دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

حل عددی رده‌ای از معادلات انتگرال جبری روی فضای چندجمله‌ای‌های تکه‌ای

استادان راهنما

صداقت شهمراد و غلامرضا حجتی

پژوهشگر

بابک شیری

مرداد ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: شیری　　　　نام: بابک

عنوان: حل عددی رده‌ای از معادلات انتگرال جبری روی فضای چندجمله‌ای‌های تکه‌ای

استادان راهنما: صداقت شهمراد و غلامرضا حجتی

مقطع تحصیلی: دکتری　　　　رشته: ریاضی کاربردی　　　　گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: تبریز　　　　دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: مرداد ۱۳۹۲　　　　تعداد صفحات: ۱۴۱

واژگان کلیدی: معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات انتگرال نوع اول، معادلات انتگرال نوع دوم، روش‌های هم محلی،فضای چندجمله‌ای‌های تکه‌ای، معادلات انتگرال جبری، معادلات دیفرانسیل جبری.

چکیده

معادله‌ی انتگرال جبری یک دستگاه از معادلات انتگرال ولترا است. با تعریف شاخص، این معادلات طبقه بندی شده، مطالعه و تحلیل جوابهای دقیق و عددی این معادلات امکان پذیر می شود. معادلات انتگرال نوع دوم، معادلات انتگرال نوع اول و ترکیبی از آنها، نمونه‌هایی از معادلات انتگرال جبری با شاخص‌های متفاوت هستند.

تحلیل و بررسی معادلات انتگرال جبری هسنبرگ از شاخص دو، سوال پژوهشی ارائه شده توسط هرمان برونر بود که در این رساله آن را برای هر شاخص دلخواه در فضای چندجمله‌ای‌های تکه‌ای پیوسته و ناپیوسته به‌صورت جامع و کامل تحلیل می‌کنیم. در راستای این تحلیل، بازنگری اساسی در تعریف‌های شاخص انجام داده و شاخص رتبه-درجه را معرفی خواهیم کرد. همچنین برای بیان قضیه‌های همگرایی و مرتبه‌ی همگرایی روش‌های هم‌محلی برای معادلات انتگرال جبری از شاخص دلخواه، مفهوم جدیدی از آنالیز اختلال را معرفی خواهیم کرد. سپس این مفاهیم را از حالات خطی به غیرخطی تعمیم می‌دهیم. برای توصیف معادلات غیرخطی تعریف‌ها و رده‌بندی‌های اجتناب ناپذیر جدیدی را معرفی می‌کنیم. نتایج حاصل از این رساله، نه تنها معادلات انتگرال جبری بلکه معادلات دیفرانسیل جبری را هم تحت تاثیر قرار می‌دهد. در انتها با معرفی جعبه ابزار جدید، کاربردهای مهمی از نتایج این رساله را برای معادلات دیفرانسیل جبری ارائه خواهیم داد.

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

بسم الله الرّحمن الرّحیم

بگو: بیایید تا آنچه را که پروردگارتان بر شما حرام کرده است را بخوانم:

۱. به خدا شرک میاورید.

۲. به پدر و مادر خود نیکی کنید.

۳. از بیم درویشی فرزندان خود را مکشید ما به شما و ایشان روزی می‌دهیم.

۴. به کارهای زشت چه پنهان و چه آشکار نزدیک نشوید.

۵. و کسی را که خدا کشتنش را حرام کرده است مگر به حق نکشید. اینهاست آنچه خدا شما را بدان سفارش می‌کند، شاید که به عقل بیایید.

۶. و به مال یتیم جز به نحوی که نیکوتر است نزدیک نشوید، تا اینکه به حد بلوغ خود برسد.

۷. و پیمانه و ترازو را به عدل و انصاف، تمام بدهید. ما به کسی جز به اندازه‌ی توانش تکلیف نمی‌کنیم.

