دانشگاه بین‌المللی امام خمینی

IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
وزارت علوم و تحقیقات و فناوری
دانشکده‌ی علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض (گرایش هندسه)
توسط خانم مهسا پورمند

تحت عنوان
زیرمنیفلدهای فضاگون با نقص بعد دو در فضاهای مینکوفسکی

در تاریخ ۸۹/۷/۷ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱) استاد راهنما **دکتر رضا میرزایی**

۲) استاد مشاور **دکتر عبدالرحمن رازانی**

۳) استاد داور خارجی **دکتر جعفر شفاف**

۴) استاد داور داخلی **دکتر شیرویه پیروی**

۵) استاد نماینده تحصیلات تکمیلی **دکتر مجید سلیمانی**

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان نامه خواص هندسی زیرخمینه‌های فضاگون با نقص بعد دو در فضای دسیت‌ردسیتر را بررسی کرده و به بیان ویژگی‌هایی از انحنای گوس—کرونکر مخروط نوری برای زیرخمینه‌های فضاگون با نقص بعد دو در فضای مینکوفسکی که مشابه ویژگی‌های معمولی انحنای گوس برای ابررویه‌ها در فضای اقلیدسی است می‌پردازیم. در حالت موضعی، این انحنا اشتراک بین ابررویه‌ها با ابرصفحه‌های نورگون را شرح می‌دهد. ما خواص هندسی این انحناها را مطالعه کرده و قضیه‌ی نوع گوس—بانت در این مورد را معرفی می‌کنیم.

در ادامه به بحث درباره‌ی تکینگی ابررویه‌های نورگون و رابطه‌ی بین تکینگی‌های این نگاشت‌ها و خواص هندسی آن‌ها در ابررویه‌های فضاگون، به‌عنوان یک کاربرد از نظریه‌ی تکینگی لژاندر می‌پردازیم. در پایان نگاشت‌های گوس مخروط نوری در فضای دسیتر ۴—بعدی و تکینگی این ابررویه‌ها را رده‌بندی خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: فضای مینکوفسکی، انحنای گوس، انحنای گوس—کرونکر، مخروط نوری، تکینگی لژاندر، تکینگی لاگرانژ، فضای دسیتر، تابع ارتفاع مخروط نوری، توابع هیپربولیک.

پیشگفتار

فضای دسیتر یک فضای لورنتزی با انحنای ثابت است. بحث درباره‌ی ویژگی‌های هندسی و تکینگی ابررویه‌های نورگون و نگاشت گوس مخروط نوری برای زیرخمینه‌های فضاگون در فضای دسیتر یک کاربرد مهم از نظریه‌ی تکینگی لژاندر می‌باشد.

هندسه دیفرانسیل خارجی ابررویه‌ها در فضای هیپربولیک را با استفاده از نظریه‌ی تکینگی لژاندر بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که تکینگی‌های گوس مخروط نوری و نگاشت گوس مخروط نوری دارای ویژگی‌های هندسی در ابررویه‌های فضاگون هستند.

یکی ازکاربردهای مطالعه‌ی هندسه دیفرانسیل خارجی زیرخمینه‌های فضای مینکوفسکی در نظریه‌ی نسبیت است. به‌عنوان مثال ابررویه‌های نورگون را می‌توان به‌عنوان ابررویه‌های خط دار روی زیرخمینه‌های فضاگون از نقص بعد دو درنظر گرفت.

ایزومیا[1]، کوسوکی [2]، پی [3] و رومرو[4] ابررویه‌های نورگون در رویه‌های فضاگون فضای مینکوفسکی ۴–بعدی و زیرخمینه‌های فضاگون با نقص بعد دو در فضای مینکوفسکی n–بعدی را مورد مطالعه قرار دادند و دریافتند که با توجه به بردارهای نرمال نورگون می‌توان یک فرمول از نوع گوس بانت [5] به عنوان یک انحنای گوس–کرونکر روی زیرخمینه‌های فضاگون با نقص بعد دو، ساخت. سپس به بحث درباره‌ی رویه‌های نورگون وابسته به خم‌های فضاگون در فضای دسیتر ۳–بعدی با استفاده از

[1] Izumiya
[2] Kossowski
[3] pei
[4] romero
[5] Gauss-Bonnet

فرمول سرت—فرنت [6] پرداخته و یک رده‌بندی از تکینگی رویه‌های نورگون برای خم‌های فضاگون که یال تیزه‌ای و یا دم فاخته‌ای هستند ارائه دادند.

