

سورة الاحقاف

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه آمار

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
آمار

آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای تصادفی: نظریه و کاربرد

استاد راهنما: دکتر عیسی محمودی

استاد مشاور: دکتر حمزه ترابی

پژوهش و نگارش: بتول کارگر

مهر ماه ۱۳۹۲

تقدیم بہ

پدر و مادر

کہ تصور بچندشان، تلخی رنج را برایم بہ شیرینی رضایت تبدیل می کند.

سپاس

به نام یزدان پاک و سپاس از هر آنچه نعمت بیکران که بهره مندم ساخته است.

بنی شک به سرانجام رساندن این پایان نامه مرهون تلاش و مساعدت های بی دریغ افرادی است که گرچه ممکن است در متن کار نامی از آن ها برده نشود، اما نادیده گرفتن زحماتشان بی انصافی بزرگی است؛ آن ها که به ظاهر پشت پرده بودند اما کمک هایشان آتقدیر رنگ بود که نشان راستی ذکر شدن در اولین صفحات پایان نامه کردند. پس به رسم قدرشناسی، بر خود لازم می دانم صمیمانه ترین سپاسگزاری هایم را انتشاری چند از این عزیزان کنم؛ پیش از همه قدردان زحمات پدر و مادر و خانواده های عزیزم، ستم، آن ها که همیشه ناب ترین کلیشه های شکر بوده و هستند؛ کلیشه ای که با وجود تکرار صد باره و هزار باره باز هم بکر هستند و شایسته تقدیر. به راستی که جامه های شکر را به هر مدل و اندازه ای که دآوری باز هم برانده می قامت آن هست.

سپاسگزارم از آقای دکتر محمودی که زحمت راهنمایی این پایان نامه را به جان خریدند. بی گمان محدود کردن ایشان به دو کلمه ای "استاد" و "راهنا" کم لطفی بزرگی است که هرگز تن به آن نخواهم داد، پس سپاس بی نهایتم را انتشار ایشان می کنم به پاس "بی نهایت" بودنشان. نیز مرهون زحمات آقای دکتر ترابی، ستم، اما خالصانه و به دور از چارچوب کلیشه ای سپاس از استاد مشاور؛ چرا که از ایشان حسن خلق را آموختم که شایسته بی ریاترین تقدیر هست.

سرانجام بر خود واجب می دانم از آقای دکتر ذاکر زاده و آقای دکتر روزگار که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند و نیز سایر اساتید محترم گروه آقای دکتر دولتی، آقای دکتر جعفری و آقای میر حسینی صمیمانه شکر کنم. همچنین به رسم دوستی، سپاسگزار همه های عزیزانی، ستم که با صبر و مهربانی، اینجانب را در جهت پیشبرد طرح پیش رویاری رسانند، بویژه دوست عزیزم خانم رحمت مسکوتی.

چکیده

در بیشتر مسایل آماری، هدف این است که پس از مشاهده‌ی یک نمونه از خانواده‌ی توابع چگالی $\{f(x; \theta) : \theta \in \Theta\}$ ، در مورد پارامتر θ نتیجه‌گیری شود. در بسیاری از آن‌ها، تعداد مشاهدات، یعنی حجم نمونه قبل از بیان و انجام آزمایش تعیین شده است. اصطلاحاً به چنین تجزیه و تحلیل‌های آماری که مبتنی بر تعداد مشخصی از حجم نمونه است، تحلیل آماری با حجم نمونه‌ی ثابت گویند، اما در برخی دیگر مانند بازرسی نمونه‌ای و کنترل کیفیت لزومی به تعیین تعداد مشاهده‌ها قبل از انجام آزمایش نیست، بلکه در عمل نتایج آزمایش تعیین‌کننده‌ی حجم نمونه است؛ این چنین تجزیه و تحلیل‌های آماری به تحلیل‌های دنباله‌ای موسوم است.

در این پایان‌نامه ابتدا آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای، به همراه برخی از ویژگی‌های آن بیان می‌شود. سپس آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای تصادفی را بیان و آن را با آزمون با اندازه‌ی نمونه‌ی ثابت مقایسه می‌کنیم. در آخر نیز کاربردهایی از آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای تصادفی را با دو مثال شرح خواهیم داد.

