



دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته  
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

# حل عددی رده‌ای از معادلات انتگرال جبری روی فضای چندجمله‌ای‌های تکه‌ای

استادان راهنما

صداقت شهراد و غلامرضا حجتی

پژوهشگر

بابک شیری

مرداد ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: شیری

نام: بابک

عنوان: حل عددی رده‌ای از معادلات انتگرال جبری روی فضای چندجمله‌ای‌های تکه‌ای

استادان راهنما: صداقت شهمراد و غلامرضا حجتی

مقطع تحصیلی: دکتری

رشته: ریاضی کاربردی

گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: تبریز

دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: مرداد ۱۳۹۲

تعداد صفحات: ۱۴۱

واژگان کلیدی: معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات انتگرال نوع اول، معادلات انتگرال نوع دوم، روش‌های هم‌محلی، فضای چندجمله‌ای‌های تکه‌ای، معادلات انتگرال جبری، معادلات دیفرانسیل جبری.

### چکیده

معادله‌ی انتگرال جبری یک دستگاه از معادلات انتگرال ولترا است. با تعریف شاخص، این معادلات طبقه‌بندی شده، مطالعه و تحلیل جوابهای دقیق و عددی این معادلات امکان‌پذیر می‌شود. معادلات انتگرال نوع دوم، معادلات انتگرال نوع اول و ترکیبی از آنها، نمونه‌هایی از معادلات انتگرال جبری با شاخص‌های متفاوت هستند.

تحلیل و بررسی معادلات انتگرال جبری هسنبرگ از شاخص دو، سوال پژوهشی ارائه شده توسط هرمان برونر بود که در این رساله آن را برای هر شاخص دلخواه در فضای چندجمله‌ای‌های تکه‌ای پیوسته و ناپیوسته به صورت جامع و کامل تحلیل می‌کنیم. در راستای این تحلیل، بازنگری اساسی در تعریف‌های شاخص انجام داده و شاخص رتبه-درجه را معرفی خواهیم کرد. همچنین برای بیان قضیه‌های همگرایی و مرتبه‌ی همگرایی روش‌های هم‌محلی برای معادلات انتگرال جبری از شاخص دلخواه، مفهوم جدیدی از آنالیز اختلال را معرفی خواهیم کرد. سپس این مفاهیم را از حالات خطی به غیرخطی تعمیم می‌دهیم. برای توصیف معادلات غیرخطی تعریف‌ها و رده‌بندی‌های اجتناب‌ناپذیر جدیدی را معرفی می‌کنیم. نتایج حاصل از این رساله، نه تنها معادلات انتگرال جبری بلکه معادلات دیفرانسیل جبری را هم تحت تاثیر قرار می‌دهد. در انتها با معرفی جعبه ابزار جدید، کاربردهای مهمی از نتایج این رساله را برای معادلات دیفرانسیل جبری ارائه خواهیم داد.

تقدیم به همه آنهایی که

می خوانند بیشتر بدانند

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

بگو: بیاید تا آنچه را که پروردگارتان بر شما حرام کرده است را بخوانم:

۱. به خدا شرک میاورید.
۲. به پدر و مادر خود کینگی کنید.
۳. از بیم درویشی فرزندان خود را کمشید یا به شما و ایشان روزی می‌دهیم.
۴. به کارهای زشت چه پنهان و چه آشکار نزدیک نشوید.
۵. و کسی را که خدا کشتش را حرام کرده است مگر به حق نکشید. اینهاست آنچه خدا شمار بدان سفارش می‌کند، شاید که به عقل بیایید.
۶. و به مال یتیم جز به نحوی که نیکوتر است نزدیک نشوید، تا اینکه به حد بلوغ خود برسید.
۷. و پیمان و ترازو را به عدل و انصاف، تمام بدهید. مگر کسی جز به اندازه‌ی توانش تکلیف نمی‌کنیم.
۸. هرگاه سخن گوید عادلانه گوید هر چند درباره‌ی خویشاوندان باشد.
۹. به عهد خدا وفا کنید. این است آنچه خدا شمار بدان سفارش می‌کند، باشد که نپذیرید.
۱۰. و این است راه راست من. از آن پیروی کنید و به راه‌های گوناگون نروید که شمار از راه خدا پرکنده سازد. این است آنچه خدا شمار بدان سفارش می‌کند، باشد که با تقوی شوید.

