دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض گرایش هندسه

عنوان

مترهای انیشتین گونه روی خمینه های لورنتس همگن سه بعدی

اساتید راهنما

دکتر ابراهیم پوررضا

دکتر غفار فرزدی

پژوهشگر

هانیه نمروری

شهریور ۱۳۸۷

به یاد پدر عزیزم

و

تقدیم به:

مادر دلسوز و مهربانم

به پاس زحمات بی دریغش

و

همسر عزیزم

تقدیر و تشکر

درود و سپاس یگانهٔ جاوید را که آرام گیرد دلها با یاد او و آرامش پذیرد پریشان عالمی با نام او. سپاس و صدها سپاس به پاس بهترین نعمتی که به ما عطا فرمودی: نعمت خداوندیت. پروردگارا تو را بدانسان که تو باشی و بدانسان که سزاوار تو باشد ستایش باید و به نعمت‌های بی‌پایان تو که قطره‌های باران و ریگ های بیابان شمارش نکند، سپاس بی‌پایان می‌گویم. می‌دانم که نخواهم توانست سپاس خود را در قالب کلمات درآورده و شکرگزار تو باشم. شکر و سپاس پروردگار یکتا را که لطف و عنایت او در تمام مراحل زندگی باعث موفقیت و پیروزی می‌گردد.

از استاد راهنمای بزرگوارم آقای دکترابراهیم پوررضا که در به ثمر رسیدن این پژوهش از راهنمائیهای مستمر و بیدریغشان بهره‌مند بوده‌ام، کمال تشکر را دارم و برایشان توفیق روز افزون از درگاه خداوند متعال خواستارم.

از استاد ارجمند آقای دکتر غفار فرزدی نیز کمال تشکررا دارم. از آقای دکتر علی حاجی بدلی که با راهنمائیهای ارزشمندشان مرا یاری نمودند و زحمت داوری این پایاننامه را تقبل نموده‌اند تشکر و قدردانی مینمایم . همچنین از آقای دکتر مرتضی فغفوری به علت راهناییهای ارزشمندشان سپاسگزارم.

از خانواده عزیزم که در تمام طول تحصیل مایه دلگرمی و پشتوانه من بوده‌اند سپاسگذارم و از دوستان و همکلاسیهای عزیزم که همواره مشوق من بوده‌اند و نهایت دوستی را در حق این حقیر به جا آورده‌اند سپاسگذارم و برایشان آرزوی بهروزی و موفقیت دارم.

نام خانوادگی دانشجو: نمروری نام: هانیه

عنوان: مترهای انیشتین گونه روی خمینه های لورنتس همگن سه بعدی

اساتید راهنما : دکتر ابراهیم پوررضا ، دکتر غفار فرزدی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: هندسه دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۱۳۸۷ تعداد صفحه: ۷۵

کلید واژه‌ها: فضاهای همگن لورنتس، مترهای انیشتین گونه، فضاهای متقارن، فضاهای کاهشی طبیعی

چکیده

به طور کامل ما خمینه های لورنتس همگن سه بعدی دارای مترهای انیشتین گونه را دسته بندی می کنیم. نظیر حالت ریمانی:

$(E.Abbenaetal., SimonStevinQuartJPureApplMath ٦٦ : ١٧٣ - ١٨٢, ١٩٩٢)$ ،

اگر (M, g) یک خمینه لورنتس همگن سه بعدی باشد، دوری موازی بودن تانسور ریچی (M, g) (و به همین ترتیب کودازی بودن تانسور ریچی) وابسته به کاهشی طبیعی بودن (وابسته به متقارن بودن) خمینه (M, g) است . با وجود این برخی مثالهای استثنائی وجود دارند .

این پایاننامه براساس مقاله:

Einstein-like metrics on three-dimensional homogeneous Lorentz manifolds

که توسط پروفسور کالواروشو در مجله $GeomDedicata$ شماره ۱۲۷ سال ۲۰۰۷ میلادی چاپ شده، تنظیم شده است .

