٩٣٢٥٢٣٢٧

دانشگاه شهید چمران اهواز
دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

گرایش جبر

عنوان

حلقه‌های به طور ضعیف منظم با شرط ACC روی پوچسازها و شرط ماکسیمال بودن ایدآل‌های قویاً اول روی حلقه‌های به طور ضعیف منظم

استاد راهنما:
دکترنسرین شیرعلی

استاد مشاور:
مریم داودیان

نگارنده:
اعظم سبزی کار

بهمن۱۳۹۳

نام خانوادگی: سبزی‌کار نام: اعظم شماره دانشجویی: ۹۱۲۵۲۱۵

عنوان پایان‌نامه: حلقه‌های به طور ضعیف منظم با شرط ACC روی پوچسازها و شرط ماکسیمال بودن ایدآل‌های قویاً اول روی حلقه‌های به طور ضعیف منظم

استاد راهنما: دکترنسرین شیرعلی

استاد مشاور: مریم داودیان

درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: شهید چمران اهواز دانشکده: علوم ریاضی و کامپیوتر گروه: ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۳/۱۱/۰۷ تعداد صفحات: ۱۰۹

واژگان کلیدی: حلقه‌های منظم، حلقه‌های به طور ضعیف منظم، حلقه‌های دو منظم، ۲-اول، حلقه‌های دو طرفه، رادیکال اول، حلقه‌های قویاً اول

چکیده

در این پایان نامه رده‌ای خاص از حلقه‌ها با عنوان حلقه‌های به طور ضعیف منظم را بررسی می‌کنیم و به یک طبقه‌بندی از نتایج در مورد ساختار این حلقه‌ها و ایدال‌های آن‌ها دست می‌یابیم. رامامورتی برای حلقه‌های آرتینی چپ ثابت کردکه به طور ضعیف منظم بودن معادل با منظم بودن و دومنظم بودن است. مشاهده می‌کنیم که این نتیجه یک شرط تعمیم یافته است. در واقع نتیجه‌گیری می‌کنیم که برای حلقه‌ی R که در شرط ACC روی پوچ‌ساز راست صدق می‌کند، اگر R به طور ضعیف منظم باشد، آن‌گاه دومنظم است و همچنین R به طور ضعیف منظم است اگر و تنها اگر جمع مستقیم تعداد متناهی از حلقه‌های ساده باشد. پس از آن شرایط ماکسیمال بودن ایدال‌های قویاً اول را مورد بررسی قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم که حلقه کاهش یافته R منظم است اگر و تنها اگر R به طور ضعیف π-منظم چپ باشد اگر و تنها اگر هر ایدال قویاً اول R از ماکسیمال باشد.

تقدیم به:

مقدس‌ترین واژه ها در لغت نامه دلم، مادر مهربانم که زندگیم را مدیون مهر و عطوفت آن می دانم. پدرم کوهی استوار و حامی من در طول تمام زندگی، همسرم که نشانه لطف الهی در زندگی من است، برادر و خواهرانم همراهان همیشگی و پشتوانه های زندگیم.

ای خداوندا...[1]

به علمای ما مسئولیت، و به عوام ما علم، و به مومنان ما روشنایی، و به روشنفکران ما ایمان و به متعصبین ما فهم و به فهمیدگان ما تعصب و به زنان ما شعور و به مردان ما شرف و به پیروان ما آگاهی و به جوانان ما اصالت و به اساتید ما عقیده و به دانشجویان ما نیز عقیده و به خفتگان ما بیداری و به دینداران ما دین و به نویسندگان ما تعهد و به هنرمندان ما درد و به شاعران ما شعور و به محققان ما هدف و به نومیدان ما امید و به ضعیفان ما نیرو و به محافظه‌کاران ما گستاخی و به نشستگان ما قیام و به راکدین ما تکان و به مردگان ما حیات و به کوران ما نگاه و به خاموشان ما فریاد و به مسلمانان ما قرآن و به شیعیان ما علی(ع) و به فرقه‌های ما وحدت و به حسودان ما شفا و به خودبینان ما انصاف و به فحاشان ما ادب و به مجاهدان ما صبر و به مردم ما خودآگاهی و به همه ملت ما همت، تصمیم و استعداد فداکاری و شایستگی نجات و عزت ببخش!