فهرست مطالب

فهرست نمادها	ع
۱ مفاهیم و تعاریف اولیه	۵
۱.۱ تعاریف و قضایای احتمالی مورد نیاز	۶
۲.۱ آزمون فرض‌های پارامتری	۸
۱.۲.۱ پرتوان‌ترین آزمون	۹
۲.۲.۱ آزمون نسبت درست‌نمایی	۹
۳.۱ آزمون دنباله‌ای	۱۱
۲ آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای	۱۵
۱.۲ آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای	۱۶
۲.۲ ارتباط بین احتمال خطاهای نوع اول و دوم و کران‌های آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای	۱۸
۳.۲ تابع مشخصه‌ی عملگر	۲۲
۴.۲ تابع میانگین تعداد نمونه‌ها در آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای	۲۷
۵.۲ آزمون دنباله‌ای بریده شده	۳۰
۳ آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای تصادفی	۳۷
۱.۳ ساختار کلی مسأله و پرتوان‌ترین آزمون	۴۰
۲.۳ آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای تصادفی و برخی از ویژگی‌های آن	۵۴

۶۰	پایان نمونه‌گیری با احتمال یک و محاسبه‌ی گشتاورها	۱.۲.۳
	تقریب‌های والد برای تابع مشخصه‌ی عملگر و تابع میانگین حجم	۲.۲.۳
۷۰	نمونه‌ی کل	
۷۸	آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای تصادفی بریده شده	۳.۳
۸۲	کاربرد آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای تصادفی	۴.۳
۸۳	آزمون کیفیت کیسه‌های برنج	۱.۴.۳
۸۸	آزمون میانگین تعداد غلط‌های چاپی در هر صفحه	۲.۴.۳
۹۳	الف برنامه‌های کامپیوتری	
۱۱۹	ب واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی	
۱۲۵	پ واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی	
۱۳۰	مراجع	

فهرست شکل‌ها

۱۰۳	نمودار توان در برابر p برای $k = k_{min} - 1, k_{min}, k_{min} + 1$ زمانی که M_i ها توابع	
۵۱	دوجمله‌ای با پارامترهای r و p داشته باشند.	
۲۰۳	نمودار توان در برابر λ برای $k = k_{min} - 1, k_{min}, k_{min} + 1$ زمانی که M_i ها توزیع	
۵۲	پواسن با پارامتر λ داشته باشند.	
۳۰۳	نمودار توان در برابر $\frac{1}{p}$ برای $k = k_{min} - 1, k_{min}, k_{min} + 1$ زمانی که M_i ها توزیع هندسی	
۵۴	با پارامتر p داشته باشند.	
۴۰۳	نمودار k_{min} و K_{sim} ، زمانی که M_i ها توابع دو جمله‌ای با پارامترهای r و p داشته باشند. .	
۵۰۳	نمودار $OC(\theta)$ تقریبی و $OC(\theta)$ شبیه‌سازی شده، زمانی که M_i ها توابع پواسن با پارامتر λ	
۷۴	داشته باشند. ('___' $OC(\theta)$ تقریبی و '...' $OC(\theta)$ شبیه‌سازی شده).	
۶۰۳	نمودار $E_\theta[M_{(K)}]$ و $\bar{M}_{(K)}$ در برابر θ ، زمانی که M_i ها توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای 2° و	
۸۰	p داشته باشند.	
۷۰۳	نمودار $E_\theta[K]$ و $\bar{k}_{(sim)}$ در برابر θ ، زمانی که M_i ها توزیع پواسن با پارامتر λ داشته باشند. .	
۸۰۳	دانه‌های برنج در مرحله‌ی اول با توجه به جدول ۱۳۰۳ (در بین ۴۱ دانه، ۱۰ برنج معیوب وجود	
۸۶	دارد).	

