ارائه‌شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

# ساختار اشتقاق‌های لی روی $C^*$-جبرها

**استاد راهنما:**

دکتر علیرضا جانفدا

**نگارنده:**

محبوبه سرچاهی

پاییز ۱۳۸۹

# تقدیر و تشکر

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم ودانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم معرفت را روزیمان ساخت.

اکنون در آستانه راهی نو به پاس پروردگار بر خود لازم می‌دانم سپاس گذار تمامی عزیزانی باشم که در برابر سختی ها و ناملایمات روزگار یاریم نمودند.

سپاس فراوان از پدر ومادرم استوره های صبر، محبت، گذشت و شمع های فروزان زندگیم.

مراتب تشکر و سپاس خود را از استاد راهنمای ارجمند جناب آقای **دکتر علیرضا جانفدا** ابراز می‌دارم که با را هنمایی‌ها و هدایت گرانبهاشان مرا در تدوین این پایان نامه یاری فرمودند.

از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر اسدی و جناب آقای دکتر میری که با وجود مشغله‌ی کاری زیاد قبول زحمت فرمودند و داوری این پایان نامه را به عهده گرفتند بسیار سپاسگذارم.

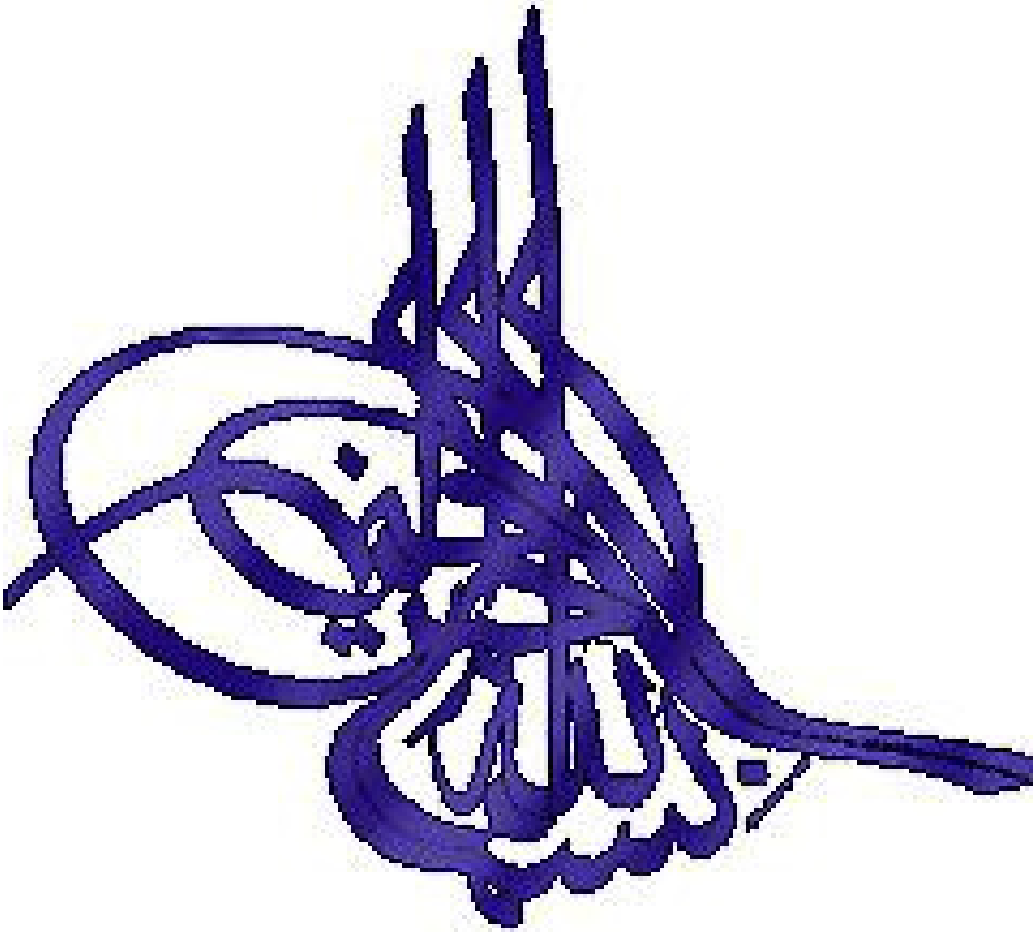
از کلیه دوستان و همکلاسی های عزیزم صمیمانه تشکر می کنم.