خدایا تقدیر مرا خیر بنویس

آنگونه که آنچه را تو دیر می خواهی من زود نخواهم..

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس‌گزاری...

شکر شایان نثار ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان نامه را به پایان برسانم. از استاد فاضل و اندیشمند سرکار خانم دکتر نسرین شیرعلی به عنوان استاد راهنما که همواره نگارنده را مورد لطف و محبت خود قرار داه اند ،کمال تشکر را دارم . از سرکار خانم دکتر مریم داوودیان که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و مرا مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از پدر و مادر عزیز ، دلسوز و مهربانم که آرامش روحی و آسایش فکری فراهم نمودند تا با حمایت های همه جانبه در محیطی مطلوب ، مراتب تحصیلی و نیز پایان نامه درسی را به نحو احسن به اتمام برسانم ؛ سپاسگزاری نمایم. همچنین لازم می‌دانم از همسر عزیزم صمیمانه تشکر و قدردانی کنم او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود. در پایان از خواهران عریزم که همواره در طول تحصیل متحمل زحماتم بودند و تکیه گاه من در مواجهه با مشکلات، و وجودشان مایه دلگرمی من است؛ قدردانی می‌کنم.

اعظم سبزی‌کار

بهمن ۱۳۹۳

فهرست مطالب

پیشگفتار

حلقه‌ی به طور ضعیف منظم چپ، حلقه‌ای است که به ازای هر $a \in R$، $Ra = RaRa$. حلقه به طور ضعیف منظم راست نیز به صورت مشابه تعریف می‌شود. حلقه‌ی به طور ضعیف منظم حلقه‌ای است که به طور ضعیف منظم چپ و راست باشد. در خصوص حلقه‌های به طور ضعیف منظم چندین مقاله به چاپ رسیده است که هر یک بخشی از خصوصیات جذاب و پرمایه این حلقه‌ها را مورد مطالعه و تحقیق قرار داده‌اند. پایان نامه‌ی حاضر حاصل توضیح و تفسیر مقاله‌های زیر می‌باشد.

1. Weakly regular rings with ACC on annihilators and maximality of strongly prime ideals of weaklyregular rings Chan Yong Hong, Young Cheol Jeon, Kyoung Hwan Kim,Nam Kyun Kim,, Yang Lee

2. Weakly regular rings,V.S. Ramamurthi, Canad. Math. Bull. 16 (1973) 317–321.

در این پایان‌نامه پس از تعریف و بررسی حلقه‌های به طور ضعیف منظم به بررسی حلقه‌های به طور ضعیف $\pi-$منظم و حلقه‌های دومنظم می‌پردازیم و مشاهده می‌کنیم که حلقه‌های به طور ضعیف منظم چپ در شرط ACC روی پوچساز راست صدق می‌کنند. نشان خواهیم داد برای حلقه R با شرط ACC روی پوچساز راست، اگر R به طور ضعیف منظم چپ باشد، آنگاه R جمع مستقیمی از حلقه‌های ساده است و در این حالت R دومنظم

است. پس از آن با تعریف حلقه‌های ۲−اول، نشان می‌دهیم که اگر R یک حلقه ۲−اول باشد، $R/N_*(R)$ به طور ضعیف منظم است اگر و تنها اگر $R/N_*(R)$ به طور ضعیف π−منظم راست باشد اگر و تنها اگر هر ایدال اول از R ماکسیمال باشد. در نهایت نشان می‌دهیم برای حلقه کاهش یافته‌ی R، R به طور ضعیف منظم است اگر و تنها اگر هر ایدال قویاً اول از R ماکسیمال باشد.

فصل ۱
مفاهیم اولیه

حلقه

تعریف ۱.۰.۱. فرض کنید R مجموعه‌ای ناتهی است با دو عمل $+, . : R \times R \to R$ با خصوصیات

۱. $(R,+)$ یک گروه آبلی است.

