بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين الرحمن الرحيم مالك يوم الدين اياك نعبد واياك نستعين اهدنا الصراط المستقيم صراط الذين انعمت عليهم غير المغضوب عليهم ولا الضالين

۹۶۰۱۲

دانشگاه جامع پیام‌نور استان فارس
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

توسیعی از حلقه‌های کامل، نیمه کامل و نیمه منظم

پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی

توسط
امیر علی‌یان

استاد راهنما
دکتر احمد خاکساری

شهریور ١٣٨٦

دانشگاه جامع پیام‌نور استان فارس

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

۱۳۸۷/۱۲/۱۴

تصویب‌نامه

پایان نامه تحت عنوان: توسیعی از حلقه‌های کامل، نیمه کامل و نیمه منظم

که توسط: **امیر علی‌یان** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی دانشگاه جامع پیام هنور استان فارس تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می‌باشد.

تاریخ دفاع: **۱۰ شهریور ۱۳۸۶**

نمره: **۱۸** درجه ارزش‌یابی: **عالی**

اعضاء هیأت داوران

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- دکتر بهمن یوسفی	استاد ممتحن	استاد	
۲- دکتر احمد خاکساری	استاد راهنما	استادیار	
۳- دکتر منصوره معانی شیرازی	استاد مشاور	استادیار	
۴- دکتر عبدالرسول قرائتی	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	۸۶/۶/۱۰

تقدیم به:

ارواح پاک شهداء

سپاس‌گزاری

چه با شکوه است تصور ایامی که تنها حاکم عالم، دادگستری چون قائم آل محمد (صلی الله علیه وآله) باشد، و چه زیباست زندگی در روزگاری که پرچمی جز پرچم توحید در اهتزاز نباشد و ندایی جز ندای حق به گوش جهانیان نرسد، دورانی سرشار از عطوفت، مهربانی، عدالت، آزادگی و کرامت انسانی.

شکر و سپاس خدای مهربان که بار گران آموختن را به من ارزانی نمود. هرگز نمی‌توان گفت از چه کسانی و چه اندازه باید سپاس‌گزاری نمود اما برای تقدیم عشق و ستایش و سپاس‌گزاری، خانواده عزیز و استاد بزرگوار جناب **آقای دکتر خاکساری** را برمی‌گزینم.

چکیده

توسیعی از حلقه‌های کامل، نیمه کامل و نیمه منظم

بوسیله‌ی

امیر علی یان

برای یک حلقه R و یک R مدول راست M، یک زیر مدول N از M را δ-کوچک در M گوییم،اگر داشته باشیم N+X=M با M/X منفرد، تساوری X=M را نتیجه دهد. اگر یک همریختی پوشای $p: \mathrm{P} \rightarrow M$ وجود داشته باشد بطوری که P تصویری و Ker(p) در p، δ- کوچک باشد آنگاه p را یک δ- پوشش تصویری ازM گوییم. یک حلقه R، δ- کامل (δ- نیمه کامل ، δ- نیمه منظم) است اگر هر R - مدول (R — مدول ساده، R- مدول دوری) یک δ- پوشش تصویری داشته باشد. رده‌ای از همه حلقه های δ- کامل (δ- نیمه کامل، δ- نیمه منظم) رده‌ای از همه حلقه‌های کامل (نیمه کامل، نیمه منظم) را شامل می‌شود در این پایان نامه به بررسی ویژگی‌های از حلقه‌های δ- کامل ، δ- نیمه کامل و δ- نیمه منظم خواهیم پرداخت.

ما (R) δ را بوسیله $\delta(R)/Soc(R_R)=Jac(R/Soc(R_R))$ تعریف می‌کنیم و بقیه نتایج را در موارد زیر می‌بینیم:

۱- (R)δ بزرگترین ایدال راست δ- کوچک از R است.

۲- R، δ- نیمه منظم است اگر و تنها اگر $R/\delta(R)$ حلقه منظم فون نیومن باشد و خود توانهای $R/\delta(R)$ به R ارتقاء یابند.

