دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض ، گرایش جبر لی

عنوان

جبرهای لی موضعاً متناهی با تجزیه ریشه

استاد راهنما

دکتر محمد شهریاری

استاد مشاور

دکتر علیرضا مددی

پژوهشگر

حامد رزاقی حلوایی

۱۳۹۰

تقدیم به پدر و مادر

عزیزم

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

خدا آن حس زیباییست که در تاریکی صحرا،

زمانی که هراس مرگ سکوتت را می دزدد

یکی، همچون نسیم دشت میگوید کنارت، هستم

ای تنها

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

ابتدا از جناب آقای دکتر محمد شهریاری که در آماده سازی این پایان‌نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان و تشکر را دارم.

از جناب آقای دکتر علیرضا مددی که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند سپاس گزاری می‌کنم.

حامد رزاقی حلوایی

زمستان ۱۳۹۰

نام خانوادگی: رزاقی حلوایی **نام:** حامد

عنوان پایان‌نامه: جبرهای لی موضعاً متناهی با تجزیه ریشه

استاد راهنما: دکتر محمد شهریاری

استاد مشاور: دکتر علیرضا مددی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** جبر لی

دانشگاه: تبریز **دانشکده:** علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: زمستان ۱۳۹۰ **تعداد صفحه:** ۵۸

کلیدواژه‌ها: جبر لی موضعاً متناهی ، سیستم موضعاً اساسی ، جبر لی تحویلی-ریشه ، سیستم سازگار با تجزیه ریشه ، رادیکال موضعاً حل پذیر

چکیده: در این پایان نامه تعاریف مربوط به جبرهای لی و جبرهای لی موضعاً متناهی را معرفی خواهیم کرد، سپس فرض خواهیم کرد که $\mathbb{F}$ یک میدان بسته جبری با مشخصه صفر و L یک جبر لی موضعاً متناهی با بعد شمارا روی $\mathbb{F}$ باشد. فرض می کنیم $H \leqslant L$ یک زیر جبر موضعاً پوچتوان باشد که با مولفه صفر-فیتینگ خودش برابر است. با فرض اینکه رادیکال موضعاً حل پذیر L مساوی صفر و L دارای تجزیه سیستم ریشه نسبت به H است به دسته بندی L خواهیم پرداخت. در واقع نشان خواهیم داد که L به صورت اجتماع زیر جبرهای تحویلی L_n است به طوریکه $L_n \cap H$ زیر جبر کارتان L_n باشد. به عنوان نتیجه ثابت خواهیم کرد که L تحویلی-ریشه و H آبلی می باشد.

فهرست مطالب

فهرست مطالب **چ**
۱.۰ مقدمه . . . . خ

۱ مقدمه **۱**
۱.۱ مفاهیم مقدماتی ۲
۲.۱ نمایش ها و مدول ها ۴
۳.۱ جبرهای لی حل پذیر و پوچتوان ۷
۴.۱ نمایش جبرهای لی پوچتوان ۱۰
۵.۱ جبرهای لی کلاسیک ۱۲
۶.۱ زیر جبرهای کارتان ۱۷
۷.۱ تجزیه فضای ریشه ۲۱

۲ جبرهای لی موضعاً متناهی **۲۴**
۱.۲ تعاریف اولیه ۲۵
۲.۲ حد مستقیم ۲۷
۳.۲ سیستم های موضعی ۳۰
۴.۲ مثال های کلاسیک ۳۲
۵.۲ مدول ها برای جبرهای لی موضعاً متناهی ۳۴

۳ جبرهای لی موضعاًمتناهی با تجزیه ریشه **۴۱**

۱.۳ مقدمه ۴۱
۲.۳ تعاریف و قضایا ۴۲

مراجع ۵۲

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۵۳

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۵۵

۱.۰ مقدمه

در این پایان نامه ضمن معرفی جبرهای لی موضعاً متناهی به توسیع مفهوم موضعی موضعی روی دیگر تعاریف مربوط به جبرهای لی خواهیم پرداخت و با ساختار جبرهای لی موضعاً متناهی کلاسیک آشنا خواهیم شد؛ در ادامه نشان خواهیم داد که هر جبر لی موضعاً متناهی از بعد شمارا روی میدان $\mathbb{F}$ که در یک تجزیه ریشه صدق می کند و رادیکال موضعاً حل پذیرش برابر صفر می باشد، ضرورتاً تحویلی-ریشه خواهد بود. ما همچنین ثابت خواهیم کرد که اگر L ، جبر لی موضعاً متناهی تحویلی- ریشه باشد و H زیر جبری از L باشد و مؤسسی در L وجود داشته باشد، در این صورت L در H – تجزیه ریشه صدق می کند اگر و تنها اگر H به صورت اجتماع تو در تو از زیر جبرهای کارتان باشد که این زیرجبرها تحویلی و از بعد متناهی اند که با تجزیه ریشه سازگار می باشند.