۲. $(R,.)$ یک نیم گروه است.

۳. ضرب نسبت به جمع توزیع‌پذیر است، یعنی؛ برای هر $a,b,c \in R$:

$$(a+b)c = ac + bc$$

$$a(b+c) = ab + ac$$

به علاوه اگر $R \supseteq S \neq \emptyset$ و تحت عمل جمع و ضرب در R بسته باشد و با این اعمال خود یک حلقه باشد، آنگاه S را یک زیر حلقه از R می‌نامیم.

تعریف ۲.۰.۱. یک زیرگروه I از $(R,+)$ را یک ایدال راست می‌نامیم، هرگاه:

$$\forall r \in R \qquad , \forall a \in I \qquad , ra \in I$$

تعریف ۳.۰.۱. نگاشت $f : R \to S$ که R, S هر دو حلقه هستند را همریختی حلقه‌ای می‌نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in R$

$$f(a+b) = fa + fb$$

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

هسته‌ی یک همریختی حلقه‌ای را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$kerf := \{a \in R : \ : f(a) = 0_S\}$$

هسته‌ی یک همریختی از f یک ایدال از R است.

تعریف ۴.۰.۱. خصوصیاتی از اعضای حلقه R :

ــ عضو $a \in R$ مقسوم‌علیه چپ صفر نامیده می‌شود، اگر یک $0 \neq b \in R$ موجود باشد که $ab = 0$.

ــ عضو $a \in R$ مقسوم‌علیه صفر راست نامیده می‌شود، اگر یک $0 \neq b \in R$ موجود باشد که $ba = 0$.

ــ عضو $a \in R$ مقسوم‌علیه صفر نامیده می‌شود، هرگاه a مقسوم‌علیه صفر چپ و راست باشد.

ــ $a \in R$ خودتوان است، هرگاه $a^2 = a$.

ـ$a \in R$ پوچ‌توان است، هرگاه $k \in N$ موجود باشد که $a^k = 0$.

ـ$a \in R$ منظم است، هرگاه $b \in R$ موجود باشد که $aba = a$.

ـ$a \in R$ وارون‌پذیر چپ (راست) است اگر یک $b \in R$ موجود باشد که $ba = 1$ ($ab = 1$).
که در اینجا $1_R = 1$ عضو واحد R است. $a \in R$ را وارون‌پذیر گوییم، هرگاه وارون‌پذیر چپ و راست باشد.

توجه:

۱. هر عضو خودتوان $e \in R$ که یکه (راست) نباشد، مقسوم‌علیه صفر راست است؛ زیرا $e^2 = e$ در نتیجه $e(e-1) = 0 = e(1-e)$.

۲. هر عضو پوچ‌توان یک مقسوم‌علیه صفر است.

۳. هر عضو وارون‌پذیر راست $a \in R$ منظم است؛ زیرا از $ab = 1$ که در آن $b \in R$ وارون راست a است می‌توان به $aba = a$ رسید.

۴. اگر $a \in R$ منظم باشد و برای $b \in R$، $aba = a$، آن‌گاه، ab و ba اعضای خودتوانی از R هستند: $(ab)^2 = (aba)b = ab$ ، $(ba)^2 = b(aba) = ba$.

تعریف ۱.۰.۵. :

(۱). عضو خودتوان $e \in R$ را مرکزی می‌نامیم، هرگاه e در مرکز حلقه R باشد، بدین معنا که برای هر $a \in R$ داشته باشیم $ae = ea$.

(۲). اعضای خودتوان $e_1, e_2 \in R$ را متعامد نامیم، هرگاه $e_1e_2 = e_2e_1 = 0_R$. همچنین یک مجموعه‌ی $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ از اعضای خودتوان R را که دو به دو متعامدند، یک مجموعه متعامد می‌نامیم؛ یعنی، به ازای هر $\alpha \neq \beta$، $e_\alpha e_\beta = e_\beta e_\alpha = 0$.