۳-R ، δ - نیمه کامل است اگر و تنها اگر $R/\delta(R)$ حلقه نیمه ساده باشد و خودتوانهای $R/\delta(R)$ به R ارتقاء یابند.

۴- R، δ- کامل است اگر و تنها اگر $R/Soc(R_R)$ یک حلقه راست کامل باشد و خود توانهای $R/\delta(R)$ به R ارتقاء یابند.

این پایان نامه برگرفته از مقاله زیر است:

Algebra Collquium 7.3(2000)305-318.

Generalizations of perfect,semiperfect and semiregular Rings.

yiqiang zhou.

فهرست

فصل ۱

مقدمه و تعاریف اولیه

۱ مقدمه و تعاریف اولیه

در این پایان‌نامه ویژگی‌ها و خصوصیات گوناگون حلقه‌های δ_کامل، δ_نیمه کامل و δ_نیمه منظم‌ها را شرح می‌دهیم که رده‌ی همه حلقه‌های کامل، نیمه کامل و نیمه منظم همه حلقه‌های راست کامل، راست نیمه کامل و راست نیمه منظم را به طور کامل پوشش می‌دهند. حلقه‌های راست کامل، نیمه کامل و نیمه منظم کلاس‌هایی از حلقه‌ها را تشکیل می‌دهند که خواص همسان و غیرهمسانی را دارا می‌باشند.

چون باس پیشگام کار بر روی حلقه‌های راست کامل نیمه کامل است تعداد زیادی تألیف از ایشان در این زمینه وجود دارد.

در این پایان‌نامه به طور کلی با حلقه‌های راست کامل، نیمه کامل و نیمه منظم با توجه به رده‌ای از همه R_مدول‌های منفرد، متعلق به رده‌ی R_مدول‌ها آشنا می‌شویم.

$\delta(R)$ را به صورت $\delta(R)/Soc(R_R) = Jac(R/SocR_R)$ تعریف می‌کنیم و نتایج دیگری را در موارد زیر می‌بینیم:

۱) $\delta(R)$ بزرگترین ایدآل راست δ_کوچک از R است.

۲) R، δ_نیمه منظم است اگر و تنها اگر $R/\delta(R)$ یک حلقه منظم فون نیومن باشد و خودتوان‌های $R/\delta(R)$ به R ارتقاء داده شود.

۳) R، δ_نیمه کامل است اگر و تنها اگر $R/\delta(R)$ یک حلقه نیمه‌ساده باشد و خودتوان‌های $R/\delta(R)$ به R ارتقاء داده شود.

۴) R، δ_کامل است اگر و تنها اگر $R/Soc(R_R)$ یک حلقه کامل راست باشد و خودتوان‌های $R/\delta(R)$ به R ارتقاء داده شود.

در سرتاسر این پایان‌نامه فرض می‌کنیم R یک حلقه شرکت‌پذیر با عضو همانی است و مدول‌ها، R مدول‌های راست یکانی هستند.

در ادامه، تعاریف اولیه مورد نیاز ذکر می‌شود.

در فصل دوم مفهومی از زیرمدول‌های δ_کوچک و خواص آنها مطرح می‌شود که خود توسط پوشش‌های تصویری تعریف شده و کلید خوبی برای مقدمه حلقه‌های کامل، نیمه‌کامل و نیمه منظم است.

در فصل سوم مطالبی از δ_پوشش‌های تصویری گفته می‌شود. برخلاف پوشش‌های تصویری، δ_پوشش‌های تصویری یک مدول منحصر به فرد نیستند.

در فصل چهارم صفات اختصاصی و گوناگون کسب شده برای یک حلقه R که هر R_مدول (R مدول ساده، R مدول دوری) آن یک پوشش تصویری داشته باشد را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل پنج با استفاده از مثال‌ها مفهوم‌های قبلی روشن می‌شوند.

۱.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱.۱: زیر مدول K از M را اساسی در M گویند هر گاه اشتراک K با هر زیرمدول غیر صفر دیگر از M غیرصفر شود. و با $K \leq_e M$ نمایش می‌دهیم. به عبارتی دیگر $K \leq_e M$ اگر و تنها اگر هر چه باشد $a \in M$ وجود داشته باشد$r \in R$ به طوری که $ra \in K$.