رابطه‌ی بین هندسه و تکینگی تکیه بر حقیقت بنیادی برخورد یک زیرخمینه با مدل‌هایی از فضای محدود دارد که می‌تواند به‌وسیله‌ی آنالیز خانواده‌های مناسب از تابع‌های برخورد یا به‌طور هم‌ارز نگاشت‌های لژاندر [7] و لاگرانژ [8] مربوطه‌اشان بدست آیند.

در فضای مینکوفسکی، ارتباطی خاص بین مفاهیم مربوط به برخورد زیرخمینه‌ها و ابرصفحه‌های نورگون وجود دارد. برای مثال ویژگی‌های زیرخمینه‌های مشمول در فضای هیپربولیک، از هندسه‌ی h—کره ناشی می‌شود. علاوه براین، با تحدید به زیرخمینه‌های مشمول در ابرصفحه‌های فضاگون، حالت خاصی از هندسه‌ی اقلیدسی را به‌دست می آوریم.

با هدف مطالعه‌ی هندسه‌ی خارجی ابررویه‌های نورگون در فضای مینکوفسکی ۴—بعدی، کوسوکی یک نگاشت گوس روی رویه‌ی فضاگون مناسب‌اش معرفی کرد و با توجه به آن نتایج جالبی در خمینه‌های ۳—بعدی نورگون بدست آورد که مشابه نتایج شناخته شده در فضای اقلیدسی است.

با رده‌بندی موضعی تکینگی ابررویه‌های نورگون، ناورداهای جبری و هندسی به‌دست می آیند. به‌عبارت دیگر، کاربرد نظریه‌ی تکینگی شیوه‌ای برای مطالعه‌ی هندسه‌ی خارجی زیرخمینه‌های فضای هیپربولیک و فضای دسیتر است که به‌عنوان مثالی از آن می‌توان مخروط نوری در فضای مینکوفسکی را نام برد. در این پایان نامه، این روش را دنبال کرده و خواص هندسی‌لورنتزی برای زیرخمینه‌های فضاگون با نقص بعد دو در فضای مینکوفسکی، را شرح می‌دهیم. برای این هدف، برخی خواص موضعی زیرخمینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

میدان برداری نرمال دلخواه n^T را روی یک زیرخمینه‌ی خاص درنظر می‌گیریم. ابتدا n^T را ثابت فرض می‌کنیم که در این‌صورت دو حالت برای انتخاب کلاس کنج نرمال وجود دارد. یکی کنج (n^T, n^S) و دیگری جهت معکوسش یعنی کنج $(n^T, -n^S)$. به هریک از این کنج‌ها می‌توان انحنای گوس—کرونکر مخروط نوری $K_l(n^T, \pm n^S)$ را وابسته کرد. یعنی انحنای گوس—کرونکر مخروط نوری وابسته به انتخاب کنج (n^T, n^S) است. اما بعد از نرمال سازی انحنای گوس کرونکر مخروط نوری نرمال شده‌ی $\widetilde{K}_l^{\pm}$، مستقل از انتخاب کنج نرمال $(n^T, \pm n^S)$ می‌باشد.

درادامه خواص هندسی انحنای گوس—کرونکر مخروط نوری نرمال شده را با استفاده از نظریه‌ی

[6] Frenet-Serret

[7] Legendrian

[8] Lagrangian

تکینگی‌های لژاندر و لاگرانژ تجزیه و تحلیل کرده و به‌طور خاص به توصیف ویژگی‌های تخت بودن [۹] می‌پردازیم.

ثابت می‌کنیم برای هر کنج (n^T, n^S)، $\widetilde{K}_l(p) = 0$ اگر و تنها اگر $K_l(n^T, n^S)(p) = 0$.

بعد از بررسی ویژگی‌های عمومی زیرخمینه‌های با نقص بعد دو، یک نظریه‌ی نوع گوس—بانت روی انحنای گوس کرونکر مخروط نوری نرمال شده، برای زیرخمینه‌های فضاگون جهت‌پذیر با بعد زوج معرفی می‌کنیم.