۸. هرگاه سخن گویید عادلانه گویید هر چند درباره‌ی خویشاوندان باشد.

۹. به عهد خدا وفا کنید. این است آنچه خدا شما را بدان سفارش می‌کند، باشد که پند گیرید.

۱۰. و این است راه راست من. از آن پیروی کنید و به راه‌های گوناگون نروید که شما را از راه خدا پراکنده سازد. این است آنچه خدا شما را بدان سفارش می‌کند باشد که با تقوی شوید.

سوره‌ی انعام آیات ۱۵۱ تا ۱۵۳

پیشگفتار

دستگاه معادلات انتگرال جبری، یک رده‌ی خاص از دستگاه معادلات انتگرال ولترا است. این رده شامل دستگاه معادلات انتگرال نوع دوم و نوع اول است. اولین پژوهش در این رابطه در کارهای چیستیاکف [1] [۱۶] و گییر [2] [۲۰] در فاصله سال‌های ۱۹۸۷-۱۹۹۰ دیده می‌شود. گییر و چیستیاکف شاخص دیفرانسیل را معرفی کردند. گییر همچنین روند کاهش شاخص را در مقاله‌ی مهم [۲۰] معرفی کرد. همچنین اختصار IAE اولین بار در این مقاله ظاهر شده است. بولاتف [3] شاگرد چیستیاکف شاخص چپ را برای اولین بار معرفی کرد. اولین روش عددی توسط کائوتن [4] ارائه شده است [۳۲]. کائوتن حل رده‌ای از معادلات انتگرال جبری از شاخص یک را با استفاده از چندجمله‌ای‌های تکه‌ای مورد مطالعه قرار داده است. شاید مهمترین کار در زمینه‌ی معادلات انتگرال جبری، فصل آخر کتاب برونر [5] [۵] است. برونر در این کتاب اشاره می‌کند که تقریبا آنالیز معادلات انتگرال و انتگرال دیفرانسیل به پایان رسیده است و فصل بعدی مطالعات آینده مطالعه‌ی معادلات انتگرال جبری خواهد بود. همچنین برونر، تعمیم شاخص کنترلی را در این کتاب می‌آورد.

تحلیل بررسی معادلات انتگرال جبری هسنبرگ از شاخص دو، سوال پژوهشی ارائه شده توسط برونر بود که ما توانستیم آن را برای هر شاخص دلخواه در فضاهای مجزای پیوسته و ناپیوسته به‌صورت جامع و کامل تحلیل کنیم. در راستای این تحلیل بود که بازنگری اساسی در تعاریف شاخص انجام دادیم و شاخص رتبه-درجه را معرفی کردیم. همچنین برای بیان قضیه‌های همگرایی و مرتبه‌ی همگرایی روش‌های هم‌محلی برای معادلات انتگرال جبری از شاخص دلخواه مفهوم جدیدی از تحلیل اختلالی را معرفی و قضیه‌های مربوط را بیان کردیم. سپس مفاهیم را از حالات خطی به غیرخطی تعمیم دادیم. برای توصیف معادلات غیرخطی تعریف‌ها و رده‌بندی‌های اجتناب ناپذیر جدیدی را معرفی کردیم. نتایج حاصل از این رساله، نه تنها معادلات انتگرال جبری بلکه معادلات دیفرانسیل جبری را هم تحت تاثیر قرار داده است. در انتها با معرفی جعبه ابزار جدید کاربردهای مهمی از نتایج این رساله را ارائه دادیم.

این رساله در قالب پنج فصل تنظیم شده است.