فهرست جدول‌ها

۵۰	۱۰۳	k_{min} برای مثال ۵۰.۱۰۳، زمانی که M_i ها توابع دو جمله‌ای با پارامترهای p و r داشته باشند.
۵۲	۲۰۳	k_{min} برای مثال ۶۰.۱۰۳، زمانی که M_i ها توزیع پواسن با پارامتر λ داشته باشند.
۵۳	۳۰۳	k_{min} برای مثال ۷۰.۱۰۳، زمانی که M_i ها توزیع هندسی با پارامتر p داشته باشند.
۵۶	۴۰۳	پارامترهای توزیع M_i .
	۵۰۳	$M_{(K)}$ و K شبیه‌سازی شده برای $RSPRT$ زمانی که M_i ها توابع دو جمله‌ای با پارامترهای
۵۷		20° و 8° داشته باشند.
۵۸	۶۰۳	$M_{(K)}$ و K شبیه‌سازی شده برای $RSPRT$ زمانی که M_i ها توابع پواسن با پارامتر ۲ داشته باشند.
	۷۰۳	$M_{(K)}$ و K شبیه‌سازی شده برای $RSPRT$ زمانی که M_i ها توابع هندسی با پارامتر 8°
۵۸		داشته باشند.
	۸۰۳	مقادیر مورد انتظار و میانگین مقادیر شبیه‌سازی شده K و $M_{(K)}$ زمانی که M_i ها توزیع
۷۶		دو جمله‌ای با پارامترهای 20° و p داشته باشند.
	۹۰۳	مقادیر مورد انتظار و میانگین مقادیر شبیه‌سازی شده K و $M_{(K)}$ زمانی که M_i ها توزیع
۷۷		دو جمله‌ای با پارامترهای r و 5° داشته باشند.
	۱۰۰۳	مقادیر مورد انتظار و میانگین مقادیر شبیه‌سازی شده K و $M_{(K)}$ زمانی که M_i ها توزیع
۷۸		پواسن با پارامتر λ داشته باشند.
	۱۱۰۳	مقادیر مورد انتظار و میانگین مقادیر شبیه‌سازی شده K و $M_{(K)}$ زمانی که M_i ها توزیع
۷۹		هندسی با پارامتر p داشته باشند.
	۱۲۰۳	برآورد توان و احتمال خطای نوع اول برای $RSPRT$ بریده شده با \bar{k}_{sim} و $\bar{M}_{(K)}$ متناظر،
۸۲		زمانی که M_i ها به ترتیب توزیع دو جمله‌ای، هندسی و پواسن دارند.

۱۳.۳ اجرای اول از $RSPRT$ (۳۴.۳) با $\alpha = 0.10$, $\beta = 0.01$, $a_{(\alpha,\beta)} = -4,4998$ و

۸۶ $b_{(\alpha,\beta)} = 2,2925$

۱۴.۳ اجراهای مستقل، از $RSPRT$ (۳۴.۳) با $\alpha = 0.10$, $\beta = 0.01$, $a_{(\alpha,\beta)} = -4,4998$ و

۸۷ $b_{(\alpha,\beta)} = 2,2925$

۹۰ . $a_{(\alpha,\beta)} = -b_{(\alpha,\beta)} = -2,9444$ و $\alpha = \beta = 0.05$ با $RSPRT$ (۳۴.۳) اجرای اول از

۹۱ $a_{(\alpha,\beta)} = -b_{(\alpha,\beta)} = 2,9444$ و $\alpha = \beta = 0.05$ با $RSPRT$ (۳۴.۳) اجراهای مستقل، از

نمادها

فهرست نمادها

صفحه	توضیح	نماد
۱.....	آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای	$SPRT$
۳.....	آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای تصادفی	$RSPRT$
۶.....	امید ریاضی	$E[.]$
۶.....	تابع مولد گشتاور X در نقطه‌ی t	$M_X(t)$
۷.....	تابع توزیع نرمال استاندارد	$\Phi(.)$
۷.....	دارای توزیع	\sim
۷.....	همگرایی در احتمال	\xrightarrow{p}
۷.....	همگرایی در توزیع	\xrightarrow{d}
۸.....	احتمال خطای نوع اول	α
۸.....	احتمال خطای نوع دوم	β
۸.....	تابع آزمون	$\phi(.)$
۸.....	تابع توان	$\pi(\theta)$
۸.....	تابع مشخصه‌ی عملگر	$OC(\theta)$
۸.....	ناحیه پذیرش	\bar{C}
۸.....	ناحیه رد (ناحیه بحرانی)	C
۹.....	پرتوان‌ترین آزمون	MPT
۱۰.....	پرتوان‌ترین آزمون یکنواخت	$UMPT$
۱۰.....	تابع درست‌نمایی	$L(\theta; .)$