فهرست مطالب

مقدمه

در [۱۲] گرای[1] دو کلاس جدید از خمینه های ریمانی $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ را معرفی می کند. این کلاسها با توجه به شرایطی روی تانسور ریچی و توسیع آن به خمینه های شبه ریمانی تعریف می شوند. کلاسهای $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ به صورت زیر تعریف می شوند:

کلاس $\mathcal{A}$: یک خمینه شبه ریمانی (M,g) متعلق به کلاس $\mathcal{A}$ است اگروتنهااگر تانسور ریچی وابسته به آن دوری موازی باشد. یعنی به ازای هر میدان برداری Z,Y,X مماس بر M داشته باشیم:

$$(\nabla_X \varrho)(Y,Z) + (\nabla_Y \varrho)(Z,X) + (\nabla_Z \varrho)(X,Y) = 0.$$

و یا به طور معادل ϱ یک تانسور کیلینگ باشد یعنی:

$$(\nabla_X \varrho)(X,X) = 0.$$

کلاس $\mathcal{B}$: خمینهٔ (M,g) متعلق به کلاس $\mathcal{B}$ است اگروتنهااگر تانسور ریچی وابسته به آن یک تانسور کودازی باشد. یعنی:

$$(\nabla_X \varrho)(Y,Z) = (\nabla_Y \varrho)(X,Z).$$

اگر $\mathcal{C}$ کلاس خمینه های با انحناء اسکالر ثابت را نشان دهد آنگاه $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ به علاوه، $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varrho \subset \varepsilon$ که ϱ کلاس خمینه های ریچی موازی و ε کلاس خمینه های انیشتینی است. جزئیات بیشتر و برخی مثالهای جالب در [۱۲] وجود دارند. مترهای انیشتین گونه برای کلاسهای مختلف وابسته به خمینه های ریمانی مورد بررسی قرار گرفته اند. برخی مثالها عبارتندار:

[1] Gray

فضاهای همگن سه بعدی [۲] و فضاهای همگنی انحنایی از بعد سه و چهار [۵]، فضاهای توپی همگن سه بعدی [۹]، فضاهای نیمه متقارن [۳]، فضاهای ساساکین [۱]، خمینه های متری تماسی سه بعدی [۶].

در هندسه لورنتس، مترهای انیشتین گونه در خمینه های لورنتس سه بعدی، پذیرای میدان برداری پوچ موازی مورد مطالعه قرار گرفته اند [۱۰].

توجه کنید که خمینه های سه بعدی برای تحقیق عمیق درباره مترهای انیشتین گونه انتخاب می شوند زیرا در بعد سه، تانسور انحناء به طور کامل به وسیله تانسور ریچی معین می شود. اینها خاصیت مشهور هستند که یک خمینه شبه ریمانی سه بعدی (M, g) دارای انحناء مقطعی ثابت است اگروتنهااگر انیشتین باشد و به طور موضعی متقارن است اگروتنهااگر ریچی موازی باشد. در [۲] ثابت شده است که خمینه‌های ریمانی همگن همبند، همبند ساده سه بعدی متعلق به کلاس $\mathcal{A}$ (و به همین ترتیب کلاس $\mathcal{B}$) است اگروتنهااگر کاهشی طبیعی (و به همین ترتیب متقارن) باشند. در حالت کلی، یک مساله جالب این است که کی و چگونه نتایج معتبر در هندسه ریمانی به هندسه شبه ریمانی به ویژه به هندسه لورنتس قابل توسیع هستند. در این مقاله، ما به طور کامل مترهای انیشتین گونه روی خمینه های لورنتس همگن سه بعدی را دسته بندی می کنیم. در حالت ریمانی، تانسور ریچی، دوری موازی (و به همین ترتیب تانسور کودازی) وابسته به کاهشی طبیعی (و به همین ترتیب متقارن) است در واقع مترهای لورنتس چپ پایا متعلق به کلاس $\mathcal{A}$ (و به همین ترتیب کلاس $\mathcal{B}$) باشد، وجود دارند بدون اینکه فضای همبند، همبند ساده، کاهشی طبیعی (و به همین ترتیب متقارن) باشد. به عنوان یک نتیجه فرعی ما یک توصیف کامل از انحنای وابسته به خمینه های همگن لورنتس سه بعدی را بدست می آوریم (در حالت ریمانی توصیف مشابه در [۳] ارائه شده است) که برای تحقیق بیشتر درباره هندسه لورنتس سه بعدی بکار می روند.