**تقدیم به آنهایی که حقیقت بر دل و جانشان تجلی کرده است اگر چه از این اوراق بی بها مستغنی اند.**

با سپاس فراوان

محبوبه سرچاهی

پاییز۸۹


بسم الله الرحمن الرحيم

# چکیده

نشان می‌دهیم که هر اشتقاق لی روی یک $C^*$-جبر به شکل استاندارد است، یعنی می‌تواند به طور یکتا به مجموع یک اشتقاق لی و یک اثر مرکز مقدار تجزیه شود.

**کلمات کلیدی**: اشتقاق، اشتقاق لی، $C^*$-جبر.

# فهرست مندرجات

# مقدمه

جانسون[1] در سال ۱۹۹۶ ثابت کرد که هر اشتقاق لی پیوسته $D$ از یک $C^*$- جبر $A$ به $A$-دو مدول باناخ $X$ می‌تواند به صورت $D = d + \tau$ تجزیه شود که در آن $d: A \to X$ یک اشتقاق معمولی و $\tau$ یک نگاشت خطی پیوسته از $A$ به مرکز $X$ است.

در [10] این حکم با روش‌های کوهمولوژیکی یعنی مفهوم میانگین‌پذیری متقارن و در حقیقت برای جبرهای باناخ میانگین پذیر متقارن به دست آمده است. در[22] ویلنا[2] ساختار اشتقاق‌های لی را که لزوما کراندار نیستند روی جبرهای باناخ یکدار بررسی کرد. وی ثابت کرد اگر $D: A \to A$ یک اشتقاق لی روی جبر باناخ $A$ (یکدار، مختلط) باشد آن‌گاه اشتقاق لی القا شده طبیعی $D_p : A \to \frac{A}{P}$ به مجموع یک اشتقاق $d_p$ روی $\frac{A}{P}$ و تابعک خطی $\tau_P$ روی $A$ برای تقریبا همه ایده‌آل‌های اولیه تجزیه می‌شود. که عبارت تقریبا همه به این معنی است که یک مجموعه متناهی از ایده آل‌های اولیه وجود دارد که این حکم برای آنها برقرار نمی‌باشد، به هر حال اگر $D$ یک اشتقاق لی پیوسته باشد آن‌گاه این مجموعه تهی است.

در [1] آرا[3] و متیو[4] بدون داشتن فرض کرانداری، نشان دادند که اشتقاق‌های لی روی $C^*$-جبرهای به قدر کافی ناجابجایی به شکل استاندارد تجزیه می‌شوند.

---

[1] Johnson
[2] Villena
[3] Ara
[4] Mathieu

در این پایان‌نامه در فصل ۱ به بررسی مفاهیم و قضایایی خواهیم پرداخت که در طول این پایان نامه مورد نیاز است. در فصل ۲، ساختار اشتقاق‌های لی روی جبرهای فون نیومن را بررسی می‌کنیم و در فصل ۳ با ترکیب روش‌هایی در [22],[1] یک دید تازه از اشتقاق‌های لی روی $C^*$-جبرها به پیمانه ایده آل‌های اولیه را بدست می‌آوریم

# فصل اول

## مفاهیم مقدماتی و قضایای پیش‌نیاز

## 1.1 مفاهیم مقدماتی و قضایای پیش‌نیاز

در این فصل به یادآوری و معرفی چند مفهوم خاص که در طول این پایان‌نامه مورد نیاز است می‌پردازیم از جمله جبر، جبر باناخ، $C^*$-جبر و امثال آن.

