آن را با نماد $\chi(G)$ نشان می‌دهیم.

برای مثال عدد رنگی دورهای زوج و فرد به ترتیب برابر با دو و سه است. همچنین عدد رنگی گراف‌های

---

۱ Francis Guthrie

۲ Appel

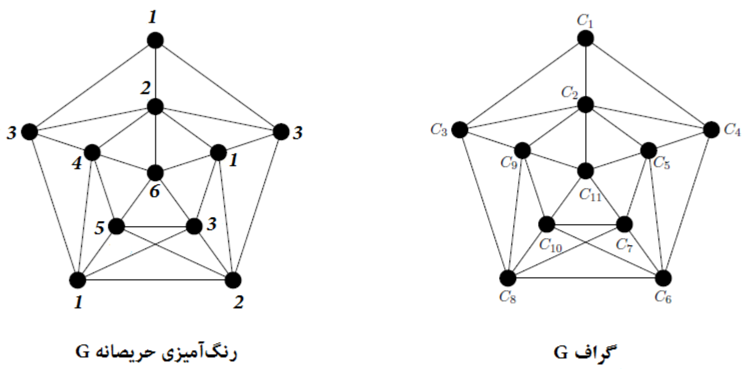
۳ Haken

K_n برابر با n است.

در واقع یک k-رنگ‌آمیزی از گراف G، افرازی از رأس‌های G به k زیرمجموعه‌ی $V_1, ..., V_k$ است به‌طوری‌که برای هر i، $1 \leq i \leq k$، مجموعه‌ی V_i مجموعه‌ای مستقل در G است.

گزاره ۳.۲.۱. *برای هر گراف G داریم*

$$\omega(G) \leq \chi(G).$$



شکل ۵.۱: رنگ‌آمیزی حریصانه.

تعریف ۴.۲.۱. ترتیب رأس‌های $v_1, ..., v_n$ از $V(G)$ را در نظر بگیرید. **رنگ‌آمیزی حریصانه** به‌وسیله‌ی رنگ‌آمیزی رأس‌ها با ترتیب $v_1, ..., v_n$ به‌دست می‌آید به‌طوری‌که به v_i کوچک‌ترین رنگی را که پیش از آن روی همسایه‌های با اندیس کوچک‌تر از i بکار نرفته را اختصاص دهیم.

برای مثال در شکل ۵.۱ رنگ‌آمیزی حریصانه‌ای برای گراف G نشان داده شده است.

برای عدد داده شده‌ی n، مسئله‌ی $\chi(G) \leq n$ در حالت کلی یک مسئله‌ی NP-سخت[۱] است. بنابراین باید به دنبال الگوریتم‌های ابتکاری برای رنگ‌آمیزی گراف‌ها باشیم. یکی از این الگوریتم‌ها

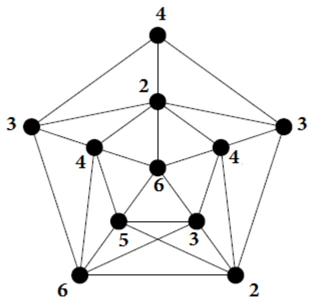
[۱] NP-hard

برای رنگ‌آمیزی گراف‌ها، الگوریتم حریصانه است.

روش‌های دیگری نیز برای کم کردن تعداد رنگ‌های بکار رفته در یک رنگ‌آمیزی وجود دارد. در سال ۱۹۶۷ هرری، هدتنیمی و پرینس در [۶] مفهوم رنگ‌آمیزی کامل را معرفی کردند (این رنگ‌آمیزی را a-رنگ‌آمیزی نیز می‌نامند). این روش مبتنی بر یکی کردن کلاس‌های رنگی مستقل و دست یافتن به رنگ‌آمیزی با تعداد رنگ‌های کمتر است.