تعریف ۲.۱.۱: صفرساز مدول B در حلقه R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Ann_R(B) = \{r \in R \mid rb = \circ \quad b \in B\}$$

تعریف ۳.۱.۱: مجموعه $Z(M)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Z(M) = \{x \in M | Ann(x) \leq_e R_R\} = \{x \in M \mid xI = \circ, I \leq_e R_R\}$$

یک زیرمدول از M است و آن را زیرمدول منفرد از M گوییم. حال اگر $Z(M) = M$، M یک مدول منفرد است. و اگر $Z(M) = \circ$، M یک مدول نامنفرد است.

تعریف ۴.۱.۱: زیرمدول N از M را کوچک در M گویند هر گاه $M = N + L$ (L زیرمدول M) نتیجه دهد $M = L$ و با $L \ll M$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱: اگر $Z(M)$ زیرمدول منفرد از M باشد $Z_۲(M)$ را به صورت

$$Z(M/Z(M)) = Z_۲(M)/Z(M)$$

تعریف می‌کنیم. اگر $M = Z_۲(M)$ آنگاه M را تاب طلایی گوییم.

تعریف ۶.۱.۱: به یک جفت (P,p) یک پوشش تصویری از M گویند هر گاه P تصویری و همریختی پوشای $P \xrightarrow{p} M \longrightarrow \circ$ کوچک باشد یعنی $\ker p \ll P$.

تعریف ۷.۱.۱: فرض کنید I یک ایدآل از R باشد آنگاه عنصر w در R/I به عنصر x از R ارتقاء داده می‌شود هر گاه $w = x + I$. هر خودتوان R/I را می‌توان به یک خودتوان I ارتقاء داد.

تعریف ۸.۱.۱: سوکل مدول M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Soc(M) = \bigcap\{L \leq M | L \leq_e M\}$$

تعریف ۹.۱.۱: رادیکال ژاکبسون R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J(R) = \bigcap\{m| \text{ یک ایده‌ل ماکسیمال در } R \text{ } m\}$$

تعریف ۱۰.۱.۱: عنصر a از حلقه R، منظم (به مفهوم فون نیومن) گویند هر گاه $x \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $axa = a$.

تعریف ۱۱.۱.۱: اگر هر عنصر R منظم باشد آنگاه گوییم R یک حلقه منظم است.

تعریف ۱۲.۱.۱: هر گاه تمام عناصر یک حلقه دارای یکی از شرایط زیر باشند آن حلقه را نیمه منظم گویند.

۱. وجود داشته باشد $e^2 = e \in aR$ به طوری که $(1-e)a \in J(R)$،

۲. وجود داشته باشد $e^2 = e \in Ra$ به طوری که $a(1-e) \in J(R)$،

۳. عنصرهای منظم $a, b \in R$ وجود داشته باشند به طوری که $a - b \in J(R)$،

۴. وجود داشته باشد $b \in R$ با $bab = b$ به طوری که $a - aba \in J(R)$.

تعریف ۱۳.۱.۱: حلقه R را نیمه کامل گویند هر گاه $R/J(R)$ نیمه ساده و خودتوان‌هایش را بتوان به مدول $J(R)$ ارتقاء داد.

تعریف ۱۴.۱.۱: حلقه‌ای را کامل گویند هر گاه هر مدول آن یک پوشش تصویری داشته باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱: به مجموعه I از خلقه R، T-پوچ توان چپ (راست) گویند هر گاه برای هر دنباله $a_1, a_2, \ldots$ در I یک n وجود داشته باشد به طوری که

$$a_1 \cdots a_n = 0 \qquad (a_n \cdots a_1 = 0)$$

تعریف ۱۶.۱.۱: یک مدول را وفادار گویند هرگاه صفرساز آن برابر صفر شود.

تعریف ۱۷.۱.۱: $Rej_X(M)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Rej_X(M) = \cap\{Imh \mid h : U \longrightarrow M, X \in X\}$$

که در آن X خانواده‌ای از مدول‌هاست.