۱۰.....	نسبت درستنمایی یکنوا	MLR
۱۴.....	واریانس	$Var[.]$
۱۷.....	معرفی نماد جدید برای رابطه‌ی سمت چپ برابری	$=:$
۱۷.....	هم‌ارزی	\equiv
۲۰.....	تقریباً برابر با	\simeq
۲۷.....	میانگین تعداد نمونه‌ها	ASN
۴۲.....	نسبت درستنمایی	$\Lambda_{k,m^{(k)}}$
۴۹.....	توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای r و p	$Bin(r, p)$
۵۱.....	توزیع پواسن با میانگین ν	$Poi(\nu)$
۵۳.....	توزیع هندسی با پارامتر p	$Geo(p)$
۶۰.....	فضای احتمال	\mathcal{P}
۷۵.....	میانگین تعداد مراحل	ANS
۷۵.....	میانگین حجم نمونه‌ی کل	$ATSS$

پیشگفتار

آبراهام والد را می‌توان پیشرو در زمینه‌ی تحلیل دنباله‌ای دانست. مسئله‌ی تحلیل دنباله‌ای ابتدا در دهه‌ی ۱۹۴۰، توسط برنارد^۱ و والد^۲ [۳۳] با معرفی آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای (*SPRT*) شروع شد و سپس والد و ولفویتس^۳ [۳۴] در سال ۱۹۴۸ بهینه بودن این آزمون را ثابت کردند. آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای برای دامنه‌ی وسیعی از مسایل کاربردی به‌کار گرفته شده است. در سال‌های اخیر کاربردهای گسترده‌ای از این روش در بسیاری از عرصه‌ها مانند تشخیص فرکانس کم دستگاه‌های زیردریایی، ردیابی سیگنال‌ها، کشف به موقع تغییرات ناگهانی در سیگنال‌ها، شبیه‌سازی کامپیوتری، علوم کشاورزی، کنترل و مدیریت آفات، آزمون‌های تحصیلی و اقتصاد و دارایی وجود داشته است. پژوهش‌های فراوانی در زمینه‌ی آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای و سایر آزمون‌های دنباله‌ای توسط نویسندگانی مانند والد [۳۳] در سال ۱۹۴۷، بک هوفر و همکاران^۴ [۸] در سال ۱۹۶۸، گوش^۵ [۱۳] در سال ۱۹۷۰، سن^۶ [۲۶] در سال ۱۹۸۱، گووین دراجولا^۷ [۱۵، ۱۶] در سال‌های ۱۹۸۱ و ۲۰۰۴، سایموند^۸ [۲۷] در سال ۱۹۸۵، وایت هد^۹ [۳۵] در سال ۱۹۹۷، وودروف^{۱۰} [۳۶] در سال ۱۹۸۲ و گوش و همکاران [۱۴] در سال ۱۹۹۷ انجام گرفته است.

مقاله‌ی قابل توجهی از لای^{۱۱} [۱۸] در سال ۲۰۰۴ وجود دارد که به همراه مجموعه‌ی بزرگی از

^۱Bernard

^۲Wald

^۳Wald and Wolfowitz

^۴Bechhofer et al.

^۵Ghosh

^۶Sen

^۷Govindrajulu

^۸Siegmund

^۹Whitehead

^{۱۰}Woodroffe

^{۱۱}Lai

مباحث که پس از آن بیان شده است، بسیاری از ویژگی‌های والد را به همراه دامنه‌ی وسیعی از تحقیقات آماری همچون آزمایش‌های بالینی، ریاضیات مالی و نقص امنیت شبکه‌های رایانه‌ای معرفی کرده است.