سوره‌ی انعام آیات ۱۵۱ تا ۱۵۳

# پیشگفتار

دستگاه معادلات انتگرال جبری، یک رده‌ی خاص از دستگاه معادلات انتگرال ولترا است. این رده شامل دستگاه معادلات انتگرال نوع دوم و نوع اول است. اولین پژوهش در این رابطه در کارهای چيستياکف<sup>۱</sup> [۱۶] و گيیر<sup>۲</sup> [۲۰] در فاصله سال‌های ۱۹۸۷-۱۹۹۰ دیده می‌شود. گيیر و چيستياکف شاخص ديفرانسیل را معرفی کردند. گيیر همچنین روند کاهش شاخص را در مقاله‌ی مهم [۲۰] معرفی کرد. همچنین اختصار IAE اولین بار در این مقاله ظاهر شده است. بولاتف<sup>۳</sup> شاگرد چيستياکف شاخص چپ را برای اولین بار معرفی کرد. اولین روش عددی توسط کائوتن<sup>۴</sup> ارائه شده است [۳۲]. کائوتن حل رده‌ای از معادلات انتگرال جبری از شاخص یک را با استفاده از چندجمله‌ای‌های تکه‌ای مورد مطالعه قرار داده است. شاید مهمترین کار در زمینه‌ی معادلات انتگرال جبری، فصل آخر کتاب برونر<sup>۵</sup> [۵] است. برونر در این کتاب اشاره می‌کند که تقریباً آنالیز معادلات انتگرال و انتگرال ديفرانسیل به پایان رسیده است و فصل بعدی مطالعات آینده مطالعه‌ی معادلات انتگرال جبری خواهد بود. همچنین برونر، تعمیم شاخص کنترلی را در این کتاب می‌آورد.

تحلیل بررسی معادلات انتگرال جبری هسنبرگ از شاخص دو، سوال پژوهشی ارائه شده توسط برونر بود که ما توانستیم آن را برای هر شاخص دلخواه در فضاهاى مجزای پیوسته و ناپیوسته به صورت جامع و کامل تحلیل کنیم. در راستای این تحلیل بود که بازنگری اساسی در تعاریف شاخص انجام دادیم و شاخص رتبه-درجه را معرفی کردیم. همچنین برای بیان قضیه‌های همگرایی و مرتبه‌ی همگرایی روش‌های هم محلی برای معادلات انتگرال جبری از شاخص دلخواه مفهوم جدیدی از تحلیل اختلالی را معرفی و قضیه‌های مربوط را بیان کردیم. سپس مفاهیم را از حالات خطی به غیرخطی تعمیم دادیم. برای توصیف معادلات غیرخطی تعریف‌ها و رده‌بندی‌های اجتناب ناپذیر جدیدی را معرفی کردیم. نتایج حاصل از این رساله، نه تنها معادلات انتگرال جبری بلکه معادلات ديفرانسیل جبری را هم تحت تاثیر قرار داده است. در انتها با معرفی جعبه ابزار جدید کاربردهای مهمی از نتایج این رساله را ارائه دادیم.

این رساله در قالب پنج فصل تنظیم شده است.

در فصل اول، معادلات انتگرال جبری و ديفرانسیل جبری معرفی می‌شود. سپس، مفهوم شاخص در معادلات ديفرانسیل جبری و انتگرال جبری مطالعه می‌شود. شاخص‌های موجود معرفی و شاخص‌های جدید تعمیم و یا معرفی می‌شوند. تا حد ممکن در رابطه با ارتباط میان شاخص‌ها بحث می‌شود. با توجه به شاخص جدید رتبه-درجه شرایط وجود و یکتایی جواب معادلات انتگرال جبری تحت قضیه‌هایی بیان و ثابت می‌شود و سپس در انتهای فصل قضیه‌های مقدماتی لازم برای فصل‌های دیگر مانند نامساوی گرانوال بیان می‌شوند و

<sup>۱</sup>Chistyakov

<sup>۲</sup>Gear

<sup>۳</sup>Bulatov

<sup>۴</sup>Kauthen

<sup>۵</sup>Brunner

یا تعمیم داده می‌شوند.

در فصل دوم، فضاهاى چندجمله‌ای‌هاى تکه‌ای معرفی می‌شوند. حل معادلات انتگرال جبری خطی با استفاده از روش‌هاى هم‌محلى روى فضاهاى چندجمله‌ای‌هاى تکه‌ای ناپيوسته بررسی می‌شود. سپس قضیه‌هاى همگرایی و مرتبه‌ی همگرایی روش‌هاى هم‌محلى روى معادلات انتگرال جبری خطی هسنبرگ از شاخص دلخواه بیان می‌شود. همچنین آزمایش‌هاى عددی برای نشان دادن درستی قضیه‌هاى بیان شده، مهیا می‌شوند. در فصل سوم، تحلیل همگرایی روش‌هاى هم‌محلى روى فضای چندجمله‌ای‌هاى تکه‌ای پیوسته برای معادلات انتگرال جبری خطی هسنبرگ از شاخص دلخواه انجام می‌شود. همچنین آزمایش‌هاى عددی برای نشان دادن درستی قضیه‌هاى بیان شده، مهیا می‌شوند.

فصل چهارم، به معادلات غیرخطی اختصاص داده می‌شود. تحلیل همگرایی و مرتبه‌ی روش‌هاى فصل دوم و سوم در این فصل بررسی می‌شود. همچنین تعاریف جدید برای مطالعه در معادلات غیرخطی این فصل ارائه می‌شود.