**تعریف۱.۱.۱** اگر $A$ یک فضای برداری بر میدان مختلط باشد نگاشت $f: A \times A \to A$ را یک نگاشت دوخطی روی $A$ می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b, c \in A$ و $\gamma \in C$ داشته باشیم:

$$f(a+b,c) = f(a,b) + f(b,c)$$

$$f(a,b+c) = f(a,b) + f(a,c)$$

$$f\left(\gamma a, b\right) = f\left(a, \gamma b\right) = \gamma f(a,b)$$

**تعریف ۲.۱.۱** یک جبر(حقیقی یا مختلط ) عبارتست از فضای برداری $A$ به همراه نگاشت دو خطی

$$\begin{cases} A \times A \to A \\ (x,y) \longmapsto x.y \end{cases}$$

که برای هر $x, y, z \in A$ و اسکالر $\lambda \in F$ داشته باشیم:

۱) $x(y+z) = x.y + x.z$

۲) $x.(y.z) = (x.y).z$

۳) $\lambda(x.y) = (\lambda x).y = x.(\lambda y)$

**تعریف۳.۱.۱** الف) جبر نرمدار $A$ عبارت است از جبر $A$ به همراه نرم $\|.\|$ و این خاصیت که برای هر $x, y \in A$:

$$\|x.y\| \leq \|x\|\|y\|$$

ب) جبر نرمدار$(A, \|.\|)$ را جبر باناخ گوییم هرگاه نسبت به این نرم یک فضای باناخ باشد. همچنین هر جبر باناخ $A$ را یکانی گوییم هرگاه نسبت به عمل ضرب عنصر همانی داشته باشد.

ج) زیر فضای خطی $B$ از $A$ را یک زیر جبر $A$ گوییم اگر برای هر $x, y \in B$ داشته باشیم $xy \in B$.

**تعریف۴.۱.۱** برگشت روی جبر $A$، یک نگاشت $x \to x^*$ از $A \to A$ است، که به ازای هر $\alpha \in F$ و هر $x, y \in A$ در شرایط زیر صدق کند:

۱) $(x+y)^* = x^* + y^*$

۲) $(xy)^* = y^* x^*$

۳) $x^{**} = x$

۴) $(\alpha x)^* = \bar{\alpha} x^*$

- جبری که با یک برگشت مجهز شده باشد، ⁕-جبر خوانده می‌شود. هر ⁕-جبر باناخ که در شرط زیر صدق کند، یک $C^*$-جبر گفته می‌شود:

$$\forall x \in A, \ \ \|x^* x\| = \|x\|^2$$

توجه کنید که $\|x\|^2 = \|xx^*\| \leq \|x\|\|x^*\|$ ایجاب می‌کند که $\|x\| \leq \|x^*\|$ و در نتیجه داریم:

$$\|x^*\| \leq \|x^{**}\| = \|x\|$$

لذا در هر $C^*$-جبر : $\|x^*\| = \|x\|$ و همچنین $\|xx^*\| = \|x\|\|x^*\|$.

- عنصر $a$ از *-جبر $A$ را خودالحاق گوییم اگر $a^* = a$. مجموعه همه عناصر خودالحاق مختلط $A$ را با $A_{sa}$ نشان می‌دهیم به عنوان مثال به ازای هر عنصر دلخواه $a$ از $A$، عناصر $a^*a$، $aa^*$، $\frac{a+a^*}{2}$ و $\frac{a-a^*}{2i}$ همگی خودالحاق هستند و هر عنصر دلخواه $a$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی $a = b + ic$ از عناصر خودالحاق $b = \frac{a+a^*}{2}$ و $c = \frac{a-a^*}{2i}$ نوشت.
- گوییم $a$ نرمال است اگر $a^*a = aa^*$ در این صورت *-جبری که مجموعه $\{a\}$ تولید می‌کند آبلی است و در حقیقت فضای خطی حاصل از همه ترکیبات خطی عناصری به شکل $a^m a^{*^n}$ که $m, n \in N$ است.
- اگر $A$ یکدار باشد، آن‌گاه $1^* = 1$ $(1^* = (11^*)^* = 1)$ اگر $a \in A$ معکوس‌پذیر باشد، که به طور خلاصه خواهیم نوشت، $a \in InvA$، آن‌گاه $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.
- عنصر $u$ در $A$ یکانی است اگر $u^*u = uu^* = 1$.