هرچند در این پایان‌نامه، تمرکز روی تصمیم‌گیری بین دو فرضیه است، اما آزمون‌های دنباله‌ای چندفرضیه‌ای نیز وجود دارند که برخی، کاربردهای آن را بررسی کرده‌اند، از آن جمله می‌توان به آرمیتاژ^{۱۲} [۴] در سال ۱۹۵۰، لوردن^{۱۳} [۲۱] در سال ۱۹۷۷، بوم و ویراوالی^{۱۴} [۷] در سال ۱۹۹۴، تارتاکوفسکی^{۱۵} [۲۹، ۳۰] در سال ۱۹۹۸، دراگالین و همکاران^{۱۶} [۱۱، ۱۲] در سال‌های ۱۹۹۹ و ۲۰۰۰ و تارتاکوفسکی و همکاران [۳۱] در سال ۲۰۰۳، اشاره کرد. همچنین برای نگاه اجمالی بر کاربردهای ویژه‌ی روش دنباله‌ای در برخی از زمینه‌های معاصر آمار، می‌توان به مراجع زیر که همگی در سال ۲۰۰۴ به چاپ رسیده‌اند مراجعه کرد: آبراهام^{۱۷} [۳]، بارون^{۱۸} [۶]، چانگ و مارتین سیک^{۱۹} [۹]، لای [۱۹]، لی و سولانکی^{۲۰} [۲۰]، ماخوپادهای و همکاران^{۲۱} [۲۵]، تارتاکوفسکی و ویراوالی [۳۲]، یانگ^{۲۲} [۳۷] و زاکس و روگاتکو^{۲۳} [۳۸]. از دیگر کاربردهای این روش می‌توان به کشف تأثیر صدا روی پستانداران دریایی، فرآیندهای چندحالتی، سیستم‌های توزیع‌شده‌ی چندمجربایی، داده‌کاوی، آزمایش‌های بالینی، ردیابی هدف، کشف نقطه‌ی تغییر، مدیریت آفات، باغبانی علمی و مرتب‌سازی ژن‌ها اشاره کرد.

^{۱۲}Armitage

^{۱۳}Lorden

^{۱۴}Baum and Veeravalli

^{۱۵}Tartakovsky

^{۱۶}Dragalin et al.

^{۱۷}Abraham

^{۱۸}Baron

^{۱۹}Chang and Martinsek

^{۲۰}Li and Solanky

^{۲۱}Mukhopadhyay et al.

^{۲۲}Young

^{۲۳}Zacks and Rogatko

گاهی در برخی از گروه‌ها اندازه‌ی گروه نیز مانند مشاهدات خود رفتار کرده و به صورت دنباله‌ای هستند؛ در این صورت آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای تصادفی ($RSPRT$) معرفی می‌گردد. این آزمون توسط ماخوپادهای و دسیلوا^{۲۴} [۲۳] در سال ۲۰۰۸ معرفی شده است و آن را در فصل سوم شرح خواهیم داد. به طور مثال در یک جریان ترافیک، زمانی که چراغ راهنما از سبز به قرمز تغییر رنگ می‌دهد، ممکن است شخصی تعداد خودروهای متوقف شده (M_i) و تعداد خودروهای بدون چراغ ترمز سالم ($\sum_{j=1}^{M_i} X_{ij}$) را زمانی که $i = 1, 2, \dots$ ثبت کند. در این مثال باید دقت داشت که گرچه مدل دادن به M_i ها به صورت دنباله‌ای معقول است، اما در توقف همزمان خودروها ممکن است ثبت داده‌های دنباله‌ای از چراغ‌های ترمز که ۱ یا ۰، $X_{ij} = 0$ یا ۱، به طور جداگانه برای هر یک از آن‌ها امکان‌پذیر نباشد.