در پایان یک زیر جبر آبلی خودنرمال از $\mathfrak{sl}(\infty)$ مثال خواهیم زد که $\mathfrak{sl}(\infty)$ نسبت به آن زیر جبر تجزیه ریشه ندارد.

داشتن یک ذهن خوب کافی نیست، آنچه اهمیت دارد
استفاده صحیح از آن است.

"دکارت"

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

در این بخش تعاریف و مفاهیم مقدماتی را که در یک جبر لی معمولی مورد نیاز است، ذکر می کنیم تا در فصل بعد که این مفاهیم را روی جبرهای لی موضعاً متناهی گسترش می دهیم بتوان ساده تر درک نمود. در تمام این فصل فضاها با بعد متناهی هستند و $\mathbb{F}$ را میدان بسته جبری با مشخصه صفر در نظر می گیریم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم L یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. L همراه با یک عمل دوتایی به صورت

$$[\ ,\ ] : L \times L \longrightarrow L$$

$$(x, y) \longmapsto [x, y]$$

را یک جبر لی روی میدان $\mathbb{F}$ می نامند هرگاه بازای هر $x, y, z \in L$ و $\lambda \in \mathbb{F}$سه شرط زیر برقرار باشند:

1) $[x, \lambda y_1 + y_2] = \lambda [x, y_1] + [x, y_2]$ و $[\lambda x_1 + x_2, y] = \lambda [x_1, y] + [x_2, y]$

2) $[x, x] = 0$

3) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$

شرط (3) درتعریف فوق را اتحاد ژاکوبی [۱] می نامند و $[x, y]$ را براکت یا جابجاگر x و y می نامند.

از قسمت (2) تعریف فوق برای هر $x \in L$ داریم: $[x, x] = 0$ پس بازای هر $x, y \in L$ خواهیم داشت:

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y]$$

لذا نتیجه می شود که $[x, y] = -[y, x]$ و این همان خاصیت ضد جابجایی بودن است.

[۱] Jacobi identity

مثال ۲.۱.۱. اگر L یک فضای برداری دلخواه روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و برای هر $x,y \in L$ حاصلضرب براکتی را به صورت

$$[x,y]=0$$

تعریف کنیم، در این صورت یک جبر لی خواهیم داشت که این نوع جبرهای لی را آبلی [۲] می نامند.

مثال ۳.۱.۱. فرض کنیم $L=\mathbb{R}^3$ فضای اقلیدسی سه بعدی روی میدان اعداد حقیقی باشد. بازای هر $u,v \in L$ با تعریف ضرب براکت $[u,v]=u \wedge v$ به سادگی می توان بررسی کرد که L یک جبر لی خواهد بود و این جبر لی را به صورت $\mathbb{R}^3_\wedge$ نشان می دهند.

مثال ۴.۱.۱. اگر A یک جبر شرکت پذیر باشد آنگاه A با تعریف $[x,y]=xy-yx$، به یک جبر لی تبدیل می شود که آن را معمولاً با A_{Lie} نیز نشان می دهند.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم L یک جبر لی باشد و H و K زیر فضاهای برداری از L باشند. در این صورت نماد $[H,K]$ نشان دهنده زیرفضای تولید شده توسط تمام $[x,y]$هایی است که در آن $x \in H$ و $y \in K$. پس هر عضو دلخواه از $[H,K]$ به فرم

$$u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,[x_i,y_i]\ ; \qquad n \geqslant 1\ ,\ x_i \in H\ ,\ y_i \in K, \alpha_i \in \mathbb{F}$$

است.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم K یک زیرفضای برداری از جبر لی L باشد. K را یک زیرجبرلی می نامیم، و می نویسیم $K \leq_{Lie} L$ ، هرگاه $[K,K]\subseteq K$.
همچنین K را یک ایده آل L می نامیم، و می نویسیم $K \trianglelefteq L$ ، هرگاه $[K,L]\subseteq K$.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم $K \trianglelefteq L$ در این صورت مجموعه

$$L/K=\{x+K\ :\ x \in L\}$$

---
[۲] Abelian

با تعریف $[x+K,y+K]=[x,y]+K$ بازای $x,y\in L$ ، یک جبر لی می باشد که آن را جبر لی خارج قسمتی L روی K می نامیم.