در فصل آخر، با توجه به نتایج همگرایی سه فصل پیش، این روش‌ها برای معادلات انتگرال جبری، بهینه شده و نرم‌افزاری برای کاربردهاى عملی ارائه می‌گردد. نمونه‌هاى مهم از کاربردهاى نتایج این رساله در حل معادلات آونگ ساده، انرژی جنبشی ترکیبات شیمیایی، معادله‌ی وندریل و معادلات حاصل از تقویت کننده‌هاى دو ترانزیستوری و یک ترانزیستوری بیان می‌شوند.

مقالاتی که از این رساله مستخرج شده‌اند، به شرح زیرند:

B. Shiri, S. Shahmorad and G. Hojjati, *Convergence analysis of piecewise continuous collocation methods for higher index integral algebraic equations of Hessenberg type*. Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., **232**, 341-355, (2013).

B. Shiri, S. Shahmorad and G. Hojjati, *Numerical solution of DAEs using their IAE's structure: simple pendulum, Robertson problem, and transistor amplifier*. Mathematical Modelling and Analysis, submitted.

B. Shiri, *Numerical solution of higher index nonlinear integral algebraic equations of Hessenberg type using discontinuous collocation methods*. Mathematical Modelling and Analysis, submitted.

# فهرست مطالب

ر	فهرست شکل‌ها
ژ	فهرست جدول‌ها
۱	۱ پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی
۲	۱.۱ مقدمه
۲	۲.۱ معادلات انتگرال جبری
۳	۳.۱ معادلات دیفرانسیل جبری
۳	۴.۱ تعریف‌های شاخص برای معادلات دیفرانسیل جبری
۴	۱.۴.۱ شاخص دیفرانسیل
۵	۲.۴.۱ شاخص اختلالی
۶	۳.۴.۱ شاخص سراسری
۶	۴.۴.۱ شاخص کنترلی
۷	۵.۱ تعریف‌های شاخص برای معادلات انتگرال جبری
۷	۱.۵.۱ شاخص دیفرانسیل
۸	۲.۵.۱ روند کاهش شاخص
۱۰	۳.۵.۱ شاخص اختلالی
۱۱	۴.۵.۱ شاخص چپ
۱۲	۶.۱ تعمیم و ارائه‌ی تعریف‌های جدید شاخص
۱۳	۱.۶.۱ شاخص عملگر
۱۳	۲.۶.۱ شاخص رتبه-درجه
۱۴	۳.۶.۱ شاخص کنترل و شاخص سراسری
۱۴	۷.۱ قضیه‌ی وجود و یکتایی جواب معادلات انتگرال جبری
۱۷	۸.۱ ارتباط بین شاخص‌ها

۲۱	۹.۱	معادلات دیفرانسیل جبری هسنبرگ
۲۲	۱۰.۱	معادلات انتگرال جبری هسنبرگ
۲۲	۱۱.۱	نامساوی گرانوال و تعمیم آن
۲۴	۱۲.۱	قضیه‌های همواری جواب معادلات انتگرال ولترای نوع اول و دوم
۲۴	۱۳.۱	خطای چند جمله‌ای درونیاب
۲۶	۲	روش‌های هم‌محلی روی فضای چند جمله‌ای‌های تکه‌ای ناپیوسته
۲۷	۱.۲	مقدمه
۲۷	۲.۲	فضای چند جمله‌ای‌های تکه‌ای
۲۸	۳.۲	معرفی روش‌های هم‌محلی
۲۹	۴.۲	پیاپیاده‌سازی روش هم‌محلی برای معادلات انتگرال جبری خطی روی فضای $S_{m-1}^{(-1)}(I_h)$
۳۱	۵.۲	قضیه‌های همگرایی و فوق همگرایی برای معادلات از شاخص ۱
۳۱	۶.۲	آنالیز اختلالی برای معادلات انتگرال ولترای نوع اول
۳۱	۱.۶.۲	آنالیز اختلالی برای روش هم‌محلی بدون گسسته‌سازی
۳۷	۲.۶.۲	آنالیز اختلالی برای روش هم‌محلی با گسسته‌سازی
۳۸	۷.۲	شاخص معادلات انتگرال جبری هسنبرگ
۴۰	۸.۲	تحلیل همگرایی برای معادلات انتگرال جبری هسنبرگ از شاخص دلخواه
۴۰	۱.۸.۲	روش هم‌محلی بدون گسسته‌سازی
۴۲	۲.۸.۲	روش هم‌محلی با گسسته‌سازی
۴۳	۹.۲	آزمایش‌های عددی
۴۷	۳	روش‌های هم‌محلی روی فضای چند جمله‌ای‌های تکه‌ای پیوسته
۴۸	۱.۳	مقدمه
۴۸	۲.۳	پیاپیاده‌سازی روش هم‌محلی برای معادلات انتگرال جبری خطی روی فضای $S_m^{(0)}(I_h)$
۵۰	۳.۳	آنالیز اختلالی برای معادلات انتگرال ولترای نوع اول
۵۱	۱.۳.۳	آنالیز اختلالی برای روش هم‌محلی پیوسته بدون گسسته‌سازی
۵۶	۲.۳.۳	آنالیز اختلالی برای روش هم‌محلی با گسسته‌سازی
۵۷	۴.۳	تحلیل همگرایی برای معادلات انتگرال جبری هسنبرگ از شاخص دلخواه
۵۷	۱.۴.۳	روش هم‌محلی بدون گسسته‌سازی
۶۰	۲.۴.۳	روش هم‌محلی با گسسته‌سازی
۶۱	۵.۳	به طور قوی معادل
۶۳	۱.۵.۳	قضیه‌های همگرایی معادلات به طور قوی معادل با شکل هسنبرگ