- اگر $C$ زیر مجموعه‌ای از $A$ باشد، قرار می‌دهیم: $S^* = \{a^*, a \in S\}$ در این صورت اگر $S = S^*$، گوییم $S$ خودالحاق است، یک زیر جبر خودالحاق از $A$، یک *-زیر جبر $A$ است و با تحدید برگشت روی $S$، $S$ خود یک *-جبر است.
- اشتراک خانواده‌ای از *-زیرجبرهای $A$ خود یک *-زیرجبر است برای هر زیرمجموعه $S$ از $A$ کوچکترین زیر جبر $B$ از $A$ حاوی $S$ وجود دارد که *-جبر تولید شده توسط $S$ نامیده می‌شود.

- اگر $I$ یک ایده‌آل خودالحاق از *-جبر $A$ باشد، جبر خارج قسمتی $\frac{A}{I}$ با برگشت داده شده به صورت $(a + I)^* = a^* + I$ $(a \in A)$ یک *-جبراست.

- فرض کنید $A$ یک جبر روی حلقه جابجایی $K$ باشد جبر افزوده $A^+$ عبارت است از $A\oplus K$ با جمع مولفه ای و ضرب داده شده زیر

$$(a,\lambda)(b,\mu)=(ab+\lambda b+\mu a,\lambda\mu) \qquad (a,b\in A\,,\lambda,\mu\in K)$$

توجه کنید $A^+$ جبر یکدار با عنصر همانی $(0,1)$ است. $A$ می‌تواند به عنوان ایده‌آل $A^+$ نمایش داده شود به طوری که $\frac{A^+}{A}\cong K$. وقتی $A$ یک $*$-جبر بر میدان اعداد مختلط باشد، $A^+$ با برگشت داده به صورت $(a,\lambda)^*=(a^*,\bar{\lambda})$ یک $*$-جبر است و $A$ یک ایده‌آل خودالحاق در $A^+$ است.

**تعریف۵.۱.۱** اگر $B$، زیر مجموعه‌ای از یک جبر $A$ باشد، جابجاگر آن را با $B'$ نشان می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B'=\{a\in A\,;ax=xa\ \ ,\forall x\in B\}$$

جابجاگر $A$ را مرکز $A$ گوییم.$B'$ یک زیر جبر $A$ است و همواره داریم:

$$B'=B'''$$

که در آن نماد $B'''$ به معنی $((B')')'$ است و جابجاگر سوم مجموعه $B$ نام دارد.

**تعریف۶.۱.۱** اگر $A$ یک مدول روی حلقه $R$ باشد، پوچساز $A$ را با نماد $A^{\perp}$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A^{\perp}=\{r\in R{:}\,ra=0\,,\forall a\in A\}$$

**تعریف۷.۱.۱**

- جبر $A$ و $A$-دو مدول چپ $X$ مفروضند . می دانیم $L(X)$ متشکل از همه نگاشت‌های خطی از $X$ به $X$، با عمل جمع نقطه‌ای و عمل ترکیب توابع یک جبر است. نگاشت$\pi_X{:}\,A\to L(X)$ را یک نمایش $A$ روی $X$ می‌نامیم اگر $\pi_X$ همریختی جبرها باشد. اگر $X$ یک $A$-دو مدول چپ ساده باشد (یعنی زیر مدولی غیر از $0$ و $X$ نداشته باشد)، $\pi_X$

را یک نمایش تحویل‌ناپذیر می‌نامیم. هسته هر نمایش تحویل‌ناپذیر از $A$ روی $A$-دو مدول، را یک ایده‌آل اولیه جبر $A$ می‌نامند. رادیکال جاکوبسن[۱] جبر $A$ که با $rad(A)$ نشان داده می‌شود عبارتست از اشتراک تمام ایده‌آل‌های اولیه جبر $A$.