از آنجا که انحنای گوس—کرونکر مخروط نوری نرمال به انتخاب جهت نرمال بستگی دارد، برای بررسی ویژگی‌های عمومی آن نیازمند استفاده از بردارهای نرمال زیرخمینه‌ها هستیم و اما بر اساس تعریف انحنای گوس—کرونکر مخروط نوری عمومی $\widetilde{\mathcal{K}}_l$، احتیاج به فرض جهت‌پذیر بودن زیرخمینه‌ی M داریم.

برخلاف فضای اقلیدسی، مفهوم انحنای گوس—کرونکر در فضای مینکوفسکی به هندسه‌ی ذاتی وابسته نیست.

جهت نرمال زیرخمینه‌ی فضاگون به‌طور یکتا مشخص نمی‌شود. از این‌رو با درنظر گرفتن نقص بعد دو روی زیرخمینه‌های فضاگون می‌توان کنج‌های نرمال مخروط نوری را مشخص و نگاشت گوس و ابررویه‌های نورگون را تعریف کرد.

همچنین به بررسی ویژگی‌های بنیادی فضای مینکوفسکی پرداخته و انحنای گوس—کرونکر مخروط نوری را بیان کرده و ویژگی‌های اساسی آن را مطالعه می‌کنیم.

برای این منظور ابتدا تعاریفی مقدماتی از هندسه‌ی خمینه‌ها را بیان کرده و به بررسی ویژگی‌های بنیادی فضای مینکوفسکی که در طول تحقیق به آن نیاز داریم می پردازیم. سپس انحنای گوس—کرونکر مخروط نوری را تولید و ویژگی‌های اساسی آن را در این فضا بررسی می‌کنیم. در فصول بعد به مطالعه‌ی نگاشت گوس مخروط نوری و ابررویه‌های رکابی مخروط نوری می‌پردازیم. در ادامه، قضیه‌ی گوس—بانت برای مخروط نوری نرمال شده روی زیرخمینه‌های فروبرده شده با نقص بعد دو، در فضای مینکوفسکی را بیان و اثبات می کنیم. و نتایجی کلی درباره‌ی خم‌ها و رویه‌های فروبرده شده با نقص بعد دو بدست می آوریم.

سپس نمونه‌ای از زیرخمینه‌های فضاگون با نقص بعد دو شامل کلاف نرمال تخت را بررسی می‌کنیم. ابررویه‌های فضای اقلیدسی، فضای هیپربولیک، فضای دسیتر و مخروط نوری را به‌عنوان مثال‌هایی

[۹] flatness

مهم از این کلاس ارائه می‌کنیم.

در آخر دو پیوست شامل نتایج و مفاهیم بنیادی از تکنیک‌های لژاندر و لاگرانژ استفاده شده در متن را ارائه می‌دهیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف و قضایایی از هندسه خمینه‌ها ارائه می‌شود که دانستن آنها در فصل های آتی ضرورت دارد.

تعریف ۱.۱ فرض کنید M و N دو خمینه و $p \in M$ باشد. می‌گوییم نگاشت $F : M \to N$ در نقطه‌ی p هموار است، هرگاه برای هر نقشه‌ی (U, φ) که $p \in U$ و هر نقشه‌ی (V, ψ) که $F(p) \in V$، نگاشت $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ در دامنه‌ی تعریف خود، هموار باشد.

تعریف ۲.۱ نگاشت $F : M \to N$ را دیفئومورفیسم نامند، هرگاه F^{-1} موجود و هموار باشد.

تعریف ۳.۱ فرض کنید M و N دو خمینه و $\phi : M \to N$ یک نگاشت هموار است. ϕ را غوطه‌ورسازی نامند، هرگاه برای هر $p \in M$، $d\phi : T_pM \to T_qN$ یک به یک باشد ($q = \phi(p)$).

تعریف ۴.۱ اگر $\phi : M \to N$ غوطه‌ورسازی بوده و ϕ یک به یک باشد، $\widetilde{N} = \phi(N)$ را زیرخمینه‌ی غوطه‌ور در M می‌نامند. در این حالت توپولوژی $\widetilde{N}$ توسط ϕ از N بدست می آید. به این معنی که U در $\widetilde{N}$ باز است اگروتنهااگر $\phi^{-1}(U)$ در N باز باشد.