تعریف ۸.۱.۱. جبر لی L را ساده می گویند هرگاه تنها ایده آل هایش صفر و خود L باشند.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم L_1 و L_2 دو جبر لی روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. تابع $f : L_1 \longrightarrow L_2$ را یک همومورفیسم جبر لی می نامند هرگاه اولاً f تبدیل خطی باشد و ثانیاً عمل براکت را حفظ کند،یعنی

$$\forall x,y\in L_1 : \qquad f\left([x,y]\right)=\left[f\left(x\right),f\left(y\right)\right]$$

همچنین نگاشت $f : L_1 \longrightarrow L_2$ را ایزومورفیسم جبر لی می نامند هرگاه f یک همومورفیسم یک به یک و پوشا از جبرهای لی باشد. جبرهای لی L_1 و L_2 را ایزومورف می‌نامند، و می‌نویسند $L_1\cong L_2$ ، هرگاه یک ایزومورفیسم جبر لی بین این دو جبر موجود باشد.

مفاهیم هسته، تصویر، مونومورفیسم، اپی مورفیسم، مرکز جبر لی، مرکزساز، نرمال ساز و ... به طور معمول تعریف می شوند و تمام قضایای ایزومورفیسم برای جبرهای لی نیز برقرارند.

۲.۱ نمایش ها و مدول ها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم $M_n(\mathbb{F})$ جبر شرکت پذیر تمام ماتریس های $n\times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ و $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ جبر لی متناظر با آن باشد. $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ را جبرلی خطی عام از درجه nروی میدان $\mathbb{F}$ می‌نامند و داریم:

$$\dim\ \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})=n^2.$$

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان$\mathbb{F}$ ، $End(V)$ جبرشرکت پذیر تبدیلات خطی روی میدان$\mathbb{F}$ و$\mathfrak{gl}(V)$ جبرلی متناظر باشد. $\mathfrak{gl}(V)$ را جبرلی خطی عام از V می نامند و اگر V از بعد متناهی n باشد در این صورت $\mathfrak{gl}(V)$ و $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ ایزومورف اند.

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنیم L یک جبر لی و V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند، هر هومومورفیسم جبرلی $\varphi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ را یک نمایش برای جبر لی L می نامند.

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنیم Lیک جبر لی و V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند، V را یک L –مدول می نامند هرگاه نگاشتی مانند

$$\cdot : L \times V \longrightarrow V$$

$$(x, v) \longmapsto x.v$$

موجود باشد به طوری که برای هر $x, y \in L$ ، $v, w \in V$ و $\lambda \in \mathbb{F}$ داشته باشیم:

1) $\quad x.(\lambda v + w) = \lambda x.v + x.w$

2) $\quad (\lambda x + y).v = \lambda x.v + y.v$

3) $\quad [x, y].v = x.(y.v) - y.(x.v)$

تعریف ۱.۲.۵. زیر فضای U از V را یک L –زیرمدول از V می نامند هرگاه $L.U \subseteq U$ ، به ویژه زیرفضای o و خود V زیرمدول های بدیهی از V هستند.

تعریف ۱.۲.۶. L –مدول غیر صفر V را تحویل ناپذیر می نامیم هرگاه زیرمدولی غیر از صفر و خودش نداشته باشد.

لم ۱.۲.۷. *V یک L –مدول است، اگر و فقط اگر نمایشی مانند $\varphi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ موجود باشد.*

برهان. فرض کنیم V یک L –مدول باشد. نگاشت $\varphi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(\varphi(x))(v) = x.v$$

آنگاه φ یک نمایش است.