- جبر مختلط یکدار $A$ را ساده می‌نامیم هرگاه ایده‌آلی به جز صفر و $A$ نداشته باشد.
- اگر جبر $A$ جابجایی باشد، هر تابعک خطی ضربی ناصفر $\varphi: A \to C$ را یک مشخصه (کاراکتر) از $A$ می‌نامند. مجموعه همه مشخصه‌های $A$ را با $\varphi_A$ نشان می‌دهند در [4] نشان داده شده است که رادیکال جاکوبسن جبرهای جابجایی عبارت است از اشتراک هسته همه کاراکترهای $A$، که به مراتب از اشتراک هسته همه نمایش‌های تحویل ناپذیر $A$، ساختار ساده‌تری دارد.

جبر $A$ را نیم‌ساده گوییم اگر $rad(A) = 0$ و آن را جبر رادیکال نامیم اگر $rad(A) = A$.

**تعریف۸.۱.۱** اگر $A$ یک جبر باناخ مختلط باشد و $I \subseteq A, I \neq \Phi$ در این صورت $I$ را ایده‌آل جبری از $A$ نامیم هرگاه یک ایده‌آل حلقه‌ای از $A$ باشد و $I$ زیر مدول چپ و راست از $A$ روی $C$ نیز باشد یعنی برای هر $\alpha \in C$ داشته باشیم: $\alpha a \in I$ و $a\alpha \in I$.

**تعریف۹.۱.۱** گفته می‌شود جبر $A$ اولیه است اگر $\{0\}$ یک ایده‌آل اولیه از $A$ باشد.

**قضیه۱.۱.۱** (گراف بسته) : اگر $X, Y$ دو فضای باناخ مختلط باشند و $T: X \to Y$ یک تبدیل خطی باشد، $T$ پیوسته است اگر و فقط اگر گراف آن بسته باشد.

---
[۱] jacobson

اگر $X,Y$ دو فضای باناخ مختلط باشند و $T:X\to Y$ یک تبدیل خطی باشد، $T$ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر دنباله $x_n$ از $X$ که $x_n \to 0, Tx_n \to y$ داشته باشیم: $y=0$.

**قضیه ۲.۱.۱** اگر $P$ یک ایده‌آل اولیه از جبر باناخ $A$ باشد، آن‌گاه $\frac{A}{P}$ یک جبر باناخ اولیه است.

اثبات: گزاره ۹ صفحه ۱۳۶ از [4].■

**قضیه۳.۱.۱** هر ایده‌آل اولیه از جبر باناخ مختلط یکدار، بسته است.

اثبات: گزاره۱۲ صفحه ۱۲۳از [4] و صفحه ۳۲ از [1].■

**قضیه۴.۱.۱** اگر $P$ یک ایده‌آل از جبر مختلط یکدار باشد آن‌گاه $P$ ایده‌آل اولیه است، اگر و تنها اگر $\frac{A}{P}$ جبر ساده باشد.

اثبات: با ترکیب گزاره ۱.۳.۵۱ و نتیجه ۱.۴.۳۸ از [1] نتیجه می‌شود.■

**قضیه۵.۱.۱** اگر $A$ یک جبر مختلط یکدار و ساده با بعد متناهی بزرگ‌تر از یک باشد آن‌گاه یک عدد صحیح $n>1$ وجود دارد که $A\cong M_n(C)$.

اثبات :رجوع شود به [2] فصل۲، قضیه ۲.۱.۲ ■

**تعریف۱۰.۱.۱** اگر $A$ یک جبر باناخ و $I$ زیر فضای بسته‌ای از $A$ باشد، نگاشت $\pi_I: A\to \frac{A}{I}$ با ضابطه $\pi_I(a)=a+I$ را نگاشت خارج قسمتی می‌نامیم و داریم:

$$\|\pi_I(a)\| = \|a+I\| = inf\{\|a+b\| : b\in I\} \leq \|a\|$$

یعنی $\pi_I$ نگاشتی پیوسته (کران‌دار) است.