۶۵	.....	۶.۳	آزمایش‌های عددی
۶۷	.....	۷.۳	مقایسه با روش‌های دیگر
۷۲		۴	معادلات انتگرال جبری غیرخطی
۷۳	.....	۱.۴	مقدمه
۷۳	.....	۲.۴	تعمیم شاخص
۷۴	.....	۳.۴	پایه سازی روش هم‌محلی روی فضای $S_m^{(0)}(I_h)$ و $S_{m-1}^{(-1)}(I_h)$
۷۵	.....	۱.۳.۴	پایه سازی روش هم‌محلی روی فضای $S_{m-1}^{(-1)}(I_h)$
۷۶	.....	۲.۳.۴	پایه سازی روش هم‌محلی روی فضای $S_m^{(0)}(I_h)$
۷۷	.....	۴.۴	قضیه‌های همگرایی برای معادلات هسنبرگ غیرخطی
۷۷	.....	۱.۴.۴	معرفی معادلات هسنبرگ غیرخطی
۷۸	.....	۲.۴.۴	قضایای همگرایی
۸۰	.....	۵.۴	آزمایش‌های عددی
۸۳	.....	۶.۴	بحثی در وابستگی شاخص به جواب و طبقه‌بندی‌های جدید
۸۵	.....	۷.۴	آزمایش‌های عددی
۹۲		۵	کاربرد معادلات انتگرال جبری
۹۳	.....	۱.۵	مقدمه
۹۳	.....	۲.۵	پایه‌سازی روش‌های هم‌محلی برای معادلات دیفرانسیل جبری
۹۵	.....	۳.۵	راهنمای استفاده از جعبه ابزار معادلات دیفرانسیل جبری
۹۵	.....	۱.۳.۵	دستور constDCCM
۹۶	.....	۲.۳.۵	دستور DAEDCCM
۹۷	.....	۴.۵	معادله‌ی وندریل
۱۰۲	.....	۵.۵	آونگ ساده
۱۰۳	.....	۶.۵	مسئله‌ی رابرتسن
۱۰۷	.....	۷.۵	تقویت کننده‌ها
۱۰۷	.....	۱.۷.۵	تقویت کننده‌ی یک ترانزیستوری
۱۱۰	.....	۲.۷.۵	تقویت کننده‌ی دو ترانزیستوری
۱۱۴		۶	نتیجه‌گیری و پیشنهاد برای کارهای آتی
۱۱۷		آ	برنامه‌های متلب
۱۱۸	.....	۱.آ	برنامه‌ی constDCCM

۱۲۲	..... برنامه‌ی DAEDCCM	۲.آ
۱۲۷	..... برنامه‌ی آونگ ساده	۳.آ
۱۲۸	..... برنامه‌ی مسئله‌ی ربرتسون	۴.آ
۱۲۹	..... برنامه‌ی تقویت‌کننده‌های دو ترانزیستوری	۵.آ
۱۳۳		کتاب‌نامه
۱۳۶		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۳۸		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