تعریف ۱.۰.۶. خصوصیاتی از ایدال‌های چپ R.

ایدال چپ I از حلقه R:

ـ مینیمال است اگر $I \neq 0$ و به طور سره شامل هیچ ایدال چپ ناصفری از R نباشد.

ـ ماکسیمال است، اگر $I \neq R$ و به طور سره مشمول هیچ ایدال چپ R نباشد.

ـ پوچ‌توان است، اگر یک $k \in \mathbb{N}$ موجود باشد به‌طوری‌که $I^k = (0)$.

ـ پوچ است، اگر هر عضو I پوچ‌توان باشد.

ـ خودتوان است اگر $I^2 = I$.

ـ متناهی مولد است، اگر توسط یک مجموعه متناهی تولید گردد.

ـ اصلی است، اگر توسط یک عضو از حلقه تولید شود.

به طور مشابه برای ایدال راست و ایدال دوطرفه R تعاریف فوق بیان می‌شود.

حلقه‌ی R:

ـ ساده نامیده می‌شود، اگر $R^2 \neq 0$ و R شامل هیچ ایدال نابدیهی نباشد.

ـ نیم‌ساده نامیده می‌شود، اگر R جمع مستقیم همه ایدال‌های ساده خودش باشد.

ـ منظم (ون نیومن) نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $a \in R$، عنصر $b \in R$ موجود باشد به طوری که $a = aba$.

ـ کاهشی نامیده می‌شود، هرگاه R عضو پوچ‌توان ناصفر نداشته باشد.

ـ تقسیم نامیده می‌شود، اگر هر عضو آن وارون چپ و راست داشته باشد. هر حلقه تقسیم تعویض‌پذیر میدان است.

ـ به طور مستقیم تحویل‌ناپذیر است، اگر اشتراک تمام ایدال‌های ناصفر R ناصفر باشد.

ـ اول نامیده می‌شود، اگر (0) ایدال اولی از R باشد.

ـ نیم‌اول نامیده می‌شود، اگر (0) ایدال نیم‌اولی از R باشد.

مثال ۱.۰.۷. حلقه تقسیم R، یک حلقه منظم است؛ زیرا اگر $\circ \neq a \in R$، آن‌گاه $a^{-1} \in R$ موجود است که $aa^{-1} = 1_R$. بنابراین $a = aa^{-1}a$.

مثال ۱.۰.۸. حاصل‌ضرب حلقه‌های منظم، منظم است.

تعریف ۱.۰.۹. برای زیر مجموعه ناتهی $A \subseteq R$ پوچ‌ساز راست را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r(A) = ann_r^R(A) = \{b \in R \quad | \quad ab = \circ \quad ,\forall a \in A\}$$

و پوچ‌ساز چپ A عبارت است از:

$$l(A) = ann_l^R(A) = \{b \in R \quad | \quad ba = \circ \quad ,\forall a \in A\}$$

بنابراین پوچ‌ساز یک عضو $a \in R$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r(a) = ann_r^R(A) = \{b \in R \quad | \quad ab = \circ\}$$

$$l(a) = ann_l^R(A) = \{b \in R \quad | \quad ba = \circ\}$$

توجه داشته باشیم که پوچ‌ساز راست (چپ) هر عضو یک حلقه، ایدال راست (چپ) آن حلقه است.

تذکر ۱.۰.۱۰. اگر e عضو خودتوانی در حلقه R و I یك ایدال R باشد، آن‌گاه $e+I$ به وضوح عضو خودتوان حلقه خارج قسمتی $\frac{R}{I}$ است. ولی عکس این مطلب برقرار نمی‌باشد. به عنوان مثال $\frac{\mathbb{Z}}{۶\mathbb{Z}}$ چهار عضو خودتوان متمایز دارد، در صورتی که $\mathbb{Z}$ تنها دو عنصر خودتوان دارد.

تعریف ۱.۰.۱۱. فرض کنید R حلقه‌ی ساده باشد. در این صورت R را صرفاً نامتناهی می‌نامیم، هرگاه R حلقه‌ی تقسیم نباشد و برای هر $r \in R$، $x, y \in R$ موجود باشند به‌طوری‌که $xry = 1$.