در فصل اول، معادلات انتگرال جبری و دیفرانسیل جبری معرفی می‌شود. سپس، مفهوم شاخص در معادلات دیفرانسیل جبری و انتگرال جبری مطالعه می‌شود. شاخص‌های موجود معرفی و شاخص‌های جدید تعمیم و یا معرفی می‌شوند. تا حد ممکن در رابطه با ارتباط میان شاخص‌ها بحث می‌شود. با توجه به شاخص جدید رتبه-درجه شرایط وجود و یکتایی جواب معادلات انتگرال جبری تحت قضیه‌هایی بیان و ثابت می‌شود و سپس در انتهای فصل قضیه‌های مقدماتی لازم برای فصل‌های دیگر مانند نامساوی گرانوال بیان می‌شوند و

[1] Chistyakov
[2] Gear
[3] Bulatov
[4] Kauthen
[5] Brunner

یا تعمیم داده می‌شوند.

در فصل دوم، فضاهای چندجمله‌ای‌های تکه‌ای معرفی می‌شوند. حل معادلات انتگرال جبری خطی با استفاده از روش‌های هم‌محلی روی فضاهای چندجمله‌ای‌های تکه‌ای ناپیوسته بررسی می‌شود. سپس قضیه‌های همگرایی و مرتبه‌ی همگرایی روش‌های هم‌محلی روی معادلات انتگرال جبری خطی هسنبرگ از شاخص دلخواه بیان می‌شود. همچنین آزمایش‌های عددی برای نشان دادن درستی قضیه‌های بیان شده، مهیا می‌شوند.

در فصل سوم، تحلیل همگرایی روش‌های هم‌محلی روی فضای چندجمله‌ای‌های تکه‌ای پیوسته برای معادلات انتگرال جبری خطی هسنبرگ از شاخص دلخواه انجام می‌شود. همچنین آزمایش‌های عددی برای نشان دادن درستی قضیه‌های بیان شده، مهیا می‌شوند.

فصل چهارم، به معادلات غیرخطی اختصاص داده می‌شود. تحلیل همگرایی و مرتبه‌ی روش‌های فصل دوم و سوم در این فصل بررسی می‌شود. همچنین تعاریف جدید برای مطالعه در معادلات غیرخطی این فصل ارائه می‌شود.

در فصل آخر، با توجه به نتایج همگرایی سه فصل پیش، این روش‌ها برای معادلات انتگرال جبری، بهینه شده و نرم‌افزاری برای کاربردهای عملی ارائه می‌گردد. نمونه‌های مهم از کاربردهای نتایج این رساله در حل معادلات آونگ ساده، انرژی جنبشی ترکیبات شیمیایی، معادله‌ی وندرپل و معادلات حاصل از تقویت کننده‌های دو ترانزیستوری و یک ترانزیستوری بیان می‌شوند.

مقالاتی که از این رساله مستخرج شده‌اند، به شرح زیرند:

B. Shiri, S. Shahmorad and G. Hojjati, *Convergence analysis of piecewise continuous collocation methods for higher index integral algebraic equations of Hessenberg type.* Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., **23**2, 341-355, (2013).

B. Shiri, S. Shahmorad and G. Hojjati, *Numerical solution of DAEs using their IAE's structure: simple pendulum, Robertson problem, and transistor amplifier.* Mathematical Modelling and Analysis , submited.

B. Shiri, *Numerical solution of higher index nonlinear integral algebraic equations of Hessenberg type using discontinuous collocation methods.* Mathematical Modelling and Analysis , submited.

بابک شیری

مرداد ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فصل ۱

پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

این رساله با مروری بر مفاهیم مقدماتی و مورد نیاز در فصل‌های آتی شروع می شود. تعریف شاخص مهمترین آنها است. سپس تعمیم، ارائه‌ی تعریف‌های جدید شاخص مورد توجه واقع می شود. همچنین در سرتاسر این رساله فرض می‌شود توابع تشکیل دهنده‌ی دستگاه‌های معادلات، با توجه به تعریف‌ها و قضیه‌ها، به حد کافی مشتق‌پذیر باشند.