تعریف ۵.۱ اگر $\phi : M \to N$ غوطه‌ورسازی یک به یک باشد و توپولوژی زیرفضایی برای $\tilde{N}$ با توپولوژی بدست آمده توسط ϕ یکی باشد دراین‌صورت ϕ یک نشاننده و $\tilde{N}$ زیرمنیفلد نشانده شده در M می‌باشد.

نکته ۱.۱ اگر $\phi : M \to N$ غوطه‌ورسازی یک به یک و N فشرده باشد، آن‌گاه ϕ نشاننده است.

تعریف ۶.۱ فرض کنید M یک خمینه و $m = \dim M$ و $N \subset M$ است. N را زیرخمینه‌ی معمولی M گویند هرگاه برای هر $p \in N$، نقشه‌ی مکعبی (U, φ) حول p موجود باشد، چنانکه برای هر $q \in N \cap U$ داشته باشیم $\varphi(q) = (x_۱, \cdots, x_n, ۰, \cdots, ۰)$.

تعریف ۷.۱ خمینه‌ی M جهت‌پذیر است هرگاه گردایه‌ی $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ از نقشه‌ها موجود باشد، چنان‌که این گردایه M را بپوشاند و برای هر دو نقشه‌ی $\{(U_۱, \varphi_۱)\}$ و $\{(U_۲, \varphi_۲)\}$ متعلق به گردایه‌ی مذکور، دترمینان ماتریس ژاکوبی تابع $\varphi_۱ \circ \varphi_۲^{-۱}$، مثبت باشد.

تعریف ۸.۱ منحنی $\alpha : I \to M$ را یک منحنی انتگرال برای میدان برداری V متعلق به $X(M)$ (مجموعه‌ی میدان‌های برداری هموار روی M) می‌نامند هرگاه برای هر $t \in I$، $\alpha'(t) = V_{\alpha(t)}$. یعنی بردار سرعت منحنی α در هر نقطه برابر V است.

تعریف ۹.۱ فرض کنید $b : V \times V \to R$ یک نگاشت دوخطی متقارن روی V است:

۱) b را مثبت(منفی) معین نامند، هرگاه برای هر $v \neq ۰$، $b(v,v) > ۰$ $(b(v,v) < ۰)$ باشد.

۲) b را مثبت(منفی) نیمه‌معین نامند، هرگاه برای هر $v \neq ۰$، $b(v,v) \geq ۰$ $(b(v,v) \leq ۰)$ باشد.

۳) b را ناتبهگون نامند هرگاه:

$$\forall w \in V \ , \ b(v,w) = ۰ \Longrightarrow v = ۰$$

تعریف ۱۰.۱ نگاشت خطی $T : V \to W$ را ایزومتری نامند، هرگاه T ضرب اسکالر را حفظ کند یعنی برای هر $v_۱, v_۲ \in V$ رابطه‌ی:

$$< T(v_۱), T(v_۲) >=< v_۱, v_۲ >$$

برقرار باشد.

تعریف ۱۱.۱ اگر $\{e_۱, \cdots, e_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای برداری V باشد می‌توان e_i ها را طوری مرتب کرد که:

$$\mathcal{E}_i =< e_i, e_i >= \begin{cases} -۱ & ; \quad i \leq s \\ +۱ & ; \quad i > s \end{cases}$$

فضای تولید شده توسط $\{e_۱, \cdots, e_s\}$ بزرگترین زیرفضای V است که منفی معین می‌باشد. بعد این فضا یعنی s، اندیس V نامیده می‌شود. $s = indV$.

تعریف ۱۲.۱ یک تانسور متریک g روی خمینه‌ی M عبارت است از تانسور مرتبه‌ی $(۰, ۲)$ مانند $g_p : T_pM \times T_pM \to R$، $(p \in M)$ روی M که اندیس آن ثابت باشد، یعنی در هر نقطه‌ی $p \in M$، g_p یک ضرب اسکالر روی T_pM است و اندیس T_pM با تغییر p ثابت می‌ماند.

تعریف ۱۳.۱ خمینه‌ی هموار M را نیمه ریمانی گویند اگر یک تانسور متریک روی M موجود باشد.