تذکر ۱.۰.۱۲. حلقه‌های صرفاً نامتناهی خودتوان دارند؛ زیرا اگر $r \in R$ آن‌گاه $x, y \in R$ موجودند به‌طوری‌که $xry = ۱$. بنابراین $ryx = ry\underbrace{xry}_{=۱}x = ryx$.$(ryx)^۲ = ry\underbrace{xry}_{=۱}x = ryx$.

قرارداد: در سراسر این پایان‌نامه حلقه‌ها و زیرحلقه‌ها شرکت‌پذیر و یک‌دار فرض شده‌اند مگر خلاف آن ذکر شود. عنصر یک حلقه، به زیرحلقه‌هایش به ارث می‌رسد و تحت همریختی حلقه‌ای این واحد انتقال می‌یابد.

۱.۱ ایدال‌های اول و کاملاً اول

تعریف ۱.۱.۱. ایدال سره‌ی P از حلقه‌ی R، ایدال اول نامیده می‌شود، هرگاه برای هر ایدال A و B، از حلقه‌ی R، $AB \subseteq P$ نتیجه دهد $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

تذکر ۲.۱.۱. فرض کنید $f : R \to S$ همریختی حلقه‌ای باشد. در این صورت برای هر ایدال I از حلقه‌ی S داریم:

$$f(f^{-۱}(I)) = I \cap Imf.$$

تذکر ۳.۱.۱. هرگاه $\mathcal{P}$ یک ویژگی باشد که به طور چپ و راست تعریف می‌شود، آن‌گاه منظور از این‌که مثلا R یک حلقه با ویژگی $\mathcal{P}$ است این است که ویژگی $\mathcal{P}$ از راست و چپ برقرار است و موارد مشابه برای ایدال‌ها و مدول‌ها و موارد مشابه آن. هم‌چنین منظور از این‌که I دارای ویژگی $\mathcal{P}$ است این است که $\frac{R}{I}$ به عنوان حلقه دارای آن ویژگی باشد.

گزاره ۴.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و P ایدالی از آن باشد به‌طوری‌که برای هر $a, b \in R$، $ab \in P$ نتیجه دهد $a \in P$ یا $b \in P$. در این صورت P ایدال اول است.

برهان. فرض کنید I و J ایدال‌هایی از حلقه‌ی R باشند و $IJ \subseteq P$. در این صورت نشان می‌دهیم $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$. فرض کنید $I \nsubseteq P$، در این صورت $x \in I \backslash P$ وجود دارد. حال برای هر $y \in J$ داریم $xy \in IJ \subseteq P$. بنابر فرض $y \in P$. لذا $J \subseteq P$. $\square$

گزاره ۵.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و P ایدال آن باشد. در این صورت P ایدال اول است اگر و تنها اگر برای هر $a,b \in R$ هرگاه $ab \in P$، آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$.

برهان. فرض کنید P ایدال اول از حلقه‌ی R باشد و $ab \in P$. در این صورت $abR \subseteq P$. چون R تعویض‌پذیر است، لذا $aRb \subseteq P$. بنابراین $R(aRb)R \subseteq P$. چون P ایدال اول است پس $RaR \subseteq P$ یا $RbR \subseteq P$. به این ترتیب $a \in P$ یا $b \in P$. برعکس بنابر تعریف ایدال اول بدیهی است. □

گزاره ۶.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر باشد به‌طوری‌که هر ایدال سره از R اول باشد. در این صورت R میدان است.

برهان. چون $(\circ)$ ایدال اول است، پس R قلمرو صحیح است. کافی است نشان دهیم برای هر $a \neq \circ$، $R =< a >$. بنابر فرض $< a^{۲} >$ ایدال اول R می‌باشد، از آن‌جا که $a^{۲} \in< a^{۲} >$ بنابراین $a \in< a^{۲} >$ در نتیجه $r \in R$ وجود دارد که $a = ra^{۲}$ و در این صورت $(۱ - ra)a = \circ$ و $a \neq \circ$ نتیجه می‌دهد که $ra = ۱$؛ یعنی، a وارون‌پذیر است و از این‌رو R میدان است. □

گزاره ۷.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت شرایط زیر هم‌ارزند:

۱. تمام ایدال‌های سره از R اولند.