**تعریف۱۱.۱.۱** گیریم $A$ یک فضای برداری بر میدان اسکالر $F$ باشد یک نگاشت دو خطی

$[.,.]: A\times A\to A$

$(x,y)\longmapsto [x,y]$

را یک ضرب لی روی $A$ نامیم اگر دارای دو خاصیت زیر باشد:

۱) به ازای هر $x \in A$، $[x,x]=0$.

۲) به ازای هر $x,y,z \in A$، $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$.

(از اتحادهای فوق، اتحاد $[x,y]=-[y,x]$ نیز نتیجه می‌شود)

فضای برداری $A$ مجهز به ضرب لی $[.,.]$ را یک جبر لی می‌نامند.

یک مثال عمده و معروف از جبر لی فضای برداری $A$ است که از ابتدا با یک عمل ضرب به یک جبر معمولی تبدیل شده و سپس جابجاگر دو عضو را به عنوان ضرب لی روی آن در نظر می‌گیرند. یعنی وقتی $(A,+,.)$ یک جبر است آن‌گاه $[x,y]=xy-yx$ یک ضرب لی بر $A$ است و $(A,+,[.,.])$ یک جبر لی است. یک مثال ساده دیگر از جبر لی، فضای برداری $R^3$ بر میدان $R$ با عمل ضرب خارجی بردارها است.

**تعریف۱۲.۱.۱** اگر $A$ و $B$ دو زیر جبر از جبر $D$ باشند، $[A,B]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[A,B]=\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i[a_i,b_i] \mid n \in N, a_i \in A, b_i \in B, \alpha_i \in C\}$$

**تعریف۱۳.۱.۱** اگر $A$ یک جبر لی بوده و $B$ زیر جبری از $A$ باشد، $B$ را ایده‌آل لی از $A$ می‌نامیم، اگر برای هر $a \in A$ و $b \in B$ داشته باشیم: $[a,b]\in B$.

**تعریف ۱۴.۱.۱** اگر جبر لی $A$ ایده‌آل لی غیر بدیهی نداشته باشد، $A$ را جبر لی ساده می‌نامیم.

از این به بعد منظور ما از ایده‌آل همان ایده‌آل جبری است، مگر این‌که خلاف آن ذکر شود.

**تعریف ۱۵.۱.۱** ایده‌آل $P$ از جبر باناخ مختلط $A$ را اول می‌نامیم، هرگاه برای هر دو ایده‌آل $B,C$ از $A$ که $BC\subset P$ داشته باشیم، $B\subset P$ یا $C\subset P$ به طوری که در آن،

$$BC=\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i c_i : b_i\in B, c_i \in C, \alpha_i \in F, n\in N\}$$

**تعریف ۱۶.۱.۱** ایده‌آل $I$ از حلقه $R$ را گوییم اساسی است اگر برای هر ایده‌آل ناصفر $J$ از $R$، $I\cap J\neq 0$.

**تعریف ۱۷.۱.۱** یک نمایش از $C^*$-جبر $A$ روی فضای هیلبرت $H$، عبارت است از یک $*$-همریختی از $A$ به $B(H)$ که با $(\pi, H)$ یا به طور خلاصه با $\pi_{\mathrm{H}}$ نمایش داده می‌شود.

گوییم نمایش $(\pi, H)$ از $A$،

الف) وفادار است هرگاه $\pi_{\mathrm{H}}$، $*$-تکریختی باشد. ( یعنی $\pi_{\mathrm{H}}$ یک به یک نیز باشد.)

ب) ناتباهیده است هرگاه برای هر بردار ناصفر $\varepsilon \in H$ عضو $x \in A$ وجود داشته باشد به طوری که $\pi_{\mathrm{H}}(x)\varepsilon \neq 0$.