نکته ۲.۱ اندیس T_pM را که برای همه‌ی نقاط p ثابت فرض می‌شود، اندیس M می‌نامند و با علامت ν نمایش می‌دهند، بنابراین $\cdot \leq \nu \leq n = \dim M$.

نکته ۳.۱ اگر اندیس $\nu = ۰$ باشد خمینه‌ی M را ریمانی گویند.

نکته ۴.۱ اگر اندیس $\nu = ۱$ باشد خمینه‌ی نیمه‌ریمانی M را خمینه‌ی لورنتزی گویند.

توجه ۱.۱ $R^n_۱$ را فضای مینکوفسکی n بعدی می‌نامند.

نکته ۵.۱ به‌ازای $n = ۴$، $R_۱^۴$، همان فضا–زمان نسبیت خاص است.

تعریف ۱۴.۱ بردار v در T_pM را:

۱) شبه فضا می‌نامیم اگر $v = ۰$ و یا $< v, v >> ۰$ باشد.

۲) پوچ می‌نامیم اگر $v \neq ۰$ و $< v, v >= ۰$ باشد.

۳) شبه زمان می‌نامیم اگر $< v, v >< ۰$ باشد.

تعریف ۱۵.۱ فرض کنید P یک زیرخمینه از خمینه‌ی نیمه ریمانی M است. اگر $j^*(g)$ تانسور متریک روی P باشد.P یک خمینه‌ی نیمه ریمانی است که آن را زیرخمینه‌ی نیمه ریمانی M می‌نامند. ($j : P \to M$ نگاشت احتوا و g یک ضرب اسکالر روی M است).

فصل ۲

زیرمنیفلدهای فضاگون در فضای دسیتر

یادآوری ۱.۲ برای هر دو بردار $X = (x_\circ, \cdots, x_n)$ و $Y = (y_\circ, \cdots, y_n)$ در R^{n+1}، ضرب اسکالر X و Y را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$< X, Y >= -x_\circ y_\circ + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$(R^{n+1}, <,>)$ را یک فضای مینکوفسکی $(n+1)$ بعدی می‌نامیم و برای سادگی به جای $(R^{n+1}, <,>)$ از علامت R_1^{n+1} استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱.۲ بردار $X \in R_1^{n+1} \setminus \{0\}$ را فضاگون گویند هرگاه $< X, X >> 0$، زمان‌گون گویند هرگاه $< X, X >< 0$ و نورگون گویند هرگاه $< X, X >= 0$.

یادآوری ۲.۲ نرم بردار $X \in R_1^{n+1}$ را به‌صورت $\| X \|= \sqrt{|< X, X >|}$ تعریف می‌کنند.

تعریف ۲.۲ برای هر بردار $V \in R_1^{n+1}$ و هر عدد حقیقی C مجموعه‌ی زیر را ابرصفحه با بردار نرمال V می‌نامند:

$$HP(V, C) = \{X \in R_1^{n+1} \mid < X, V >= C\}$$

$HP(V, C)$ را ابرصفحه فضاگون گویند هرگاه V زمان‌گون باشد و به طور مشابه $HP(V, C)$ را زمان‌گون گویند هرگاه V فضاگون و آن را نورگون گویند هرگاه V نورگون باشد.

تعریف ۳.۲ فضای هیپربولیک و فضای دسیتر n—بعدی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$H_+^n(-1) = \{X \in R_1^{n+1} \mid < X, X >= -1,\ x_0 \geq 1\}$$

$$S_1^n = \{X \in R_1^{n+1} \mid < X, X >= 1\}$$

برای هر $x_1, \cdots, x_n \in R_1^{n+1}$، بردار $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n = \det \begin{pmatrix} -e_0 & e_1 & \cdots & e_n \\ x_0^1 & x_1^1 & \cdots & x_n^1 \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

که در آن $x_i = (x_0^i, \cdots, x_n^i)$ و $\{e_0, \cdots, e_n\}$ پایه متعارف R_1^{n+1} است . روشن است که $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ بر هر x_i، $(i = 1, \cdots, n)$ عمود است و داریم:

$$< X, x_1 \wedge \cdots \wedge x_n >= det(X, x_1, \cdots, x_n)$$

تعریف ۴.۲ مجموعه‌ی $LC_a = \{x \in R_1^{n+1} \mid < x - a, x - a >= 0\}$ را یک مخروط نوری بسته با راس a و $LC_{\pm}^* = \{x = (x_0, \cdots, x_n) \in LC_0 : x_0 > 0 (x_0 < 0)\}$ را مخروط نوری در مبدا می‌نامند.

