بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه :

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

عنوان :

تقریب عددی حاصل ضرب ریشه دوم یک ماتریس در یک بردار

استاد راهنما :

دکتر محمد یعقوب رحیمی اردبیلی

استاد مشاور :

دکتر میرکمال میرنیا

پژوهشگر :

مهدی رضائی‌نژاد

شهریور ۱۳۸۱

تقدیم به :

بهترینهای زندگیم

پدر صبور و مادر مهربانم

تقدیر و تشکر

از خداوند متعال بینهایت سپاسگزارم که مرا یاری فرمود تا با اتکا به مسئولیت علمی ام وظیفه ای جزئی در سیر تکامل انسان در جهت شناخت و معرفت انجام دهم.

در اینجا وظیفه خود میدانم که ازاستاد راهنمایم آقای دکتر رحیمی بخاطر راهنمائیهای ارزنده و مفیدشان تشکر و سپاسگزاری بنمایم.همچنین ازاستاد مشاورم آقای دکترمیرنیاکه همواره از نظر علمی و خصوصاً اخلاقی مشوق و الگوی اینجانب بوده و هستند، بی نهایت سپاسگزارم. همچنین از استاد عزیزم آقای دکتر جدیری که داوری پایان نامه را تقبل نموده و پیشنهادهای سازنده ای را عنوان فرمودند، سپاسگزاری می کنم.

ضمناً از کلیه اعضای محترم دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تبریز بخصوص از ریاست محترم آقای دکتر مهرورز صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

در آخر لازم می دانم از تمامی دوستان و بخصوص از دائی عزیزم آقای دکتر خیری که در طول دوران تحصیل مرا یاری نمودند، سپاسگزاری بنمایم.

از خداوند متعال برای تمامی کسانی که برای پیشرفت علمی این مرز و بوم تلاش می کنند،سلامتی، عزت و طول عمر خواستارم .

بسمه‌تعالی

نام خانوادگی دانشجو : رضائی‌نژاد نام : مهدی

عنوان پایاننامه : تقریب عددی حاصل ضرب ریشه دوم یک ماتریس در یک بردار

استاد راهنما : دکتر محمد یعقوب رحیمی اردبیلی

استاد مشاور: دکتر میرکمال میرنیا

مقطع تحصیلی:کارشناسی ارشد رشته:ریاضی گرایش:کاربردی دانشگاه:تبریز

دانشکده:علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور۱۳۸۱

کلید واژه‌ها : ریشه دوم ماتریس، روش عددی، سیستم غیر خطی، مسئله مقدار اولیه، روش لانکزوس

چکیده :

اگر A ماتریس معین مثبت و $\bar{c}$ یک بردار باشد هدف این پایان‌نامه تقریب عددی $A^{1/2}\bar{c}$ می‌باشد ($A^{1/2}$ ریشه دوم ماتریس A است)

کاربرد این تقریب در حل عددی معادلات دیفرانسیل تصادفی می‌باشد .مثلاً در معادلات انتقال نوترونها [۲] یا در دینامیک جمعیتها [۱] معادلات دیفرانسیل تصادفی به شکل زیر بوجود می‌آیند.

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(\bar{y},t) + A^{1/2}(\bar{y},t)\frac{d\bar{w}(t)}{dt} \qquad (I)$$

$$\bar{y}(0) = \bar{y}_0$$

که $A(\bar{y},t)$ یک ماتریس متقارن معین مثبت و $\bar{y}$ تابعی از زمان t و $\bar{w}(t)$ بردار n بعدی – واینر[۱] است. برای حل عددی (I) با استفاده از روش اویلر[۲] دنباله تکراری به شکل زیر حاصل میشود.

$$\bar{y}_{m+1} = \bar{y}_m + f(\bar{y}_m,t_m)\Delta t + A^{1/2}(\bar{y}_m,t_m)\bar{\psi}_m\sqrt{\Delta t} \quad m = 0,1,2,...$$

$$t_m = m\Delta t\ ,\ \bar{y} \approx \bar{y}(t_m)\quad ,\ (\psi_m)_i \in N(0,1)\ \ i = 1,2,...,n \qquad (II)$$

(۱) Wiener (۲) Euler

برای محاسبه (II)در هر تکرار به تقریب $A^{1/2}(\bar{y}_m,t_m)\bar{\psi}_m$ نیاز خواهیم داشت که $A(\bar{y}_m,t_m),\bar{\psi}_m$ داده شده است. با توجه به اهمیت موضوع ارائه روشهایی برای تقریب $A^{1/2}(\bar{y}_m,t_m)\bar{\psi}_m$ ضروری به نظر می‌رسد.