این پایان نامه شامل سه فصل است. در فصل اول مفاهیم و تعاریف اولیه بیان شده است. در فصل دوم، آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای مطرح و برخی از ویژگی‌های آن بررسی خواهد شد. در واپسین بخش از این فصل، آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای بریده شده بیان می‌شود. در فصل سوم، آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای تصادفی معرفی و با بهترین آزمون با اندازه نمونه‌ی ثابت مقایسه خواهد شد، همچنین آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای تصادفی بریده شده نیز مطرح می‌گردد. در انتهای همین فصل، کاربرد آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای تصادفی را با دو مثال شرح خواهیم داد.

^{۲۴}Mukhopadhyay and de Silva

فصل ۱

مفاهيم و تعاريف اوليه

مقدمه

این فصل شامل برخی از مفاهیم و تعاریف پایه‌ای مورد نیاز در این پایان‌نامه است. در ابتدا برخی از مفاهیم و قضایای اولیه‌ی احتمال بیان می‌شود. سپس آزمون فرض‌های پارامتری را تعریف کرده و پرتوان‌ترین آزمون و آزمون نسبت درست‌نمایی بیان می‌شوند. در آخر نیز آزمون دنباله‌ای به صورت کوتاه مطرح می‌گردد.

۱.۱ تعاریف و قضایای احتمالی مورد نیاز

تعریف ۱.۱.۱ (تابع مولد گشتاور) فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع $F(\cdot)$ باشد. در این صورت تابع مولد گشتاور X که با نماد $M_X(t)$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x), & X \text{ گسسته} \\ \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f(x) dx, & X \text{ پیوسته} \end{cases}$$

هرگاه $h > 0$ موجود باشد به طوری که امید ریاضی برای هر مقدار t در بازه $(-h, h)$ وجود داشته باشد. اگر امید ریاضی در یک همسایگی صفر موجود نباشد آنگاه می‌گوییم تابع مولد گشتاور X وجود ندارد.

تعریف ۲.۱.۱ (همگرایی در احتمال) دنباله‌ی $\{X_n, n \geq 1\}$ از متغیرهای تصادفی را در احتمال همگرا به متغیر تصادفی X می‌گویند، هرگاه برای هر $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0,$$

و آن را با نماد $X_n \xrightarrow{P} X$ نشان می‌دهند.

تعریف ۳.۱.۱ (همگرایی در توزیع) دنباله‌ی $\{X_n, n \geq 1\}$ را در توزیع به X همگرا گویند، هرگاه برای همه‌ی نقاط پیوستگی $F(\cdot)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

و آن را با نماد $X \xrightarrow{d} X_n$ نشان می‌دهند.

قضیه ۴.۱.۱ (قضیهی حد مرکزی) فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع باشد به طوری که $E[X_n] = \mu$ و $Var(X_n) = \sigma^2 < \infty$ و $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ در این صورت

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1).$$

زمانی که $n \rightarrow \infty$.

قضیه ۵.۱.۱ (قضیهی حد مرکزی تصادفی انسکامب^۱) فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین \circ و واریانس $\sigma^2 < \infty$ باشد و $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ هم‌چنین فرض کنید $N(t) (t > \circ)$ متغیر تصادفی صحیح و مثبت باشد. اگر برای $\circ < \theta < \infty$ ، $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{p} \theta$ ، آنگاه

$$\frac{S_{N(t)}}{\sigma\sqrt{N(t)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1),$$

و

$$\frac{S_{N(t)}}{\sigma\sqrt{\theta t}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1),$$

زمانی که $t \rightarrow \infty$.

تعریف ۶.۱.۱ (نرمال مجانبی) دنباله‌ای $\{X_n, n \geq 1\}$ از متغیرهای تصادفی مستقل را دارای توزیع مجانبی نرمال گویند، هرگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} < t\right) = \Phi(t),$$

که $\Phi(t)$ تابع توزیع نرمال استاندارد است. در این حالت μ_n و σ_n^2 را به ترتیب، میانگین مجانبی و واریانس مجانبی X_n می‌نامند.