ج) تحویل‌ناپذیر است هرگاه $A$-مدول چپ متناظر با آن تحویل ناپذیر باشد به عبارت دیگر $H$ هیچ زیر فضای غیر بدیهی پایا تحت عملگرهای $\{\pi_{\mathrm{H}}(a); a \in A\}$ نداشته باشد.

**تعریف ۱۸.۱.۱** اگر $A$ یک جبر و $M$ یک $A$-دومدول باشد، نگاشت خطی $d: A \to M$ را یک اشتقاق می‌نامیم، در صورتی که برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم:

$d(xy) = xd(y) + d(x)y$.

**قضیه۶.۱.۱** اگر $A$ یک جبر باناخ مختلط باشد و $a \in A$، عملگر $ad(a): A \to A$ با ضابطه‌ی

$ad(a)(b) = [a, b]$

یک اشتقاق موسوم به اشتقاق درونی روی $A$ است و $ad(a)$ یک عملگر کران‌دار(پیوسته) روی $A$ است و $A$ جابجایی است اگر و فقط اگر برای هر $a \in A$، $ad(a) = 0$.

**تعریف۱۹.۱.۱** اشتقاق لی یک نگاشت خطی $D: A \to A$ است که برای هر $a, b \in A$ در شرط زیر صدق می کند.

$D([a, b]) = [Da, b] + [a, Db]$

هر اشتقاق ( معمولی ) $d: A \to A$ به وضوح یک اشتقاق لی روی $A$ است.

**تعریف ۲۰.۱.۱** هر نگاشت خطی $\tau : A \to Z(A)$ با ویژگی $\tau(ab) = \tau(ba)$ برای هر $a, b \in A$ را یک اثر مرکز مقدار روی $A$ می‌نامیم.

- از تعاریف فوق پیداست که اگر $d$ یک اشتقاق معمولی روی جبر $A$ و نگاشت $\tau$ یک اثر مرکز مقدار باشد آن‌گاه $D = d + \tau$ یک اشتقاق لی روی $A$ است.

**تعریف ۲۱.۱.۱** گوییم یک اشتقاق لی $D$ روی جبر $A$ به شکل استاندارد است اگر $D = d + \tau$ که در آن $d$ یک اشتقاق معمولی و $\tau$ یک اثر مرکز مقدار روی $A$ است.

**تعریف ۲۲.۱.۱** اگر $R$ یک حلقه باشد و $n$ یک عدد صحیح و نامنفی باشد که برای هر $x \in R$، $nx = 0$ در این صورت $n$ را مشخصه حلقه $R$ می‌نامیم و با نماد *char(R)* نمایش می‌دهیم. هرگاه چنین عدد طبیعی $n$ای یافت نشود، مشخصه حلقه $R$ را صفر تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۲۳.۱.۱** اگر $A$ یک جبر مختلط یکدار باشد و $a \in A$ طیف $a$ را با نماد $sp(a)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$sp(a) = \{\lambda \in C: \lambda - a \text{ معکوس پذیر نیست}\}$$

**قضیه ۷.۱.۱** اگر $A$ یک جبر باناخ مختلط یکدار باشد و $a \in A$ آن‌گاه $sp(a)$ یک زیر مجموعه غیر تهی فشرده از $C$ است و اگر $f$ یک چند جمله‌ای با ضرایب مختلط باشد داریم:

$$sp\big(f(a)\big) = f(sp(a))$$

اثبات: مرجع [2] فصل ۳ قضیه ۳.۲.۶.■

**تعریف ۲۴.۱.۱** در جبر باناخ مختلط یکدار $A$ شعاع طیف $a$ را با نماد $r(a)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r(a) = sup\,\{|\lambda|: \lambda \in sp(a)\}$$