۲.۱ معادلات انتگرال جبری

دستگاه معادلات

$$A(t)y(t) + \int_{\circ}^{t} k(t,s,y(s))ds = f(t), \qquad t \in I := [\circ, T], \tag{۱.۱}$$

را در نظر بگیرید که در آن $A \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{r\times r})$، $f \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^r)$، $k \in \mathbb{C}(\mathbb{D} \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r)$ با

$$\mathbb{D} := \{(t,s) : \circ \leq s \leq t \leq T\}$$

معلوم هستند. تابع مجهول در این دستگاه y است و آن را در فضای $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^r)$ جستجو می‌کنیم. این دستگاه با توجه به وضعیت ماتریس A چهار نوع دستگاه معادلات را مشخص می‌کند.

۱. اگر

$$A(t) = \circ, \ \ \forall t \in I,$$

دستگاه (۱.۱) یک دستگاه معادلات انتگرال ولترای نوع اول است.

۲. اگر

$$\det A(t) \neq \circ, \ \ \forall t \in I,$$

دستگاه (۱.۱) یک دستگاه معادلات انتگرال ولترای نوع دوم است.

۳. اگر $A(t) \not\equiv \circ$ و به ازای بعضی $t \in I$

$$\det A(t) = \circ,$$

آنگاه دستگاه (۱.۱) یک دستگاه معادلات ولترای منفرد ضعیف است.

۴. اگر $A(t) \not\equiv \circ$ و

$$\det A(t) = \circ, \ \ \forall t \in I,$$

آنگاه دستگاه (۱.۱) یک دستگاه معادلات انتگرال جبری است.

دستگاه (۱.۱) یک دستگاه معادلات انتگرال جبری خطی است اگر یک تابع مانند $K : \mathbb{D} \longmapsto \mathbb{R}^r$، موجود باشد که

$$k(t,s,y(s)) = K(t,s)y(s).$$

۳.۱ معادلات دیفرانسیل جبری

دستگاه

$$F(y'(t), y(t), t) = \circ, \qquad t \in I := [\circ, T], \tag{۲.۱}$$

را در نظر بگیرید که در آن $F : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \times I \longmapsto \mathbb{R}^r$ و $y : I \longmapsto \mathbb{R}^r$، ($r > ۲$)، تابع مجهول است. اگر $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ به ازای هر $(y'(t), y(t), t) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \times I$ منفرد باشد، آنگاه (۲.۱) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری است. حالت شبه خطی دستگاه (۲.۱) دستگاه

$$A(t)y'(t) + b(y(t), t) = \circ, \qquad t \in I := [\circ, T], \tag{۳.۱}$$

است که در آن $A \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{r\times r})$ و $b \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^r \times I, \mathbb{R}^r)$. با توجه به تعریف معادلات دیفرانسیل جبری واضح است که تابع ماتریسی A منفرد است و دارای رتبه‌ی ثابت **حداقل یک** است. در نهایت حالت خطی دستگاه (۲.۱) دستگاه

$$A(t)y'(t) + B(t)y(t) = q(t), \qquad t \in I := [\circ, T], \tag{۴.۱}$$

است که در آن $q \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^r)$، $B \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{r\times r})$ و $A \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{r\times r})$. اگر در دستگاه (۳.۱)، تابع ماتریسی A به ازای هر $t \in I$ نامنفرد باشد آنگاه (۳.۱)، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی است. به طور کلی معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط اولیه به صورت

$$\begin{aligned} y'(t) =& F(t, y), \qquad t \in I := [t_\circ, T], \\ y(t_\circ) =& y_\circ, \end{aligned} \tag{۵.۱}$$

است، که در آن $F : I \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^r$ و $y_\circ \in \mathbb{R}^r$.

۴.۱ تعریف‌های شاخص برای معادلات دیفرانسیل جبری

تعریف شاخص معیاری برای طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل جبری و انتگرال جبری است. تعریف‌های زیادی برای شاخص معادلات دیفرانسیل جبری وجود دارد. هر محققی با توجه به تعریفی از شاخص، تحلیل‌های خود را روی معادلات دیفرانسیل جبری انجام داده است. بنابراین پیدا کردن رابطه‌ی بین شاخص‌ها اهمیت خاصی دارد. ما در بخش‌های بعدی به این موضوع می‌پردازیم.