## فهرست شکل‌ها

۱.۳	روش هم‌محلی گسسته در فضای پیوسته با $c = [0, 0/35, 0/8, 0/95]$ ، در مثال ۱: تابع‌های رسم شده مقادیر $\log(\ e(h)\ )$ نسبت به $\log(h)$ برای مولفه‌های مختلف است. نمادهای جمع، پنج‌ضلعی و ستاره به ترتیب برای مولفه‌های اول تا سوم به کار برده شده است. خطوط کشیده شده به ترتیب دارای شیب‌های ۴، ۳ و ۲ هستند. . . . .	۶۶
۱.۴	جواب دقیق و عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری با ساختار آزاد مستقل مثال ۱.۷.۴ .	۸۷
۲.۴	جواب دقیق و عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری با ساختار آزاد مستقل مثال ۱.۷.۴ . این مثال نشان می‌دهد که بعد از نقطه‌ی بحرانی $t = \pi/2$ جواب عددی به جواب دقیق همگرا نمی‌شود. نتایج عددی با استفاده از دستور 'ode15s' با مقادیر $'RelTol' = 1e-6$	
۸۸	و $'AbsTol' = [1e-8, 1e-8]$ به دست آمده است. . . . .	
۳.۴	جواب دقیق و عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری با ساختار آزاد مستقل مثال ۱.۷.۴ .	۸۹
۴.۴	جواب دقیق و عددی دستگاه معادلات انتگرال جبری با ساختار آزاد مستقل مثال ۲.۷.۴ .	۹۰
۵.۴	جواب دقیق و عددی دستگاه معادلات انتگرال جبری با ساختار آزاد مستقل مثال ۲.۷.۴ . این مثال نشان می‌دهد که بعد از نقطه‌ی بحرانی $t = \pi/2$ جواب عددی به جواب دقیق همگرا نمی‌شود. . . . .	۹۱
۱.۵	مدار RLC . . . . .	۹۸
۲.۵	نمودارهای حل معادله‌ی واندربیل به ازای $\mu = 0.5$ . . . . .	۹۹
۳.۵	نمودارهای حل معادله‌ی واندربیل به ازای $\mu = 1$ . . . . .	۹۹
۴.۵	نمودارهای حل معادله‌ی واندربیل به ازای $\mu = 4$ . . . . .	۱۰۰
۵.۵	نمودارهای حل معادله‌ی واندربیل به ازای $\mu = 7$ . . . . .	۱۰۰
۶.۵	آونگ ساده . . . . .	۱۰۲
۷.۵	مختصات دکارتی و سرعت جرم متصل به آونگ با استفاده از روش ۱ و $N = 1000$ و	
۱۰۵	$m = 3$ . . . . .	

- ۸.۵ مسئله‌ی رابرتسن با  $N = 2000$ ، (a) با روش ۱ (b) با روش ۲ . . . . . ۱۰۷
- ۹.۵ تقویت کننده‌ی یک ترانزیستوری . . . . . ۱۰۸
- ۱۰.۵ حل عددی تقویت کننده‌ی یک ترانزیستوری با استفاده از روش ۱ و  $N = 500$  . . . . . ۱۱۰
- ۱۱.۵ تقویت کننده‌ی دو ترانزیستوری . . . . . ۱۱۱
- ۱۲.۵ حل تقویت کننده‌ی دو ترانزیستوی با استفاده از روش DAEDCCM با  $c = [0, 35, 85, 9]$  و  $N = 400$  . . . . . ۱۱۲

## فهرست جدول‌ها

۱.۲	خطای روش هم‌محلی گسسته مثال ۱.۹.۲ در نقاط $t_{N,3}, t_{N,2}, t_{N,1}$ با مقادیرهای مختلف $N$ . . . . .	۴۴
۲.۲	مرتب‌بندی همگرایی روش هم‌محلی گسسته مثال ۱.۹.۲. حرف $p$ برای نشان دادن مرتبه، به کار برده شده است. . . . .	۴۴
۳.۲	خطای روش هم‌محلی گسسته مثال ۲.۹.۲ با $N$ های متفاوت. . . . .	۴۵
۴.۲	مرتب‌بندی همگرایی روش هم‌محلی گسسته مثال ۲.۹.۲. حرف $p$ برای نشان دادن مرتبه، به کار برده شده است. . . . .	۴۶
۱.۳	خطای روش هم‌محلی پیوسته برای مثال ۲ در نقاط هم‌محلی $t_{N,4}, \dots, t_{N,1}$ . . . . .	۶۸
۲.۳	مرتب‌بندی همگرایی روش هم‌محلی پیوسته برای مثال ۲. حرف $p$ برای نشان دادن مرتبه، به کار برده شده است. . . . .	۶۸
۳.۳	ماکزیمم خطای حاصل از روش هم‌محلی پیوسته با $h = 1$ (که با $\ e_i\ $ به ازای $i = 1, 2, 3$ نشان می‌دهیم) و خطای گزارش شده توسط هادیزاده و همکارانش [۲۴] (که با $\ \tilde{e}_i\ $ به ازای $i = 1, 2, 3$ نشان می‌دهیم). پارامتر $ct$ زمان محاسبه‌ی روش هم‌محلی را نشان می‌دهد. . . . .	۷۰
۴.۳	ماکزیمم خطای حاصل از روش هم‌محلی پیوسته با $m = 7$ و مقادیر مختلف $h$ . . . . .	۷۰
۵.۳	ماکزیمم خطای حاصل از روش هم‌محلی پیوسته با $6 = m$ . . . . .	۷۰
$c = [0, 0.13, 0.36, 0.77, 0.84, 0.93, 1]$		
۷۱	و مقادیر مختلف $h$ . . . . .	۷۱
۱.۴	خطای روش هم‌محلی گسسته روی فضای $S_{m-1}^{(-1)}(I_h)$ برای مقادیر مختلف $N$ . . . . .	۸۱
۲.۴	مرتب‌بندی روش هم‌محلی گسسته روی فضای $S_{m-1}^{(-1)}(I_h)$ مثال ۱.۵.۴. . . . .	۸۱
۳.۴	ماکزیمم خطای مولفه‌های مختلف و مرتبه‌ی آنها برای مقادیر مختلف $N$ . . . . .	۸۲
۱.۵	نتایج عددی حل معادله‌ی واندربیل در $t = 124$ . . . . .	۱۰۱