**قضیه۸.۱.۱** اگر $A$ یک جبر باناخ باشد و $x \in A$ و $\lambda \in sp(x)$، آن‌گاه :

$$r(x) = lim_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = inf\ \{\|x^n\|^{\frac{1}{n}}: n \in N\}$$

$$|\lambda| \le r(x) \le \|x\|$$

**قضیه۹.۱.۱** اگر $P$ یک ایده‌آل اولیه از $A$ باشد آن‌گاه

$$Z\left(\frac{A}{P}\right) \cong\ C$$

اثبات: حکم با توجه به قضیه ۵.۱.۱ و مثال صفحه ۳۳ از مرجع [6] نتیجه می‌شود.■

**تعریف ۲۵.۱.۱** اگر $A$ یک جبر باناخ مختلط یکدار باشد و $x \in A$ و $r(x) = 0$، $x$ را شبه پوچ‌توان گوییم.

**قضیه۱۰.۱.۱** هر اشتقاق $d$ روی یک جبر باناخ نیم‌ساده متناهی‌البعد $B$ یک اشتقاق درونی است یعنی یک $b \in B$ موجود است که $d = ad(b)$.

اثبات: صفحه ۷۴ قضیه ۲۱ از [9].■

**قضیه۱۱.۱.۱** اگر $A$ جبر باناخ نیم‌ساده جابجایی باشد آن‌گاه صفر تنها اشتقاق روی $A$ است.

اثبات: صفحه ۹۵ قضیه ۲۱ از [4].■

**قضیه۱۲.۱.۱** اگر $P$ ایده‌آل اولیه از جبر باناخ مختلط $A$ و $\pi_P: A \to \frac{A}{P}$ نگاشت خارج قسمتی باشد و $a_1, \cdots, a_n \in A$ آن‌گاه

$$\pi_P ad(a_1) \cdots ad(a_n) = ad(\pi_P a_1) \cdots ad(\pi_P a_n) \pi_P$$

اثبات : با استقرا روی $n$ ثابت می‌کنیم:

اگر $n = 1$ برای هر $b \in A$ داریم:

$$\pi_P\, ad(a_1)(b) = \pi_P[a_1, b] = [\pi_P a_1, \pi_P b] = ad(\pi_P\, a_1)(\pi_P b)$$

$$\Rightarrow \pi_P ad(a_1) = ad(\pi_P a_1)\pi_P$$

بنابراین حکم برای $n = 1$ درست است.

فرض کنیم حکم برای $n$ تا $a_i$ درست باشد، آن را برای $n + 1$ تا $a_i$ ثابت می‌کنیم. برای هر $b \in A$ داریم:

$$\pi_P ad(a_1) \cdots ad(a_n) ad(a_{n+1})(b) =$$

$$\pi_P[a_1, ad(a_2) \cdots ad(a_{n+1})(b)] =$$

$$[\pi_P a_1, \pi_P ad(a_2) \cdots ad(a_{n+1})(b)] = [\pi_P a_1, ad(\pi_P a_2) \cdots ad(\pi_P a_{n+1})\pi_P(b)] =$$
$$ad(\pi_P a_1) ad(\pi_P a_2) \cdots ad(\pi_P a_{n+1})\pi_P\,(b)$$

در نتیجه داریم:

$$\blacksquare\ \pi_P ad(a_1) \cdots ad(a_{n+1}) = ad(\pi_P a_1) ad(\pi_P a_2) \cdots ad(\pi_P a_{n+1})\pi_P$$

**قضیه۱۳.۱.۱** اگر $A$ یک جبر ساده و $I$ یک ایده‌آل لی از $A$ و مشخصه $A$ مخالف ۲ باشد آن‌گاه یا $I \subset Z(A)$ یا $[I, I] \subset I$.

اثبات: صفحه ۵۱۹ قضیه ۲از [8]. ■

**قضیه۱۴.۱.۱** اگر $A$ یک جبر ساده و $A$ میدان نباشد آن‌گاه: $[A, A] = A$.

اثبات: صفحه ۵۱۹ نتیجه ۱ از [8]. ■

**قضیه۱۵.۱.۱** مجموع تعداد متناهی اشتقاق لی روی یک جبر، اشتقاق لی است.