این پایان نامه در سه فصل به شرح زیر تنظیم شده است:

در فصل اول ما برخی از مفاهیم اساسی و قضایای استفاده شده در این مقاله را مطرح می کنیم در فصل دوم ما برخی واقعیات اساسی درباره خمینه های لورنتس همگن سه بعدی را جمع آوری می کنیم و در فصل سوم با دسته بندی خمینه های انیشتین، خمینه های لورنتس ریچی موازی، خمینه های لورنتس همگن سه بعدی متعلق به کلاس $\mathcal{A}$ و کلاس $\mathcal{B}$ و بالاخره با برخی نتایج روی خمینه های لورنتس همدیس تخت سه بعدی پایان نامه را به اتمام می رسانیم.

فصل ۱

پیشینه تحقیق و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ خمینه های شبه ریمانی

تعریف ۱.۱ یک فرم دو خطی روی V عبارتست از تابع حقیقی و دو خطی

$$b : V \times V \longrightarrow R$$

این فرم را متقارن گویند هرگاه برای هر v, w داشته باشیم: $b(v,w) = b(w,v)$.

یک فرم دو خطی ومتقارن b روی V را:

۱) معین و مثبت گوئیم هرگاه برای $v \neq 0$ داشته باشیم: $b(v,v) > 0$،

۲) معین و منفی گوئیم هرگاه برای $v \neq 0$ داشته باشیم: $b(v,v) < 0$،

۳) ناتبهگون گوئیم هرگاه به ازای هر $b(v,w) = 0, w \in V$ آنگاه $v = 0$.

تعریف ۲.۱ یک متر شبه ریمانی روی خمینه هموار M یک میدان تانسوری متقارن و ناتبهگون از مرتبهٔ (۲و۰) است.

خمینهٔ هموار M را همراه با متر شبه ریمانی، یک خمینهٔ شبه ریمانی گوئیم.

هرگاه خمینهٔ شبه ریمانی M از بعد n و به ازای هر $p \in M$، $1 \leq r \leq n$ بعد زیر فضای ماکزیمم T_pM باشد به طوری که g روی این زیر فضا معین نامنفی است، آنگاه r را شاخص g گوئیم.

تعریف ۳.۱ اگر شاخص r مربوط به تانسور متر g برابر صفر باشد در این صورت M یک خمینهٔ ریمانی واگر $r = 1$ و$dimM \geq 2$ آنگاه M یک خمینهٔ لورنتس گفته می شود.

تعریف ۴.۱ بردار مماس v در M:

فضاگونه است هرگاه $\langle v,v\rangle > 0$ یا $v=0$

پوچ است هرگاه $\langle v,v\rangle = 0$ و $v \neq 0$

زمان گونه است هرگاه $\langle v,v\rangle < 0$.

۲.۱ ارتباط لوی سویتا

تعریف ۵.۱ ارتباط ∇ روی یک خمینه هموار M عبارتست از یک تابع $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ چنان که:

۱) $\nabla_V W$، نسبت به V، $F(M)-$ خطی است.

۲) $\nabla_V W$، نسبت به W، $R-$ خطی است.

۳) $f \in F(M)$، $\nabla_V(fW) = (Vf)W + f\nabla_V W$.

$\nabla_V W$، مشتق کوواریان W نسبت به V نامیده می شود.

قضیه ۶.۱ روی خمینه شبه ریمانی M ارتباط منحصربفرد ∇ چنان موجود است که:

۱) $[V,W] = \nabla_V W - \nabla_W V$

۲) $X\langle V,W\rangle = \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle$

این ∇ ارتباط لوی سویتا نامیده می شود و توسط فرمول زیر که فرمول کوزول[1] نامیده می شود، مشخص می شود:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_V W, X\rangle &= V\langle W,X\rangle + W\langle X,V\rangle - X\langle V,W\rangle \\ &- \langle V,[W,X]\rangle + \langle W,[X,V]\rangle + \langle X,[V,W]\rangle. \end{aligned}$$

[1] Koszul formula

برهان. ر.ک.[۱۴]. □

۳.۱ انحناء

تعریف ۷.۱ فرض کنید M یک خمینهٔ شبه ریمانی با ارتباط لوی سویتا ∇ باشد. تابع $R:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\longrightarrow\chi(M)$ با ضابطهٔ:

$$R(X,Y)Z=\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_X\nabla_Y Z+\nabla_{[X,Y]}Z$$

یک میدان تانسوری از نوع (۳و۱) روی M است که تانسور انحناء ریمانی روی M نامیده می شود.