۲.۵	نتایج عددی مسئله‌ی آونگ ساده برای مولفه‌ی $x_1(t)$ با $N = 1000$ . . . . .	۱۰۴
۳.۵	نتایج عددی مسئله‌ی آونگ ساده برای مولفه‌ی $x_2(t)$ با $N = 1000$ . . . . .	۱۰۴
۴.۵	نتایج عددی مسئله رابرتسن برای مولفه‌ی $y_1(t)$ . . . . .	۱۰۶
۵.۵	نتایج عددی مسئله رابرتسن برای مولفه‌ی $y_2(t)$ . . . . .	۱۰۶
۶.۵	نتایج عددی مسئله رابرتسن برای مولفه‌ی $y_3(t)$ . . . . .	۱۰۶
۷.۵	نتایج عددی برای مولفه‌ی $U_4(t)$ تقویت کننده‌ی یک ترانزیستوری . . . . .	۱۰۹
۸.۵	نتایج عددی برای مولفه‌ی $U_5(t)$ تقویت کننده‌ی یک ترانزیستوری . . . . .	۱۰۹
۹.۵	مقایسه‌ی نتایج عددی روش هم‌محلی و گزارش شده در [۵۲] در نقطه‌ی $t = 0.2$ . . . . .	۱۱۳

## فصل ۱

# پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی

## ۱.۱ مقدمه

این رساله با مروری بر مفاهیم مقدماتی و مورد نیاز در فصل‌های آتی شروع می‌شود. تعریف شاخص مهمترین آنها است. سپس تعمیم، ارائه‌ی تعریف‌های جدید شاخص مورد توجه واقع می‌شود. همچنین در سرتاسر این رساله فرض می‌شود توابع تشکیل دهنده‌ی دستگاه‌های معادلات، با توجه به تعریف‌ها و قضیه‌ها، به حد کافی مشتق‌پذیر باشند.

## ۲.۱ معادلات انتگرال جبری

دستگاه معادلات

$$A(t)y(t) + \int_{\circ}^t k(t, s, y(s))ds = f(t), \quad t \in I := [\circ, T], \quad (1.1)$$

را در نظر بگیرید که در آن  $k \in C(\mathbb{D} \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r)$ ,  $f \in C(I, \mathbb{R}^r)$ ,  $A \in C(I, \mathbb{R}^{r \times r})$  با  $\mathbb{D} := \{(t, s) : \circ \leq s \leq t \leq T\}$

معلوم هستند. تابع مجهول در این دستگاه  $y$  است و آن را در فضای  $C(I, \mathbb{R}^r)$  جستجو می‌کنیم. این دستگاه با توجه به وضعیت ماتریس  $A$  چهار نوع دستگاه معادلات را مشخص می‌کند.

۱. اگر

$$A(t) = \circ, \quad \forall t \in I,$$

دستگاه (۱.۱) یک دستگاه معادلات انتگرال ولترای نوع اول است.

۲. اگر

$$\det A(t) \neq \circ, \quad \forall t \in I,$$

دستگاه (۱.۱) یک دستگاه معادلات انتگرال ولترای نوع دوم است.

۳. اگر  $A(t) \neq \circ$  و به ازای بعضی  $t \in I$

$$\det A(t) = \circ,$$

آنگاه دستگاه (۱.۱) یک دستگاه معادلات ولترای منفرد ضعیف است.

۴. اگر  $A(t) \neq \circ$  و

$$\det A(t) = \circ, \quad \forall t \in I,$$

آنگاه دستگاه (۱.۱) یک دستگاه معادلات انتگرال جبری است.



دستگاه (۱.۱) یک دستگاه معادلات انتگرال جبری خطی است اگر یک تابع مانند  $K : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^r$ ، موجود باشد که

$$k(t, s, y(s)) = K(t, s)y(s).$$

### ۳.۱ معادلات دیفرانسیل جبری

دستگاه

$$F(y'(t), y(t), t) = 0, \quad t \in I := [0, T], \quad (2.1)$$

را در نظر بگیرید که در آن  $F : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \times I \rightarrow \mathbb{R}^r$  و  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^r$ ،  $(r > 2)$ ، تابع مجهول است. اگر  $\frac{\partial F}{\partial y'}$  به ازای هر  $(y'(t), y(t), t) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \times I$  منفرد باشد، آنگاه (۲.۱) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری است. حالت شبه خطی دستگاه (۲.۱) دستگاه