تعریف ۵.۲.۱. رنگ‌آمیزی $f : V(G) \to C$ را یک **رنگ‌آمیزی کامل** می‌نامیم هرگاه برای هر دو عضو متمایز i و j متعلق به C، $f^{-1}(i) \cup f^{-1}(j)$ مجموعه‌ای مستقل نباشد.

تعریف ۶.۲.۱. بزرگ‌ترین عدد طبیعی k را که یک رنگ‌آمیزی کامل $f : V(G) \to [k]$ از گراف وجود داشته باشد، **عدد a-رنگی** گراف G می‌نامیم و با $\psi(G)$ نشان می‌دهیم. در واقع عدد a-رنگی نشانگر بیشترین تعداد رنگ بکار رفته برای حالتی است که نمی‌توان با یکی کردن دو کلاس رنگی، یک رنگ‌آمیزی با تعداد رنگ‌های کمتر به‌دست آورد.



شکل ۶.۱: b-رنگ‌آمیزی گراف G.

در سال ۱۹۹۹ ایروینگ و منلاو در [۷] روش دیگری را برای کمتر کردن تعداد رنگ‌های مورد استفاده برای رنگ‌آمیزی یک گراف، مورد مطالعه قرار دادند. روش آنها مبتنی بر این بود که در صورت امکان یک کلاس رنگی را بین بقیه‌ی کلاس‌های رنگی توزیع کنیم.

این روش تعمیمی از روش قبلی است و چون حرف a در ابتدای a-رنگ‌آمیزی قرار دارد اولین حرف بعد از a یعنی b برای این نوع رنگ‌آمیزی انتخاب شد.

تعریف ۱.۲.۷. رنگ‌آمیزی $f : V(G) \to C$ را یک ***b*-رنگ‌آمیزی** می‌نامیم هرگاه هر کلاس رنگی شامل رأسی باشد که در همه‌ی کلاس‌های رنگی دیگر همسایه دارد.

در گراف G، با تغییر رنگ C_1 و C_5 به رنگ ۴ و C_8 به رنگ ۶، به رنگ‌آمیزی مجازی از گراف G با پنج رنگ دست می‌یابیم که خاصیت b-رنگ‌آمیزی دارد (شکل ۱.۶).

تعریف ۱.۲.۸. فرض کنید G یک گراف و $f : V(G) \to C$ رنگ‌آمیزی از آن باشد. هر رأس از G که تمام رنگ‌های C در همسایگی بسته‌ی آن بیاید را **رأس رنگ‌احاطه‌گر** می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۹. فرض کنید G یک گراف و $f : V(G) \to C$ یک رنگ‌آمیزی از آن باشد و $c \in C$. گوییم رنگ c **نمود** پیدا می‌کند هرگاه رأسی رنگ‌احاطه‌گر با رنگ c وجود داشته باشد.

تعریف ۱.۲.۱۰. بزرگ‌ترین عدد طبیعی k را که یک b-رنگ‌آمیزی $f : V(G) \to [k]$ از گراف G وجود داشته باشد، **عدد *b*-رنگی** G می‌نامیم و با $\varphi(G)$ نشان می‌دهیم.

گراف G در شکل ۱.۶، b-رنگ‌آمیزی با شش رنگ ندارد. بنابراین داریم $\varphi(G) = 5$.

در اینجا به تعریف و مفهوم b-پیوستگی گراف‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱۱. مجموعه‌ی اعداد k را که گراف G دارای b-رنگ‌آمیزی با k رنگ باشد، b-طیف گراف G گوییم و با $S_b(G)$ نمایش می‌دهیم. گراف G را ***b*-پیوسته** می‌نامیم هرگاه

$$S_b(G) = \{k : k \in \mathbb{N}, \chi(G) \leq k \leq \varphi(G)\}.$$

یکی از خاصیت‌های جالب درباره‌ی b-رنگ‌آمیزی این است که برخلاف آنچه که معمولاً تصور می‌شود، همه‌ی گراف‌ها b-پیوسته نیستند.