۱.۴.۱ شاخص دیفرانسیل

شاخص دیفرانسیل برای معادلات دیفرانسیل جبری (۲.۱)، به کارهای کمپبل [1] [۴، ۱۳] بر می‌گردد.

تعریف ۱.۴.۱. اگر عدد m کمترین تعداد مشتقات لازم نسبت به t از دستگاه (۲.۱) باشد که آن را به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کند، آنگاه گوییم دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری (۲.۱) دارای شاخص m است.

مثال ۲.۴.۱. دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری

$$\begin{cases} x_1'(t) + x_1(t) + x_2(t) &= q_1(t), \\ x_1(t) &= q_2(t), \end{cases} \tag{۶.۱}$$

را در نظر بگیرید. با یک بار مشتق‌گیری از این دستگاه، به دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x_1''(t) + x_1'(t) + x_2'(t) &= q_1'(t), \\ x_1'(t) &= q_2'(t) \end{cases} \tag{۷.۱}$$

دست می‌یابیم. واضح است که از دو دستگاه (۶.۱) و (۷.۱) دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی به‌دست نمی‌آید. لذا یک بار دیگر از دستگاه (۷.۱)، مشتق می‌گیریم.

$$\begin{cases} x_1'''(t) + x_1''(t) + x_2''(t) &= q_1''(t), \\ x_1''(t) &= q_2''(t). \end{cases} \tag{۸.۱}$$

حال، کافی است معادله‌ی دوم دستگاه (۸.۱) را از معادله‌ی اول دستگاه (۷.۱) کم کنیم. معادله‌ی به‌دست آمده و معادله‌ی اول دستگاه (۶.۱) یعنی،

$$\begin{cases} x_1'(t) + x_1(t) + x_2(t) &= q_1(t), \\ x_1'(t) + x_2'(t) &= q_1'(t) - q_2''(t), \end{cases} \tag{۹.۱}$$

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی است. پس شاخص دیفرانسیل این دستگاه، ۲ است. این دستگاه حالت خاصی از رده‌ی مهمی از دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل جبری بنام هسنبرگ [2] است.

مثال ۳.۴.۱. [۱] به طور کلی،

* شاخص دستگاه‌هایی به صورت

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y, z), \qquad t \in I := [t_0, T], \\ 0 &= g(y, z), \end{aligned} \tag{۱۰.۱}$$

برابر ۱ است، اگر $\frac{\partial g}{\partial y}$ به ازای هر $t \in I$ نامنفرد باشد.

[1] Campbell
[2] Hessenberg

* شاخص دستگاه‌هایی به صورت

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y,z), \qquad t \in I := [t_\circ, T], \\ \circ &= g(y), \end{aligned} \tag{۱۱.۱}$$

برابر ۲ است، اگر $\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}$ به ازای هر $t \in I$ نامنفرد باشد.

* شاخص دستگاه‌هایی به صورت

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y,z), \qquad t \in I := [t_\circ, T], \\ \circ &= k(y,z,u), \\ \circ &= g(y) \end{aligned} \tag{۱۲.۱}$$

برابر ۳ است، اگر $\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial k}{\partial u}$ به ازای هر $t \in I$ نامنفرد باشد.

بسیاری از معادلات دیفرانسیل جبری که در مدل‌های فیزیکی به‌کار رفته‌اند به صورت دستگاه‌های (۱۰.۱)، (۱۱.۱) و (۱۲.۱) هستند، که در مرجع [۲۵] با جزئیات بیشتر مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همچنین این معادلات جزء دسته‌ی وسیعی از معادلات دیفرانسیل جبری بنام هسنبرگ هستند که در فصل‌های بعدی مورد توجه قرار می‌گیرند.