$$A(t)y'(t) + b(y(t), t) = 0, \quad t \in I := [0, T], \quad (3.1)$$

است که در آن  $A \in C(I, \mathbb{R}^{r \times r})$  و  $b \in C(\mathbb{R}^r \times I, \mathbb{R}^r)$ . با توجه به تعریف معادلات دیفرانسیل جبری واضح است که تابع ماتریسی  $A$  منفرد است و دارای رتبه‌ی ثابت حداقل یک است. در نهایت حالت خطی دستگاه (۲.۱) دستگاه

$$A(t)y'(t) + B(t)y(t) = q(t), \quad t \in I := [0, T], \quad (4.1)$$

است که در آن  $q \in C(I, \mathbb{R}^r)$ ،  $B \in C(I, \mathbb{R}^{r \times r})$  و  $A \in C(I, \mathbb{R}^{r \times r})$ . اگر در دستگاه (۳.۱)، تابع ماتریسی  $A$  به ازای هر  $t \in I$  نامنفرد باشد آنگاه (۳.۱)، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی است. به طور کلی معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط اولیه به صورت

$$y'(t) = F(t, y), \quad t \in I := [t_0, T], \quad (5.1)$$

$$y(t_0) = y_0,$$

است، که در آن  $F : I \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  و  $y_0 \in \mathbb{R}^r$ .

### ۴.۱ تعریف‌های شاخص برای معادلات دیفرانسیل جبری

تعریف شاخص معیاری برای طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل جبری و انتگرال جبری است. تعریف‌های زیادی برای شاخص معادلات دیفرانسیل جبری وجود دارد. هر محققى با توجه به تعریفی از شاخص، تحلیل‌های خود را روی معادلات دیفرانسیل جبری انجام داده است. بنابراین پیدا کردن رابطه‌ی بین شاخص‌ها اهمیت خاصی دارد. ما در بخش‌های بعدی به این موضوع می‌پردازیم.

### ۱.۴.۱ شاخص دیفرانسیل

شاخص دیفرانسیل برای معادلات دیفرانسیل جبری (۲.۱)، به کارهای کمپبل<sup>۱</sup> [۴، ۱۳] بر می‌گردد.

تعریف ۱.۴.۱. اگر عدد  $m$  کمترین تعداد مشتقات لازم نسبت به  $t$  از دستگاه (۲.۱) باشد که آن را به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کند، آنگاه گوییم دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری (۲.۱) دارای شاخص  $m$  است.

مثال ۲.۴.۱. دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری

$$\begin{cases} x_1'(t) + x_1(t) + x_2(t) = q_1(t), \\ x_1(t) = q_2(t), \end{cases} \quad (۶.۱)$$

را در نظر بگیرید. با یک بار مشتق‌گیری از این دستگاه، به دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x_1''(t) + x_1'(t) + x_2'(t) = q_1'(t), \\ x_1'(t) = q_2'(t) \end{cases} \quad (۷.۱)$$

دست می‌یابیم. واضح است که از دو دستگاه (۶.۱) و (۷.۱) دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی به دست نمی‌آید. لذا یک بار دیگر از دستگاه (۷.۱)، مشتق می‌گیریم.

$$\begin{cases} x_1'''(t) + x_1''(t) + x_2''(t) = q_1''(t), \\ x_1''(t) = q_2''(t). \end{cases} \quad (۸.۱)$$

حال، کافی است معادله‌ی دوم دستگاه (۸.۱) را از معادله‌ی اول دستگاه (۷.۱) کم کنیم. معادله‌ی به دست آمده و معادله‌ی اول دستگاه (۶.۱) یعنی،

$$\begin{cases} x_1'(t) + x_1(t) + x_2(t) = q_1(t), \\ x_1'(t) + x_2'(t) = q_1'(t) - q_2''(t), \end{cases} \quad (۹.۱)$$

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی است. پس شاخص دیفرانسیل این دستگاه، ۲ است. این دستگاه حالت خاصی از رده‌ی مهمی از دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل جبری بنام هسنبرگ<sup>۲</sup> است.

مثال ۳.۴.۱. [۱] به طور کلی،

\* شاخص دستگاه‌هایی به صورت

$$y'(t) = f(y, z), \quad t \in I := [t_0, T], \quad (۱۰.۱)$$

$$\circ = g(y, z),$$

برابر ۱ است، اگر  $\frac{\partial g}{\partial y}$  به ازای هر  $t \in I$  نامنفرد باشد.

<sup>۱</sup>Campbell

<sup>۲</sup>Hessenberg

\* شاخص دستگاه‌هایی به صورت

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y, z), & t \in I := [t_0, T], & (11.1) \\ \circ &= g(y), \end{aligned}$$

برابر ۲ است، اگر  $\frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z}$  به ازای هر  $t \in I$  نامنفرد باشد.