تعریف ۱۸.۱.۱ : $Tr_M(x)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم: (برای خانواده X از مدول‌ها)

$$Tr_M(X) = \sum\{Imh \mid h : U \longrightarrow M, U \in X\}$$

تعریف ۱۹.۱.۱ : $x \in R$ را شبه منظم راست گویند اگر $(1-x)$ در R معکوس راست داشته باشد.

تعریف ۲۰.۱.۱ : فرض کنید که $a_1, ..., a_n$ یک دنباله در حلقه R باشد و F یک Rـمدول آزاد با پایه $x_1, x_2, ...$. فرض کنید $y_n = a_n - x_{n+1}a_n$ $(n \in N)$ و متناهی باشند و فرض کنید G پدید آمده از $y_1, y_2, ...$ یک زیرمدول از F باشد. آنگاه برای G داریم:

۱) G یک مدول آزاد با پایه $y_1, y_2, ...$ است.

۲) $G = F$ اگر و تنها اگر برای هر $k \in N$ یک $n \geq k$ وجود داشته باشد به طوری که $a_k \cdots a_n = 0$.

۳) اگر G یک جمعوند مستقیم از F باشد آنگاه زنجیره $\cdots \geq Ra_2a_1 \geq Ra_1$ از ایدآل‌های اصلی متناهی است.

فصل ۲

زیرمدول‌های δ_کوچک

۲ زیرمدول‌های δ_کوچک

این فصل مقدمه کلی از زیرمدول‌های کوچک و δ_کوچک است و خواص گوناگون از زیرمدول‌های δ_کوچک به ما می‌دهد.

۱.۲

تعریف ۱.۱.۲: فرض کنید M یک مدول و N زیرمدولی از آن باشد، به N در M، δ_کوچک گویند هرگاه برای هر زیرمدول K از M با M/K منفرد داشته باشیم $M = N + K$ و از $M \ll_\delta N$ جهت نمایش آن استفاده می‌کنیم.

هر زیرمدول کوچک یا زیرمدول ساده‌ی نامنفرد از M، یک δ_کوچک در M است، هر زیرمدول δ_کوچک از یک مدول منفرد یک زیرمدول کوچک است. در لم بعدی که بارها مورد استفاده قرار می‌گیرد مفهوم زیرمدول‌های کوچک و زیرمدول‌های δ_کوچک را به پایان می‌رسانیم.

لم ۲.۱.۲: فرض کنید که N یک زیرمدول M باشد. موارد زیر با یکدیگر معادلند:

۱) $N \ll_\delta M$،

۲) اگر $X + N = M$، برای یک زیرمدول نیمه‌ساده تصویری Y با $Y \subseteq N$ داریم $M = X \oplus Y$،

۳) اگر $X + N = M$ و M/X تاب طلایی باشد آنگاه $X = M$.

اثبات: ۲ $\longrightarrow$ ۱) فرض کنید $X + N = M$. با استفاده از لم زرن زیرمدول ماکسیمال Y از N وجود دارد به طوری که $X \cap Y = ۰$.

ما ادعا می‌کنیم که $Y + (N \cap X)$ الزاماً در N اساسی است. برای دیدن آن فرض کنید $0 \neq a \in N$، ما فرض می‌کنیم که ممکن است $a \notin Y$، با توجه به ماکسیمال بودن Y ما داریم که $X \cap (Y + aR) \neq 0$. $x \in X$ را برابر $y + ar$ می‌گیریم ($0 \neq x = y + ar$) آنگاه $x = ar$ اگر و تنها اگر y در $(N \cap X) + Y$ باشد، چون $X \cap Y = 0$ ما داریم که $ar \neq 0$ این نشان می‌دهد که $(N \cap X) + Y$ الزاماً یک زیرمدول اساسی از N است.

لذا $M/(X + Y) = (X + N)/(X + Y) \cong N/[(N \cap X) + Y]$ یک یکریختی منفرد است چون $(X + Y) + N = M$ با استفاده از (۱) ما داریم $M = X \oplus Y$. برای دیدن اینکه Y یک نیمه‌ساده است A را یک زیرمدول از Y در نظر بگیرید. آنگاه $X = A + N = M$.