۲.۴.۱ شاخص اختلالی

تعریف ۴.۴.۱. [۲۵] گوییم دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری (۲.۱) دارای شاخص اختلالی m در طول جواب y است اگر m کوچکترین عدد طبیعی باشد که برای یک عدد ثابتی مانند K تفاضل جواب دستگاه اختلالی

$$F(z'(t), z(t), t) = \delta(t), \qquad t \in I := [\circ, T], \tag{۱۳.۱}$$

و جواب دستگاه اصلی در رابطه‌ی

$$\begin{aligned} \max_{t\in I} \|z(t) - y(t)\| \leq & K[\|z(\circ) - y(\circ)\| \max_{t\in I} \|\delta(t)\| + \max_{t\in I} \|\delta'(t)\| \\ & + \cdots + \max_{t\in I} \|\delta^{(m-1)}(t)\|] \end{aligned} \tag{۱۴.۱}$$

صدق کند که در آن $\|.\|$ نرم برداری را نشان می‌دهد.

شاخص اختلالی نقش مهمی در تحلیل عددی معادلات دیفرانسیل جبری دارد [۲۵].

۳.۴.۱ شاخص سراسری

شاخص سراسری برای معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر (۴.۱)، تعمیم شاخص معرفی شده توسط گییر [3] و پتزولد [4] است [۲۱]. این شاخص با استفاده از تبدیل به شکل متعارفه تعریف می شود [۱].

تعریف ۵.۴.۱. دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری (۴.۱) دارای شاخص سراسری m است، اگر توابع ماتریسی $E \in \mathbb{C}(I, L(\mathbb{R}^r))$ و $F \in \mathbb{C}^1(I, L(\mathbb{R}^r))$، چنان موجود باشند به‌طوری که با ضرب دستگاه (۴.۱) از چپ در E و استفاده از تبدیل $F(t)^{-1}y(t) = \widetilde{y}$ به دستگاه

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \widetilde{y}'(t) + \begin{bmatrix} W(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \widetilde{y}(t) = E(t)q(t), \qquad (۱۵.۱)$$

برسیم که در آن J، ماتریس ثابت پوچتوان با شاخص m است و می نویسیم $ind_g = m$. یادآوری می‌کنیم، شاخص ماتریس پوچتوان J، کوچکترین عددی مانند m است که در آن $J^m = 0$ و $J^{m-1} \neq 0$.

۴.۴.۱ شاخص کنترلی

مارز [5] و همکارانش شاخص را با استفاده از عملگر تصویر تعریف کرده‌اند [۴۰].

تعریف ۶.۴.۱. برای توابع ماتریسی $\{A,\ B\} \in L(I, L(\mathbb{R}^m))$، زنجیری از توابع ماتریسی به صورت

$$A_0 := A, \quad B_0 = B - AP_0',$$

$$\begin{aligned} A_{i+1} &= A_i + B_iQ_i, \\ B_{i+1} &= (B_i - A_{i+1}(P_0P_1\dots P_{i+1})')P_i, \quad i \geq 0, \end{aligned} \qquad (۱۶.۱)$$

را در نظر بگیرید که

$$P_j = \mathbf{I} - Q_j$$

و $Q_j(t)$ تصویری از $\mathbb{R}^r$ به توی $N_j(t) = \ker A_j(t)$ است که $t \in I$، $j \geq 0$. در این صورت می نویسیم $ind_t = m$ و گفته می‌شود دسته ماتریس $\{A,\ B\}$ (همچنین دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری (۴.۱)) از شاخص m است اگر همه‌ی توابع ماتریسی

$$A_i,\ i = 1, ..., m-1$$

منفرد با رتبه‌ی ثابت باشند و $A_m(t)$ به ازای هر $t \in I$، نامنفرد باشد.

---
[3] Gear
[4] Petzold
[5] Marz