برعکس، اگر $\varphi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ یک نمایش باشد آنگاه تعریف می کنیم:

$$x.v = \varphi(x)(v)$$

در این صورت V یک L –مدول است.(بررسی شرط ۳)

$$\begin{aligned}[x,y].v &= \varphi([x,y])(v)\\ &= [\varphi(x),\varphi(y)](v)\\ &= (\varphi(x)\varphi(y)-\varphi(y)\varphi(x))(v)\\ &= \varphi(x)(\varphi(y)(v))-\varphi(y)(\varphi(x)(v))\\ &= x.(y.v)-y.(x.v)\end{aligned}$$

∎

حال اگر فرض کنیم V یک فضای برداری n بعدی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد آنگاه $\mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ ولذا لم قبل را می توان به صورت زیر بیان نمود.

لم ۸.۲.۱. *فرض کنیم $\varphi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ یک هومومورفیسم باشد، آنگاه $V = \mathbb{F}^n$ یک L –مدول است و بالعکس.*

مثال ۹.۲.۱. فرض کنیم L یک جبر لی دلخواه باشد. بازای هر $x \in L$ عملگر $adx : L \longrightarrow L$ را به صورت $(adx)(y) = [x,y]$ تعریف می کنیم. در این صورت نگاشت

$$ad : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(L)$$

$$x \longmapsto adx$$

یک نمایش جبرلی می باشد و بنابراین L یک L –مدول می باشد.

نمایش ad از L را نمایش الحاقی و مدول متناظر با آن را مدول الحاقی [۳] می نامند.

در ضمن برای هر $x \in L$ ، adx یک عملگر مشتق است، یعنی

$$adx([y,z]) = [(adx)(y),z] + [y,(adx)(z)]$$

۳.۱ جبرهای لی حل پذیر و پوچتوان

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم L یک جبر لی باشد، زیر جبر مشتق n –ام را چنین تعریف می‌کنیم:

$$L^{(0)} = L$$

$$L^{(n)} = [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}]$$

در حالت خاص $L^{(1)} = [L,L]$ را با L' نیز نشان می دهند. بدیهی است که

$$\ldots \subseteq L^{(2)} \subseteq L^{(1)} \subseteq L$$

که سری فوق را سری مشتق [۴] L می نامیم و بازای هر n داریم:

$$L^{(n)} \trianglelefteq L$$

تعریف ۲.۳.۱. جبر لی L را حل پذیر [۵] می نامیم هرگاه

$$\exists n \ : \ L^{(n)} = 0$$

[۳] Adjoint module

[۴] Derived series

[۵] Solvable

لم ۳.۳.۱. *فرض کنیم L یک جبرلی با بعد متناهی باشد، در این صورت L دارای یک ایده‌آل حل پذیر ماکزیمال است.*

برهان. فرض کنیم

$$S = \{A \trianglelefteq L \mid \text{حل پذیر باشد } A\}$$

بدیهی است که $S \neq \emptyset$ و چون L متناهی البعد است لذا عضوی در S وجود دارد که بعد آن ماکزیمم مقدار است، این عضو ماکزیمم را R در نظر می گیریم. حال اگر $A \in S$ در این صورت $R+A$ حل پذیر است و در نتیجه $R + A \in S$. اکنون بنابه تعریف داریم:

$$\dim(R + A) \leq \dim(R)$$

لذا $A \subseteq R$ پس ثابت شد که R ایده‌آل حل پذیر ماکزیمال L است. ∎

تعریف ۴.۳.۱. اگر L یک جبر لی با بعد متناهی باشد آنگاه از لم زورن، L دارای بزرگترین ایده آل حل پذیر ماکزیمال است که آن را رادیکال حل پذیر L می نامند و با $Rad(L)$ نشان می دهند.

تعریف ۵.۳.۱. جبر لی L را نیمساده گویند هرگاه $Rad(L) = 0$ ، یعنی تنها ایده آل حل پذیر L ایده آل صفر می باشد.

تعریف ۶.۳.۱. جبر لی L را تحویلی [۶] می گویند هرگاه، $Rad(L) = Z(L)$.

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنیم L یک جبر لی باشد. تعریف می کنیم:

$$L^1 = L$$

$$L^n = [L, L^{n-1}]$$

---

[۶] Reductive

و داریم:

$$\ldots \subseteq L^2 \subseteq L^1 \subseteq L$$

که این را سری مرکزی پایینی [۷] می نامیم. همچنین بازای هر n داریم:

$$L^n \trianglelefteq L.$$

تعریف ۱.۳.۸. جبر لی L را پوچتوان [۸] می نامیم هرگاه

$$\exists n \ : \ L^n = 0.$$

تبصره ۱.۳.۹. *هر جبر لی پوچتوان، حل پذیر است.*

قضیه ۱.۳.۱۰. (*قضیه لی* [۹]) *فرض کنیم L یک جبر لی با بعد متناهی و حل پذیر باشد. در این صورت هر L –مدول تحویل ناپذیر با بعد متناهی دارای بعد یک است.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۲.۲ از مرجع [۶]. ∎