اگر U زیر مجموعه ی باز R^{n-2} و $X : U \to S_1^n$ یک نشاننده باشد، گوییم X در S_1^n فضاگون است اگر $\{X_{u_i}(u)\}$ فضاگون باشد به قسمی که $u \in U$ و $X_{u_i} = \frac{\partial X}{\partial u_i}$، در این‌صورت $M = X(U)$ را زیرخمینه‌ی فضاگون با نقص بعد دو در S_1^n گویند.

با استفاده از این مطلب که M یک زیرمنیفلد از S_1^n است، برای هر $p \in M$ می‌توان نوشت:

$$T_p S_1^n = T_p M \oplus T_p^{\perp} M$$

$T_p^{\perp} M$ را با $N_p M$ نمایش داده و آن را فضای نرمال بر $T_p M$ گویند. از آنجاکه M فضاگون می‌باشد می‌توان نتیجه گرفت $N_p M$، زمان‌گون است.

برای هر $p \in M$ فضای مماس $T_p M$ از M یک زیرفضای فضاگون و فضای نرمال $N_p M$ یک رویه‌ی زمان گون است. $n^T(u)$ را برش نرمال یکه زمان‌گون متعلق به $N_p M$ گویند هرگاه برای هر $u \in U$، $< n^T(u), X(u) >= 0$، بنابراین می‌توانیم یک برش نرمال یکه فضاگون $n^S(u) \in N_p M$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$n^S(u) = \frac{n^T(u) \wedge X_{u_1}(u) \wedge \cdots \wedge X_{u_{n-2}}(u)}{\| n^T(u) \wedge X_{u_1}(u) \wedge \cdots \wedge X_{u_{n-2}}(u) \|}$$

و داریم $< n^T(u), n^T(u) >= -1$ و $< n^S(u), n^S(u) >= 1$ و $< n^S(u), n^T(u) >= 0$، بنابراین بردار $n^S(u) \pm n^T(u)$ نورگون است زیرا:

$$< n^S(u) \pm n^T(u), n^S(u) \pm n^T(u) >=< n^S(u), n^S(u) > \pm < n^S(u), n^T(u) > \pm$$

$$< n^T(u), n^S(u) > + < n^T(u), n^T(u) >= (-1) + (1) = 0$$

از آنجایی‌که $\{X(u), X_{u_1}(u), \cdots, X_{u_{n-2}}(u)\}$ یک پایه برای $T_p M$ و $\{n^T(u), n^S(u)\}$ پایه‌ی فضای نرمال $N_p M$ است، بنابراین دستگاه $\{X(u), n^T(u), n^S(u), X_{u_1}(u), \cdots, X_{u_{n-2}}(u)\}$ پایه‌ای برای $T_p R_1^{n+1}$ است.

با استفاده از تعاریف بالا، ازآنجاکه X فضاگون است داریم $<X,X>\equiv 1$. بنابراین برای $(i=1,2,\cdots,n-1)$، $<X_{u_i},X>=0$. ازاین‌رو بردار $e(u)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e(u)=\frac{X(u)\wedge X_{u_1}(u)\wedge\cdots\wedge X_{u_{n-1}}(u)}{\parallel X(u)\wedge X_{u_1}(u)\wedge\cdots\wedge X_{u_{n-1}}(u)\parallel}$$

درنتیجه روابط $<e(u),X_{u_i}>\equiv<e(u),X>=0$, $<e(u),e(u)>=-1$، برای $(i=1,2,\cdots,n-1)$ برقرار است.

از آنجاکه $X(u)\in S_1^n$ و $e(u)\in H_+^n(-1)$، پس $X(u)\pm e(u)\in LC_\pm^*$.

n^T و n^{-T} دو بردار نرمال یکه زمان‌گون و n^S و n^{-S} دو بردار یکه فضاگون متعلق به N_pM هستند، بنابراین $n^T\pm n^S$ و $n^{-T}\pm n^{-S}$ دو بردار نورگون متناظر با آنها می باشند.