قضیه ۸.۱ اگر $x,y,z,v,w\in T_pM$ ، آنگاه:

۱) $R_{xy}=-R_{yx}$

۲) $\langle R_{xy}v,w\rangle=-\langle R_{xy}w,v\rangle$

۳) $R_{xy}z+R_{yz}x+R_{zx}y=0$

۴) $\langle R_{xy}v,w\rangle=\langle R_{vw}x,y\rangle$.

برهان. ر.ک.[۱۴]. □

قضیه ۹.۱ (اتحاد دوم بیانچی [2]) اگر $x,y\in T_pM$، آنگاه

$$(\nabla_z R)(x,y)+(\nabla_x R)(y,z)+(\nabla_y R)(z,x)=0$$

[2] Second Bianchi Identity

برهان. ر.ک.[۱۴]. □

لم ۱۰.۱ فرض کنید Π یک صفحه مماس ناتبهگون در $p \in M$ باشد. قرار می دهیم $Q(v,w) = \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2$ در این صورت عدد

$$K(v,w) = \frac{\langle R_{vw}v, w\rangle}{Q(v,w)}$$

مستقل از انتخاب پایه v, w برای Π است و انحناء مقطعی صفحهٔ Π نامیده می شود.

برهان. ر.ک.[۱۴]. □

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید R تانسور انحناء ریمانی M باشد. تانسور انحناء ریچی M نسبت به یک میدان قاب $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$Ric(X,Y) = \sum_m \varepsilon_m \langle R_{XE_m}Y, E_m\rangle$$

که در آن $\varepsilon_m = \langle E_m, E_m\rangle$.

تعریف ۱۲.۱ فرض کنید R_{ij} مؤلفه های تانسور انحناء ریچی باشد در این صورت انحناء اسکالر به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tau = \sum g^{ij} R_{ij}$$

تعریف ۱۳.۱ خمینهٔ شبه ریمانی M را یک خمینهٔ تخت گوئیم هرگاه تانسور انحناء R آن در هر نقطه از M برابر صفر باشد.

۴.۱ ایزومترها

تعریف ۱۴.۱ فرض کنید M و N خمینه های شبه ریمانی با تانسورهای متر g_N, g_M باشند. یک ایزومتری از M به N عبارتست از دیفئومورفیسم $\Phi : M \longrightarrow N$ به طوری که تانسور متر را حفظ کند: $\Phi^*(g_N) = g_M$.

پس اگر بین M و N یک ایزومتری موجود باشد آن گاه آنها را ایزومتر می گوئیم. در حقیقت خمینه های شبه ریمانی ایزومتر از نظر هندسی کاملاً مشابه هستند.

۵.۱ خمینه های همبند وهمبند ساده

تعریف ۱۵.۱ خمینهٔ M همبند است هرگاه نتوان M را به صورت اجتماع دو مجموعه باز و ناتهی جدا از هم نوشت.

و M همبند ساده است هر گاه M همبند بوده و گروه اساسی آن بدیهی باشد. به عنوان مثال می دانیم R^n همبند است و چون R^n ادغام پذیر به یک نقطه است پس $\pi(R^n, x_0) \cong e$، در نتیجه R^n همبند ساده است.

تعریف ۱۶.۱ خمینهٔ شبه ریمانی M همگن نامیده می شود هرگاه به ازای نقاط دلخواه $p, q \in M$ یک ایزومتری Φ روی M چنان موجود باشد که: $\Phi(p) = q$.

۶.۱ خمینه های متقارن موضعی

تعریف ۱۷.۱ خمینهٔ شبه ریمانی M را متقارن موضعی می گوئیم هرگاه $\nabla R = 0$. یعنی تانسور انحناء آن موازی باشد.

تعریف ۱.۱۸ خمینهٔ شبه ریمانی M را فضای متقارن گوئیم هرگاه به ازای هر نقطهٔ $p \in M$ یک ایزومتری یکتا مانند $\xi_p : M \longrightarrow M$ چنان موجود باشد که روی T_pM داشته باشیم: $(d\xi_p)_p = -id$.

لم ۱.۱۹ یک خمینه شبه ریمانی کامل، همبند ساده ومتقارن موضعی، متقارن است.