۲. الف) ایدال‌های R با رابطه شمول مرتب خطی‌اند.

ب) تمام ایدال‌های R خودتوان‌اند.

برهان. (۱ $\Leftarrow$ ۲) الف) فرض کنید I و J ایدال‌های سره R باشند. بنابر (۱)، $I \cap J$ اول است اما $IJ \subseteq I \cap J$ این ایجاب می‌کند $I \subseteq I \cap J$ یا $J \subseteq I \cap J$. بنابراین $I \subseteq J$ یا $J \subseteq I$.

ب) بنابر (۱)، $I^۲$ ایدال اول است و $II \subseteq I^۲$. بنابراین داریم $I \subseteq I^۲$. پس $I = I^۲$.
(۲ ⇐ ۱) فرض کنید P ایدال سره از R باشد. هم‌چنین فرض کنید $I, J \supseteq P$ به‌طوری‌که $IJ \subseteq P$. نشان می‌دهیم $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$. بنابر (۲) (الف)، فرض کنید $I \subseteq J$ بنابر (۲) ب)، $I = I^۲ \subseteq IJ \subseteq P$ بنابراین $I \subseteq P$. □

قضیه ۸.۱.۱. اگر R حلقه‌ی ناصفر باشد، آن‌گاه هر ایدال سره I از حلقه‌ی R، مشمول در یک ایدال ماکسیمال است.

برهان. به لم (۱۸.۲) از منبع [۳۷] مراجعه کنید. □

نتیجه ۹.۱.۱. هر حلقه‌ی غیرصفر حداقل دارای یک ایدال ماکسیمال می‌باشد.

گزاره ۱۰.۱.۱. اگر P یک ایدال راست سره در حلقه‌ی R باشد. در این صورت شرایط زیر هم‌ارزند:

۱. برای هر $a, b \in R$، اگر $aP \subseteq P$ و $ab \in P$، آن‌گاه $a \in P$ یا $b \in P$.

۲. برای هر $a \in R$ اگر $aP \subseteq P$ و $a \notin P$، آن‌گاه $a^{-۱}P = P$.

برهان. (۱ ⇐ ۲) فرض کنید $x \in a^{-۱}P$ در این صورت $ax \in P$. لذا بنابر فرض (۱)، $a \in P$ یا $x \in P$. اما طبق فرض (۲)، $a \notin P$ لذا $x \in P$. در نتیجه $a^{-۱}P \subseteq P$. حال اگر $x \in P$، آن‌گاه بنابر فرض (۲)، $aP \subseteq P$، لذا $ax \in P$. در نتیجه $x \in a^{-۱}P$. پس $P \subseteq a^{-۱}P$. بنابراین $P = a^{-۱}P$.
(۲ ⇐ ۱) فرض کنید $aP \subseteq P$ و $ab \in P$، در این صورت نشان می‌دهیم $a \in P$ یا $b \in P$. گیریم $a \notin P$ بنا بر فرض (۲)، $P = a^{-۱}P$. از این‌که $ab \in P$ نتیجه می‌گیریم $b \in a^{-۱}P = P$. □

تعریف ۱۱.۱.۱. ایدال راست سره P در حلقه‌ی R را ایدال راست کاملاً اول می‌نامیم، هرگاه در یکی از شرایط معادل گزاره‌ی قبل صدق کند.

یادآوری می‌کنیم که یدال P از حلقه‌ی R، کاملاً اول نامیده می‌شود، هرگاه حلقه $\frac{R}{P}$ دامنه باشد. به طور معادل، $P \neq R$ و برای هر $a, b \in R$، $ab \in P$ نتیجه دهد، $a \in P$ یا $b \in P$.