اگر در بحث بالا $X + A$ را با X جایگزین کنیم آنگاه داریم که $X + A = X \oplus A$ که یک جمعوند مستقیم از M است بنابراین Y یک نیم‌ساده است. برای هر کجا که Y_n نامنفرد باشد می‌نویسیم $Y = Z(Y) \oplus Y_n$ آنگاه $M/(X \oplus Y_n) = X \oplus Y/X \oplus Y_n \cong Z(Y)$ منفرد است. چون $M = (X + Y_n) + N$ با استفاده از (۱) $X \oplus Y_n = M$. این نشان می‌دهد که $Z(Y) = 0$ بنابراین Y تصویری است.

(۲ $\longrightarrow$ ۳

فرض کنید $M = K + N$ و M/K تاب طلایی باشد.

با استفاده از (۲) برای هر جا که Y نیمه‌ساده تصویری است $M = K \oplus Y$ و لذا $Y \cong M/K$، یک تاب طلایی است. که این الزاماً $Y = 0$ را نتیجه می‌دهد. و بنابراین $M = K$.

(۳ $\longrightarrow$ ۱

اگر M/X تاب طلایی باشد آنگاه M/X منفرد است و با توجه به $M = X + N$ تعریف δ_کوچک حاصل می‌شود. ■

قضیه ۳.۱.۲:

(۱) فرض کنیم A و B و C مدول باشند به طوری که $A \leq B \leq C$ آنگاه $A \leq_e C$ اگر و تنها اگر

$B \leq_e C$ و $A \leq_e B$.

(۲) فرض کنید A_1 و A_2 و B_1 و B_2 زیرمدول‌های از مدول C باشند. اگر $A_1 \leq_e B_1$ و $A_2 \leq_e B_2$ آنگاه $A_1 \cap A_2 \leq_e B_1 \cap B_2$.

(۳) فرض کنید A یک زیرمدول از مدول C و $f : B \longrightarrow C$ یک همریختی باشد. اگر $A \leq_e C$ آنگاه $f^{-1}(A) \leq_e B$.

(۴) فرض کنید M مدول و N و K زیرمدول‌های M. آنگاه $H \leq_e M$ و $K \leq_e M$ اگر و تنها اگر $H \cap K \leq_e M$.

(۵) فرض کنید $\{A_i \mid i \in I\}$ و $\{B_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ای از زیرمدول‌های مدول c باشند اگر هر A_i مستقل و $B_i \leq_e A_i$ آنگاه B_i مستقل از $\oplus A_i \leq_e \oplus B_i$.

اثبات:

(۱) اگر $A \leq_e C$ آنگاه واضح است که $A \leq_e C$. چون هر زیرمدول غیرصفر از C با A اشتراک غیرصفر دارد، هر زیرمدول غیرصفر از C با B نیز اشتراک غیرصفر دارد بنابراین $B \leq_e C$.

برعکس، فرض می‌کنیم که $A \leq_e B \leq_e C$. برای هر زیرمدول $M \leq C$ داریم $B \cap M \neq 0$ زیرا $B \leq_e C$. پس هر $B \cap M$ یک زیرمدول از B است و همچنین $A \cap B \cap M \neq 0$ زیرا $A \leq_e B$. لذا $A \cap M \neq 0$ که نتیجه می‌دهد $A \leq_e C$.

(۲) برای هر زیرمدول غیرصفر $M \leq B_1 \cap B_2$ ما داریم که $A_2 \cap M \neq 0$ زیرا $A_2 \leq_e B_2$. لذا $A_2 \cap M$ یک زیرمدول غیرصفر از B_1 است و همچنین $A_1 \cap A_2 \cap M \neq 0$ زیرا $A_1 \leq_e B_1$ بنابراین $A_1 \cap A_2 \ll_e B_1 \cap B_2$.