\* شاخص دستگاه‌هایی به صورت

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y, z), & t \in I := [t_0, T], & \\ \circ &= k(y, z, u), & (12.1) & \\ \circ &= g(y) \end{aligned}$$

برابر ۳ است، اگر  $\frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial k}{\partial u}$  به ازای هر  $t \in I$  نامنفرد باشد.

بسیاری از معادلات دیفرانسیل جبری که در مدل‌های فیزیکی به کار رفته‌اند به صورت دستگاه‌های (۱۰.۱)، (۱۱.۱) و (۱۲.۱) هستند، که در مرجع [۲۵] با جزئیات بیشتر مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همچنین این معادلات جزء دسته‌ی وسیعی از معادلات دیفرانسیل جبری بنام هسنبرگ هستند که در فصل‌های بعدی مورد توجه قرار می‌گیرند.

#### ۲.۴.۱ شاخص اختلالی

تعریف ۴.۴.۱. [۲۵] گوئیم دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری (۲.۱) دارای شاخص اختلالی  $m$  در طول جواب  $y$  است اگر  $m$  کوچکترین عدد طبیعی باشد که برای یک عدد ثابتی مانند  $K$  تفاضل جواب دستگاه اختلالی

$$F(z'(t), z(t), t) = \delta(t), \quad t \in I := [0, T], \quad (13.1)$$

و جواب دستگاه اصلی در رابطه‌ی

$$\begin{aligned} \max_{t \in I} \|z(t) - y(t)\| &\leq K [\|z(0) - y(0)\| \max_{t \in I} \|\delta(t)\| + \max_{t \in I} \|\delta'(t)\| \\ &+ \dots + \max_{t \in I} \|\delta^{(m-1)}(t)\|] \end{aligned} \quad (14.1)$$

صدق کند که در آن  $\|\cdot\|$  نرم برداری را نشان می‌دهد.

شاخص اختلالی نقش مهمی در تحلیل عددی معادلات دیفرانسیل جبری دارد [۲۵].

### ۳.۴.۱ شاخص سراسری

شاخص سراسری برای معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر (۴.۱)، تعمیم شاخص معرفی شده توسط گیر<sup>۳</sup> و پتزولد<sup>۴</sup> است [۲۱]. این شاخص با استفاده از تبدیل به شکل متعارفه تعریف می شود [۱].

**تعریف ۵.۴.۱.** دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری (۴.۱) دارای شاخص سراسری  $m$  است، اگر توابع ماتریسی  $E \in \mathbb{C}(I, L(\mathbb{R}^r))$  و  $F \in \mathbb{C}^1(I, L(\mathbb{R}^r))$ ، چنان موجود باشند به طوری که با ضرب دستگاه

$$(۴.۱) \text{ از چپ در } E \text{ و استفاده از تبدیل } F(t)^{-1}y(t) = \tilde{y} \text{ به دستگاه} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \circ \\ \circ & J \end{bmatrix} \tilde{y}'(t) + \begin{bmatrix} W(t) & \circ \\ \circ & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tilde{y}(t) = E(t)q(t), \quad (۱۵.۱)$$

برسیم که در آن  $J$ ، ماتریس ثابت پوچتوان با شاخص  $m$  است و می نویسیم  $ind_g = m$ . یادآوری می کنیم، شاخص ماتریس پوچتوان  $J$ ، کوچکترین عددی مانند  $m$  است که در آن  $J^m = \circ$  و  $J^{m-1} \neq \circ$ .

### ۴.۴.۱ شاخص کنترلی

مارز<sup>۵</sup> و همکارانش شاخص را با استفاده از عملگر تصویر تعریف کرده اند [۴۰].

**تعریف ۶.۴.۱.** برای توابع ماتریسی  $\{A, B\} \in L(I, L(\mathbb{R}^m))$ ، زنجیری از توابع ماتریسی به صورت

$$A_\circ := A, \quad B_\circ = B - AP'_\circ,$$

$$A_{i+1} = A_i + B_i Q_i, \quad (۱۶.۱)$$

$$B_{i+1} = (B_i - A_{i+1}(P_\circ P_1 \dots P_{i+1})') P_i, \quad i \geq \circ,$$

را در نظر بگیرید که

$$P_j = \mathbf{I} - Q_j$$

و  $Q_j(t)$  تصویری از  $\mathbb{R}^r$  به توی  $N_j(t) = \ker A_j(t)$  است که  $t \in I, j \geq \circ$ . در این صورت می نویسیم  $ind_t = m$  و گفته می شود دسته ماتریس  $\{A, B\}$  (همچنین دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری (۴.۱)) از شاخص  $m$  است اگر همه ی توابع ماتریسی

$$A_i, \quad i = 1, \dots, m-1$$

منفرد با رتبه ی ثابت باشند و  $A_m(t)$  به ازای هر  $t \in I$ ، نامنفرد باشد.

<sup>۳</sup> Gear

<sup>۴</sup> Petzold

<sup>۵</sup> Marz