نتیجه ۱.۳.۱۱. *فرض کنیم L یک جبرلی حل پذیر با بعد متناهی و $\varphi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ یک نمایش آن باشد که $V \neq 0$ و $\dim V < \infty$. در این صورت بازای هر $x \in L$ پایه ای مانند B برای V وجود دارد که نمایش ماتریسی $\varphi(x)$ نسبت به این مبنای مفروض بالا مثلثی است.*

برهان. رجوع شود به نتیجه ۲.۳ از مرجع [۶]. ∎

---
[۷] Lower central series
[۸] Nilpotent
[۹] Lie

۴.۱ نمایش جبرهای لی پوچتوان

قضیه ۱.۴.۱. *فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی و $T : V \longrightarrow V$ یک عملگر خطی باشد. فرض کنیم چندجمله ای مشخصه T چنین باشد:*

$$\chi_T(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_r)^{m_r}$$

که در آن λ_iها مقادیر ویژه از T و m_iها چندبارگی مقادیر ویژه می باشند. حال تعریف می‌کنیم:

$$V_i = \{v \in V \ \mid \ \exists N \ , \ (T-\lambda_i 1)^N(v) = 0\}$$

در این صورت:

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

بعلاوه $\dim V_i = m_i$ ، $T(V_i) \subseteq V_i$ و $\chi_{T|_{V_i}}(t) = (t-\lambda_i)^{m_i}$.

برهان. رجوع شود به گزاره ۲.۵ از مرجع [۶]. ■

لم ۲.۴.۱. *اگر V یک L – مدول متناهی البعد باشد و $x, y \in L$ ، $v \in V$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ در این صورت داریم:*

$$(\rho(y) - (\alpha+\beta)1)^n \rho(x) v = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (ady - \beta.1)^i x(\rho(y) - \alpha.1)^{n-i} v$$

که در آن ρ نمایش متناظر با L – مدول V می باشد.

برهان. رجوع شود به گزاره ۲.۷ از مرجع [۶]. ■

قضیه ۳.۴.۱. *اگر L جبر لی پوچتوان و V یک L – مدول با نمایش متناظر ρ باشد و فرض کنیم $y \in L$ در این صورت $\rho(y) : V \longrightarrow V$ تبدیل خطی با ضابطه $\rho(y)(v) = y.v$ است.*

برهان. فرض کنیم V_i فضای مشخصه تعمیم یافته با مقدار مشخصه λ_i باشد. اگر $v \in V_i$ در این صورت kای وجود دارد که $(\rho(y) - \lambda_i.1)^k(v) = 0$. حال فرض کنیم $\alpha = \lambda_i$ و $\beta = 0$ واین مقادیر را در رابطه لم قبل قرار می دهیم، پس داریم:

$$(\rho(y) - \lambda_i.1)^n xv = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (ady)^i x(\rho(y) - \lambda_i.1)^{n-i} v$$

چون بنابه فرض L جبرلی پوچتوان است لذا

$$\exists r \ \ , \ \ L^r = 0$$

پس

$$(ady)^r(x) = [\underbrace{y, y, ..., y}_{\text{r تا}}, x] = 0$$

حال اگر قرار دهیم $n = k + r + 1$ در این صورت ضریب اول و یا ضریب دوم عبارت سمت راست رابطه فوق برابر صفر خواهد بود و لذا مجموع طرف دوم این عبارت برابر صفر می‌شود. در نتیجه

$$(\rho(y) - \lambda_i.1)^n xv = 0$$

پس نتیجه می شود $x.v \in V_i$ و این یعنی V_i ، L –زیرمدول V است. ∎

قضیه ۴.۴.۱. *فرض کنیم L جبرلی پوچتوان و V یک L – مدول متناهی البعد باشد. برای هر نمایش 1 – بعدی λ از L تعریف می کنیم*

$$V_\lambda = \{v \in V \ \mid \ \forall x \in L \ \ \exists n \ , \ (x - \lambda(x))^n(v) = 0\}$$

در این صورت

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_\lambda$$

و هر V_λ زیرمدولی از L است.