گزاره ۱۲.۱.۱. اگر P ایدال سره از حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه P یک ایدال راست کاملاً اول است اگر و تنها اگر ایدال کاملاً اول باشد. به‌ویژه P ایدال راست کاملاً اول است اگر و تنها اگر ایدال چپ کاملاً اول باشد.

برهان. از آن‌جا که P ایدالی از R است، برای هر $a \in R$ داریم $aP \subseteq P$. اگر $a, b \in R$ و $ab \in P$، آن‌گاه با توجه به این‌که P کاملاً اول است، پس $a \in P$ یا $b \in P$. بنابراین P یک ایدال راست کاملاً اول است. $\square$

نتیجه ۱۳.۱.۱. اگر R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر باشد، آن‌گاه ایدال P کاملاً اول (راست) است اگر و تنها اگر ایدال اول باشد.

تذکر ۱۴.۱.۱. اگر R یک حلقه اول باشد، $\mathbb{M}_n(R)$ حلقه اول است.

بنابراین ایدال‌های راست کاملاً اول تعمیم مفهوم ایدال‌های اول در حلقه‌های تعویض‌پذیر به حلقه‌های تعویض‌ناپذیر هستند. حال با یک مثال نشان می‌دهیم که یک ایدال اول در حلقه‌ی تعویض‌ناپذیر الزاما کاملاً اول نیست.

مثال ۱۵.۱.۱. حلقه‌ی $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. توجه داریم که $I = \mathbb{M}_2(p\mathbb{Z})$ که در آن p یک عدد اول است، ایدال کاملاً اول نیست؛ زیرا اگر قرار دهیم $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$، آن‌گاه $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ ولی $A \notin I$ و $B \notin I$. اما می‌دانیم که I یک ایدال اول از حلقه‌ی $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ است.

یادآوری می‌کنیم ایدال سره‌ی $P \subset R$ نیم‌اول نامیده می‌شود، اگر P اشتراکی از ایدال‌های اول R باشد.

تذکر ۱.۱.۱۶. اگر R یک حلقه نیم‌اول باشد، آنگاه $M_n(R)$ حلقه ماتریس‌های $n \times n$ روی R نیم‌اول است.

قضیه ۱.۱.۱۷. (لویتسکی ـ ناگاتا): ایدال I در حلقه R نیم‌اول است، اگر و تنها اگر هرگاه $x \in R$ و $xRx \subseteq I$، آنگاه $x \in I$.

برهان. به قضیه (۷.۲) از منبع [۳۲] مراجعه کنید. □

قضیه ۱.۱.۱۸. اگر R حلقه نیم‌اول باشد، آنگاه R ایدال ناصفر پوچ‌توان ندارد.

برهان. اگر I ایدال پوچ‌توان R باشد؛ یعنی، $I^k = ۰$ چون هر ایدال پوچ‌توان در اشترک ایدال‌های اول قرار می‌گیرد، پس I در اشتراک ایدال‌های اول قرار می‌گیرد، از طرفی بنا به تعریف حلقه نیم‌اول، اشتراک ایدال‌های اول برابر صفر است، لذا $I = ۰$. □

تذکر ۱.۱.۱۹. اما عکس قضیه ۱.۱.۱۸ درست نیست؛ به عنوان مثال هرگاه R حلقه‌ای نیم‌اول باشد، آنگاه $M_۲(R)$ نیم‌اول است ولی $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ یک عضو پوچ‌توان آن می‌باشد.

نتیجه ۱.۱.۲۰. هر حلقه‌ی کاهش‌یافته، نیم‌اول است.

تذکر ۱.۱.۲۱. P را کاملاً نیم‌اول می‌گوییم، هرگاه R/P یک حلقه کاهش‌یافته باشد.

تعریف ۱.۱.۲۲. فرض کنید S یک زیرمجموعه از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد. در این صورت می‌گوییم که S بسته ضربی است هرگاه S شامل همانی ضربی حلقه باشد و همچنین تحت ضرب حلقه بسته باشد.