در این پایان نامه برای تقریب عددی $A^{1/2}\vec{c}$ سه روش بررسی شده است.

در روش اول ابتدا $A^{1/2}$ محاسبه و سپس در بردار $\vec{c}$ ضرب میشود.در روش دوم و سوم به ترتیب از روش تکراری نیوتن و روش کنترل - گام برای تقریب $A^{1/2}\vec{c}$ استفاده شده است. اگر ماتریس A به شکل سه قطری باشد تعداد محاسبات در هر تکرار روش اول , دوم و سوم به ترتیب $O(n),O(n^2),O(n^3)$ می‌باشد بعبارت دیگر تفاوت روشها در دقت و زمان اجرای محاسبات است و در نهایت این روشها با چند مثال تجزیه و تحلیل شده است.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فهرست مطالب

عنوان صفحه

مقدمه :

این پایان نامه به موضوع تقریب عددی حاصلضرب ریشه دوم یک ماتریس در یک بردار می‌پردازد این موضوع اولین بار در سال ۲۰۰۰ میلادی توسط آلن[۱]، بوید[۲] و باقلاما[۳] تحقیق و بررسی شده است. آلن در مقالاتی به نامهای معادلات انتقال نوترونهای تصادفی در یک میله و صفحه مسطح [۲] و معادلات دیفرانسیل تصادفی و پافشاری زمان در عکس‌العمل جمعیتها به یکدیگر [۱] به معادلات دیفرانسیل تصادفی برخورد کرده که در حل عددی آنها از تقریب عددی حاصلضرب ریشه دوم یک ماتریس در یک بردار استفاده کرده است. لذا با توجه به اهمیت این بحث در معادلات دیفرانسیل تصادفی، بعنوان موضوع پایان نامه انتخاب شده است.

اگر A ماتریس $n\times n$ ومعین مثبت و $\vec{c}$ یک بردار n- بعدی باشد هدف این پایان نامه تقریب عددی $A^{1/2}\vec{c}$ می‌باشد. برای تقریب $A^{1/2}\vec{c}$ ازسه روش استفاده شده است.

در روش اول ابتدا ریشه دوم ماتریس A محاسبه و سپس در بردار $\vec{c}$ ضرب می شود ولی در روشهای دوم و سوم $A^{1/2}\vec{c}$ به طور مستقیم تقریب میشود. تفاوت این سه روش در دقت و زمان اجرای محاسبات است که روشهای دوم و سوم به مراتب سریعتر و دقیقتر از روش اول می‌باشند. همچنانکه گفته شد در روش اول ابتدا ریشه دوم ماتریس A محاسبه میشود. برای محاسبه ریشه دوم به شکل سه قطری A و مقادیر ویژه آن نیاز است لذا فصل دوم این پایان نامه به تعیین مقادیر ویژه یک ماتریس و روشهای سه قطری کردن آن اختصاص داده شده است.

(۱) *Allen* (۲) *Boyd* (۳) *Baglama*

در فصل اول مفاهیم و تعاریف مقدماتی و همچنین قضایایی که در فصلهای بعدی به آنها رجوع شده آورده شده است.

در فصل سوم محاسبه ریشه دوم یک ماتریس در حالت کلی مورد بحث و بررسی قرار گرفته و نتایج حاصله با چند مثال توضیح داده شده است.

در فصل چهارم به تقریب مستقیم $A^{1/2}\vec{c}$ با استفاده از روش تکراری نیوتن و روش کنترل - گام پرداخته شده و نتایج حاصله تجزیه و تحلیل شده است.

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف و قضایایی از جبر خطی را که در فصلهای بعدی، دانستن آنها ضروری به نظر می‌رسد بیان می‌گردد. فرض بر آنست که خواننده با مفاهیم اولیه جبر خطی آشنائی دارد.

تعریف ۱-۱

ماتریس $m \times n$، A رابه صورت مجموعه مرتبی از mn عدد حقیقی(یا مختلط) a_{ij} که به صورت

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

نوشته می شود تعریف می کنیم .اعداد a_{ij} را درایه های ماتریس A می نامند.لـذا Aرا از مرتبه $m \times n$ یا با بعد $m \times n$می گویند.درایه a_{ij}درسطر iام وستون jام قرار دارد.