(۳) فرض کنید M هر زیرمدول از B باشد اگر $f(M) = 0$ آنگاه $M \leq f^{-1}(A)$ و لذا $f^{-1}(A) \cap M \neq 0$. اگر $f(M) \neq 0$ آنگاه $A \cap f(M) \neq 0$ زیرا $A \leq_e C$. بنابراین $f^{-1}(A) \cap M \neq 0$ لذا $f^{-1}(A) \leq_e B$.

(۴) فرض کنید $K \leq_e M$ و $H \leq_e M$. اگر $L \leq M$ با $L \cap H \cap K = 0$ آنگاه $L \cap H = 0$ زیرا $K \leq_e M$. لذا $L = 0$ زیرا $H \leq_e M$ طرف دیگر از قسمت (۱) حاصل می‌شود.

(۵) واضح است. ■

قضیه ۴.۱.۲:

(۱) مدول M منفرد است اگر و تنها اگر $M \cong \frac{B}{A}$ برای بعضی مدول‌های B و زیرمدول‌های اساسی A از آن.

(۲) فرض می‌کنیم A زیرمدولی از مدول غیرمنفرد B باشد. $\frac{B}{A}$ منفرد است اگر و تنها اگر $A \leq_e B$.

اثبات:

(۱) فرض کنید M یک مدول حلقه R باشد. M را با $\frac{B}{A}$ یکریخت می‌گیریم (برای بعضی R_مدول‌های A که $A \leq_e B$).

برای هر $b \in B$ یک ایدآل $I = \{r \in R \mid br \in A\}$ را داریم که با استفاده از قضیه (۳.۱.۳) قسمت (۳) و در نظر گرفتن همریختی $f : R \longrightarrow B$ ایدآل $I = f^{-1}(A)$ در R اساسی است پس $\frac{B}{A}$ منفرد است از طرف دیگر فرض کنید $\frac{B}{A}$ منفرد باشد M را با $\frac{F}{K}$ یکریخت در نظر می‌گیریم. (برای بعضی R_مدول‌های آزاد F و بعضی زیرمدول‌های K از F).

یک پایه $\{x_j \mid j \in J\}$ را برای F انتخاب می‌کنیم. برای هر $j \in J$ ایدآل اساسی I_j در R وجود دارد به طوری که $x_jI_j \leq k$ زیرا $\frac{F}{K}$ منفرد است. با استفاده از قضیه قبل از آنجا که $\bigoplus_J x_jI_j \leq_e \bigoplus_J x_jR$ لذا $K \leq_e F$.

(۲) فرض کنید که B یک مدول راست بر روی حلقه R باشد. با توجه به قسمت (۱) اگر $A \leq_e B$ آنگاه $\frac{B}{A}$ منفرد است.

از طرف دیگر فرض می‌کنیم $\frac{B}{A}$ منفرد باشد عنصر x را از زیرمدول C از B در نظر می‌گیریم چون $\frac{B}{A}$ منفرد است ایدآل $I \leq_e R$ وجود دارد به طوری که $xI \leq A$. از آنجا که B غیرمنفرد است $xI \neq 0$ نتیجه می‌دهد که $A \cap C \neq 0$ بنابراین $A \leq_e B$.

لم ۵.۱.۲: فرض کنید M یک مدول باشد.

۱. برای زیرمدول‌های N، K و L از M با $K \subseteq N$ ما داریم،

الف) $N \ll_\delta M$ اگر و تنها اگر $K \ll_\delta M$ و $N/K \ll_\delta M/K$،

ب) $N + H \ll_\delta M$ اگر و تنها اگر $N \ll_\delta M$ و $H \ll_\delta M$،

۲. اگر $K \ll_\delta M$ و $f : M \longrightarrow N$ یک همریختی باشد آنگاه $f(K) \ll_\delta N$. به خصوص اگر $K \ll_\delta M \subseteq N$ آنگاه $K \ll_\delta N$،

۳. فرض کنید $K_۱ \subseteq M_۱ \subseteq M$ و $K_۲ \subseteq M_۲ \subseteq M$ و $M = M_۱ \oplus M_۲$ آنگاه $K_۱ \oplus K_۲ \ll_\delta M$ اگر و تنها اگر $K_۱ \ll_\delta M_۱$ و $K_۲ \ll_\delta M_۲$.