مثال ۱.۱.۲۳. اگر $\{P_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از ایدال‌های اول در حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد، آنگاه $S = R\backslash \bigcup_{i\in I} P_i$ زیرمجموعه‌ی بسته ضربی حلقه‌ی R است.

مثال ۲۴.۱.۱. مجموعه مرکب از تمام عناصری در یک حلقه‌ی ناصفر، که مقسوم‌علیه‌صفر نباشند، بسته ضربی است.

گزاره ۲۵.۱.۱. فرض کنید S زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت اگر P در میان ایدال‌هایی که مجزا از S هستند ماکسیمال باشد، آن‌گاه P ایدال اول است.

برهان. فرض (خلف) کنید P ایدال اول نباشد در این صورت ایدال‌های I, J از حلقه‌ی R موجودند به‌طوری‌که $I \supsetneq P$ و $J \supsetneq P$. ولی $IJ \subseteq P$. حال بنابر ماکسیمال بودن P، $x \in S \cap I$ و $y \in J \cap S$ موجود است. بنابراین $xy \in IJ \cap S$. در نتیجه $P \cap S \neq \varnothing$ و این تناقض است. لذا P ایدال اول می‌باشد. □

قضیه ۲۶.۱.۱. فرض کنید S زیرمجموعه‌ی بسته ضربی از حلقه R باشد و I ایدالی از R باشد که از S مجزا است در این صورت ایدال اول P موجود است به‌طوری‌که $I \subseteq P$ و P از S مجزا می‌باشد.

برهان. بنابر گزاره قبل اثبات واضح است. □

تعریف ۲۷.۱.۱. تعریف و قرارداد:

$J(R)$: اشتراک همه ایدال‌های ماکسیمال R که به رادیکال جیکوبسن R مرسوم است و بزرگترین ایدال دو طرفه از R است که به ازای هر $a \in J(R)$، و $s, r \in R$، $1 - ras$ وارون‌پذیر است. (به گزاره (۱.۵) از منبع [۲۸] مراجعه کنید)

$Spec(R)$: مجموعه‌ی ایدال‌های اول حلقه R است.

تذکر ۲۸.۱.۱. توجه می‌کنیم، اگر R کاهش‌یافته و $ar = 0$ باشد، آن‌گاه $(ra)^2 = rara = 0$ و لذا $ra = 0$. در نتیجه در این حلقه‌ها، پوچ‌سازهای چپ (راست) اعضای حلقه، پوچ‌سازهای راست (چپ) نیز هستند.

گزاره ۲۹.۱.۱. خودتوان‌ها در حلقه‌ی کاهش‌یافته‌ی R مرکزی هستند.

برهان. اگر e یک عضو خودتوان حلقه باشد. برای هر $x \in R$ داریم:

$$(exe - ex)^۲ = ۰ \quad , \quad (exe - xe)^۲ = ۰$$

اما R کاهش‌یافته است؛ پس $exe = xe$ و $exe = ex$ لذا برای هر $x \in R$؛ $xe = ex$ یعنی، e یک خودتوان مرکزی است. $\square$

تعریف ۳۰.۱.۱. یک حلقه R موضعی می‌نامیم اگر یک مجموعه از اعضای وارون‌ناپذیر R ایدالی از R باشد.

۲.۱ مفاهیم مقدماتی مدول‌ها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد، در این صورت گروه آبلی M همراه تابعی مانند $R \times M \to M$ که در آن $(r, m) \longmapsto rm$ را یک Rـ مدول چپ یکانی می‌گوییم هرگاه به ازای هر $r, s \in R$ و $a, b \in M$ داشته باشیم:

۱. $r(a + b) = ra + rb$.

۲. $(r + s)a = ra + sa$.

۳. $r(sa) = (rs)a$.

۴. برای هر $a \in M$، $۱_R a = a$.

به همین ترتیب R مدول راست یکانی تعریف می‌شود.

فرض کنید R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر باشد، در این صورت Rـ مدول چپ M با تعریف $r.a = a.r$ به یک Rـ مدول راست تبدیل می‌شود، بنابراین گوییم M، Rـ مدول است.