^۱Anscombe

۲.۱ آزمون فرض‌های پارامتری

متغیر تصادفی X را که توزیع آن به پارامتر θ بستگی دارد در نظر بگیرید، پارامتر θ مقداری ثابت اما مجهول است. در آزمون فرض‌های پارامتری دو فرضیه در مورد θ در برابر یکدیگر قرار می‌گیرند. برای تشکیل فرض‌های آماری، فضای پارامتر Θ را به دو زیرمجموعه‌ی جدای Θ_0 و Θ_1 تفکیک کرده، که در آن $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ و $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ ، و H_0 و H_1 را به ترتیب با $\theta \in \Theta_0$ و $\theta \in \Theta_1$ متمایز می‌کنیم. اگر Θ_0 یا Θ_1 تک عضوی باشد، آنگاه فرض نظیر آن را ساده و در غیر این صورت مرکب می‌خوانند. آزمون به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 & \text{فرض صفر} \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 & \text{فرض مقابل} \end{cases} \quad (1.1)$$

اینک تعاریف زیر را که برگرفته از مراجع [۱، ۲] هستند، بیان می‌کنیم.

$$\text{تعریف ۱.۲.۱} \quad \phi(x) = \begin{cases} 1 & x \in C \\ 0 & x \in \bar{C} \end{cases}$$

برای آزمون فرض (۱.۱) با تابع آزمون $\phi(x)$ تابع توان، تابع عملکرد (تابع مشخصه‌ی عملگر)، احتمال خطای نوع اول، احتمال خطای نوع دوم و توان به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\pi(\theta) = P_\theta(H_0 \text{ درست}) = P_\theta(X \in C) = E_\theta[\phi(X)],$$

$$OC(\theta) = P_\theta(H_1 \text{ درست}) = 1 - P_\theta(X \in C) = 1 - E_\theta[\phi(X)] = 1 - \pi(\theta),$$

$$\alpha = P_{H_0}(X \in C),$$

$$\beta = P_{H_1}(X \in \bar{C}),$$

و

$$\begin{aligned} \pi &= P(H_0 \text{ درست} | H_0) \\ &= 1 - \beta. \end{aligned}$$

تعریف ۲.۲.۱ برای آزمون فرض (۱.۱)، آزمون ϕ یک آزمون در سطح α نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\theta \in \Theta_0$,

$$E_{\theta}[\phi(X)] \leq \alpha,$$

و آن را آزمون به اندازه α می‌نامند هرگاه

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} E_{\theta}[\phi(X)] = \alpha.$$

۱.۲.۱ پرتوان‌ترین آزمون

همان‌گونه که قبلاً بیان شد با توجه به این نکته که فضای پیشامد فرض صفر و فرض مقابل تک عضوی باشد یا نه، آزمون‌ها به دو دسته‌ی ساده و مرکب تقسیم‌بندی می‌شوند. اینک می‌توان با توجه به لم نیمن-پیرسون پرتوان‌ترین آزمون (MPT) را برای آزمون فرض‌های ساده تعریف کرد.

لم ۳.۲.۱ (لم نیمن-پیرسون) فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه‌ی تصادفی از تابع چگالی $f(x; \theta)$ باشد. هدف انجام آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ در برابر $H_1: \theta = \theta_1$ است. برای آزمون در برابر H_1 ، اگر تابع آزمون ϕ برای هر $0 \leq k < \infty$ به صورت زیر تعریف شود:

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & f(\mathbf{x}; \theta_1) > k f(\mathbf{x}; \theta_0) \\ \gamma & f(\mathbf{x}; \theta_1) = k f(\mathbf{x}; \theta_0) \\ 0 & f(\mathbf{x}; \theta_1) < k f(\mathbf{x}; \theta_0), \end{cases} \quad (2.1)$$

که در آن $E_{\theta_0}[\phi(\mathbf{X})] = \alpha$ ، آنگاه ϕ پرتوان‌ترین آزمون در سطح α برای آزمون فرض H_0 در برابر H_1 است [۲].

۲.۲.۱ آزمون نسبت درستنمایی

فرض کنید، فرضیه‌های آزمون مرکب باشند. برای انجام چنین آزمونی ابتدا خاصیت نسبت درستنمایی یکنوا را تعریف می‌کنیم.