گاهی اوقات ماتریس Aبه صورت خلاصه تر $A = (a_{ij})$ نوشته می شود.

یک بردارستونی عبارت است از ماتریسی که فقط شامل یک ستون باشد.مثلا ماتریس

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

که از مرتبه $m\times 1$ می باشدبه بردارستونی با بعد mموسوم است.

یک بردار سطری عبارت است از ماتریسی که فقط یک سطر دارد.مثلا ماتریس

$$[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$$

که از مرتبه $1\times n$ می باشد به بردار سطری با بعد n موسوم است.

تعریف ۲-۱

ماتریس مربعی L را پائین مثلثی گوئیم هر گاه:

$$\forall i,j: i<j \quad , \quad l_{ij}=0$$

تعریف ۳-۱

ماتریس مربعی U را بالا مثلثی گوئیم هر گاه :

$$\forall i,j: \ i>j \ , \ u_{i,j}=0$$

تعریف ٤-۱

ماتریس مربعی D را یک ماتریس قطری گوئیم هر گاه

$$\forall i,j: i\neq j \quad , \ d_{ij}=0$$

یک ماتریس قطری بشکل زیر نمایش داده میشود.

$$D=diag(d_1,d_2,\ldots,d_n)$$

که در آن $\quad d_i=D_{ii} \ , \ i=1,2,\ldots,n$

تعریف ٥-۱

ماتریس $n\times m$، B را ترانهاده ماتریس $A, m\times n$ گویند هر گاه : $\forall i,j \quad , \quad b_{ji}=a_{ij}$

ترانهاده یک ماتریس را با نماد A^T نمایش میدهند. مزدوج ترانهاده ماتریس A را با A^* نمایش داده می دهند.

روابط زیر برای ماتریسهای متقارن برقرار است.

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(A^T)^T = A$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$

تعریف ۶-۱

ماتریس مربعی A را متقارن گویند هر گاه : $A^T = A$

تعریف ۷-۱

ماتریس مربعی A دارای معکوس چپ می‌باشد هر گاه ماتریسی مانند B وجــود داشــته باشد به نحوی که $BA = I$

اگر ماتریسی مانند C وجود داشته باشد به طوریکه : $AC = I$

آنگاه A دارای معکوس راست می‌باشد. اگر $B = C$ در اینصورت A معکوس پذیر است و B را معکوس ماتریس A گونیم و با نماد A^{-1} نمایش میدهند.

می‌توان نشان داد که :

۱) معکوس یک ماتریس در صورت وجود، منحصر بفرد است.

۲) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

۳) اگر $D = diag(d_1, d_2, ..., d_n)$ و $d_i \neq 0, i = 1,2,...,n$ آنگاه

$$D^{-1} = diag(d_1^{-1}, ..., d_n^{-1}),$$
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

تعریف ۸-۱

فرض کنید $A \in R^{m \times n}$ ، $i = (i_1, i_2, ..., i_r)$ ، $j = (j_1, j_2, ..., j_c)$ بردارهای صحیح باشند.

به طوریکه
$$i_1, i_2, ..., i_r \in \{1,2,..., m\}$$
$$j_1, j_2, ..., j_c \in \{1,2,...., n\}$$

ماتریس $A(i, j), r \times c$ را زیر ماتریس $A \in R^{m \times n}$ گویند و به صورت زیر نشان می دهند.

$$A(i, j) = \begin{bmatrix} A(i_1, j_1) & \cdots & A(i_1, j_c) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ & \cdots & \\ A(i_r, j_c) & \cdots & A(i_r, j_c) \end{bmatrix}$$

تعریف ۹-۱

فضای برداری V روی مجموعه اعداد حقیقی عبارت است از :

۱) یک عمل بنام جمع‌برداری روی مجموعه V که V با عمل جمع برداری تشکیل یک گروه آبلی دهد.

۲) یک عمل بنام ضرب اسکالر که از $R \times V$ در V تعریف میشود و دارای خواص زیر می‌باشد.

$$\forall v \in V \qquad 1 \times v = v$$
$$\forall\ a, b \in R\ , \forall v \in V \qquad (ab)v = a(bv)$$
$$\forall\ a \in R,\ \forall v_1, v_2 \in V \qquad a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$$
$$\forall\ a, b \in R, \forall v \in V \qquad (a + b)v = av + bv$$

عناصر V را بردار و عناصر R را اسکالر گویند.