برهان. ر.ک.[۱۴]. $\square$

تعریف ۱.۲۰ یک خمینه شبه ریمانی همبند و کامل با انحنای ثابت را یک فضا فرم گوئیم.

۱.۷ گروه لی وجبر لی

تعریف ۱.۲۱ فرض کنید G خمینهٔ هموار باشد، G را گروه لی می گویند اگر:

۱) G یک گروه باشد

۲) نگاشت های عمل گروه و وارون:

$$G \times G \longrightarrow G \qquad G \longrightarrow G$$

$$(x,y) \longrightarrow xy \qquad x \longrightarrow x^{-1}$$

نگاشت های هموار باشند.

فرض کنید a عضو گروه لی باشد انتقال چپ و راست به شکل زیر بیان می شوند:

انتقال چپ $\quad L_a : G \longrightarrow G, \quad L_a(g) = a.g$

انتقال راست $\quad R_a : G \longrightarrow G, \quad R_a(g) = g.a$

حال اگر L_a روی G یک ایزومتری باشد گوئیم متر ریمانی روی G چپ پایا است.

تعریف ۱.۲۲ فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان R باشد. عملگر دو تائی زیر:

$$[.,.]: V \times V \longrightarrow V$$

$$[.,.]: (v,v') \longrightarrow [v,v']$$

که آن را جابه جاگر یا کروشه لی گوئیم اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$(i) \quad [v, \alpha v' + \beta v''] = \alpha[v,v'] + \beta[v,v''], \quad \forall \alpha,\beta \in R \quad v,v',v'' \in V$$

$$(ii) \quad [v,v'] = -[v',v], \qquad \forall v,v' \in V$$

$$(iii) \quad [v,[v',v'']] + [v',[v'',v]] + [v'',[v,v']] = 0 \quad \forall v,v',v'' \in V$$

آنگاه زوج $(V,[.,.])$ را جبر لی روی R گوئیم.

تعریف ۲۳.۱ اگر L_g و R_g را به ترتیب انتقال چپ و راست از گروه لی G در نظر بگیریم و دیفرانسیل آنها را با dR_g، dL_g نشان دهیم تعریف می کنیم:

$$Ad(g) = dL_g o dR_g^{-1}$$

که تناظر $Ad: g \longrightarrow Ad(g)$ نمایشی از گروه لی به جبر لی آن یعنی $\mathcal{G}$ تعریف می کند که نمایش Ad را نمایش الحاقی گروه لی G گویند.

برای هر $X \in \mathcal{G}$، نگاشت $ad(X)$ را که به صورت زیر تعریف می شود:

$$(adX)Y = [X,Y] \qquad \forall Y \in \mathcal{G}$$

نمایش الحاقی جبر لی $\mathcal{G}$ می نامند.

تعریف ۲۴.۱ گروه لی G را یک گروه لی تک مدولی نامیم هرگاه به ازای هر $g \in G$ داشته باشیم:

$$|det\ Adg| = 1$$

تعریف ۲۵.۱ در زیر چند نمونه از گروههای لی استفاده شده در این مقاله معرفی می شوند:

$$\begin{aligned} GL(n,R) &= \{A \in M(n,R)|\ det(A) \neq 0\}, \\ GL(n,C) &= \{A \in M(n,C)|\ det(A) \neq 0\}, \\ SL(n,R) &= \{A \in GL(n,R)|\ det(A) = 1\}, \\ O(n) &= \{A \in GL(n,R)|\ A^t A = I\}, \\ SO(n) &= \{A \in O(n)|\ detA = 1\}, \\ U(n) &= \{A \in GL(n,C)|\ \bar{A}^t.A = I\}, \\ SU(n) &= \{A \in U(n)|\ detA = 1\} \end{aligned}$$

و گروه حرکتهای صلب ۲ـصفحهٔ اقلیدسی $E(2)$ که از تمام ماتریسهای به شکل زیر تشکیل یافته است:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & a \\ \sin\theta & \cos\theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و گروه حرکتهای صلب ۲ـصفحهٔ مینکوفسکی $E(1,1)$ که از تمام ماتریسهای به شکل زیر تشکیل یافته است:

$$\begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t & a \\ \sinh t & \cosh t & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$