اثبات:

۱ــ الف: $N \ll_\delta M$ آنگاه $N + L = M$ با $\frac{M}{L}$ منفرد که نتیجه می‌دهد $L = M$

$$N/K + L/K = M/K \Longrightarrow \frac{M/K}{L/K} \cong \frac{M}{L}$$

و M/L منفرد است.

$$M/K = (N + L)/K = L/(N \cap K) = L/K \Longrightarrow N/K \ll_\delta M/K$$

و واضح است که $K \ll_\delta M$.

۱ــ ب: $N + L = M$ نتیجه می‌دهد که $L = M$ پس $M = L + H + K$ با $\frac{M}{L}$ منفرد پس $H + K$ در M، δـکوچک است.

از طرف دیگر $K + H \ll_\delta M$ یعنی $K + H + L = M$ با $\frac{M}{L}$ منفرد. پس $L = M$ که $H + L = M$ با $\frac{M}{L}$ منفرد نتیجه می‌دهد $H \ll_\delta M$ برای زیرمدول K نیز بدین صورت حاصل می‌شود.

۲ــ فرض کنید $L \leq M$ و $N = L + f(K)$ آنگاه $\overleftarrow{f(L)} + k = M$ چون $K \ll_\delta M$، این نتیجه می‌دهد که $M/\overleftarrow{f(L)}$ منفرد است، با $\overleftarrow{f(K)} \leq_e M$. با توجه به تعریف زیرمدول اساسی $K \subseteq \overleftarrow{f(L)}$ پس $f(K) \leq L$ لذا $N = L$.

(۳) فرض کنید $p_i : M \longrightarrow M_i$ یک تصویر M به M_i به موازات M_j باشد $(i \neq j)$، لذا $K_i = p_i(K_i)$.

نتیجه از قسمت (۲) حاصل می‌شود. بر عکس اگر $K_i \ll_\delta M_i \leq M \quad (i = ۱, ۲)$ آنگاه از قسمت (۱—ب) و (۲) داریم

$$K_۱ \oplus K_۲ = K_۱ + K_۲ \ll_\delta M_i.$$

■

تعریف ۶.۱.۲: فرض کنید S رده‌ای از همه مدول‌های ساده منفرد باشد برای یک مدول M

$$\delta(M) = \cap\{N \subseteq M | M/N \in S\}$$

لم ۷.۱.۲: فرض کنید M و N مدول باشند:

۱. $\delta(M) = \sum\{L \subseteq M | L \ll_\delta M\}$.

۲. اگر $f : M \longrightarrow N$ یک R_همریختی باشد آنگاه $f(\delta(M)) \subseteq \delta(N)$ از این رو $\delta(M)$ یک زیرمدول تغییرناپذیر کامل از M است و $M.\delta(R_R) \subseteq \delta(M)$.

۳. اگر $M = \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$ آنگاه $\delta(M) = \bigoplus\limits_{i \in I} \delta(M_i)$.

۴. اگر هر زیرمدول سره از M در یک زیرمدول ماکسیمال از M قرار داشته باشد آنگاه $\delta(M)$ بزرگترین زیرمدول δ_کوچک منحصر به فرد از M است.

اثبات:

۱— فرض کنید $L \ll_\delta M$. اگر K زیرمدول ماکسیمال اساسی از M باشد و اگر $L \nleq K$ آنگاه $L + K = M$ اما چون $L \ll_\delta M$، داریم $K = M$ که یک تناقض است.

بنابراین هر زیرمدول δ_کوچک از M در $\delta(M)$ قرار دارد. از طرف دیگر فرض می‌کنیم $x \in \delta(M)$. اگر $N \leq M$ با $Rx + N = M$ را داشته باشیم آنگاه یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد.

یا $N = M$ است یا M زیرمدول ماکسیمال اساسی K را دارد به طوری که $N \leq K$ و $x \notin K$. اگر $x \in \delta(M)$ آنگاه مورد دوم اتفاق نمی‌افتد نتیجه می‌دهد $x \in \delta(M)$ و $Rx \ll_\delta M$.