لم ۱.۲ بردارهای $n^T\pm n^S$ و $n^{-T}\pm n^{-S}$ موازی اند.

ابررویه‌ی $HP(v,c)\cap S_1^n$ را درنظر می‌گیریم، $HP(v,c)\cap S_1^n$ را یک ابرسطح [1] بیضوی گویند هرگاه $HP(v,c)$ فضاگون، یک ابرسطح هیپربولیک گویند هرگاه $HP(v,c)$ زمان‌گون باشد، همچنین $HP(v,1)\cap S_1^n$ را یک ابر$h-$کره‌ی دسیتر نامند هرگاه، $HP(v,1)$ نورگون باشد.

نگاشت گوس مخروط نوری برای $M=X(U)$ به‌صورت زیر قابل تعریف است:

$$L^\pm:U\to LC^*$$

$$L^\pm(u)=n^T(u)\pm n^S(u)$$

قضیه ۱.۲ فرض کنید $X:U\to S_1^n$ یک ابررویه‌ی فضاگون در S_1^n باشد. تصویر گوسی مخروط نوری $L^\pm$ ثابت است اگر و فقط اگر ابررویه‌ی فضاگون $M=X(U)$ بخشی از یک ابر$h-$کره‌ی دسیتر باشد.

[1] hyperquadric

برهان فرض می‌کنیم $L^{\pm}(u)$ ثابت باشد، آن‌گاه به‌ازای هر $u \in U$ داریم:

$$< X(u), L^{\pm} >=< X(u), X(u) \pm e(u) >= ۱$$

بنابراین $X(U) \subset HP(L^{\pm}, ۱)$. از طرفی داشتیم $X(U) \subset S_۱^n$، درنتیجه $X(U) \subset HP(L^{\pm}, ۱) \cap S_۱^n$.

برعکس: فرض می‌کنیم به‌ازای $v \in LC^*$ و $c \neq ۰$ رابطه‌ی $X(U) \subset HP(v, c) \cap S_۱^n$ برقرار باشد، آنگاه:

$$< X(u), v >= c \qquad \Longrightarrow \qquad < X_{u_i}(u), v >=< v, v >= ۰$$

و این بدین معنی است که $v = cL^+(u)$ یا $v = cL^-(u)$. بنابراین $L^{\pm}$ بردار ثابت $\frac{۱}{c}v$ است.□

نگاشت $n^T \pm n^S : M \to R_۱^{n+۱}$ را درنظر می‌گیریم، برای هر $p \in M$ دیفرانسیل آن که یک نگاشت خطی است به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_p(n^T(u) \pm n^S(u)) : T_pM \to T_pR_۱^{n+۱} = T_pM \oplus N_pM$$

حال دو نگاشت تصویر یکا متعامد $\pi^t : T_pR_۱^{n+۱} \to T_pM$ و $\pi^n : T_pR_۱^{n+۱} \to N_pM$ را درنظر گرفته و با استفاده از آن نگاشت‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$d_p(n^T \pm n^S)^t = \pi^t \circ d_p(n^T \pm n^S)$$

$$d_p(n^T \pm n^S)^n = \pi^n \circ d_p(n^T \pm n^S)$$

تبدیل‌های خطی $S_p^{\pm}(n^T, n^S) = -d_p(n^T \pm n^S)^t$ و $A_p = d_p(n^T \pm n^S)^n$ روی T_pM را به ترتیب یک $(n^T, n^S)-$عملگر شیب از $M = X(U)$ در $p = X(u)$ و یک التصاق نرمال وابسته به کنج نرمال (n^T, n^S) از M در p می‌نامند.

مقادیر ویژه $S_p^{\pm}(n^T, n^S)$ را با $\{\kappa_i^{\pm}(n^T, n^S)(p)\}_{i=1}^{n-2}$ نمایش داده و آن را انحنای اصلی مخروط نوری وابسته به (n^T, n^S) در نقطه p می‌نامند، همچنین مقدار ویژه A_p را با $\bar{\kappa}$ نمایش می‌دهند.

انحنای گوس–کرونکر مخروط نوری وابسته به (n^T, n^S) در نقطه p را به‌صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$K_l^{\pm}(n^T, n^S)(p) = det S_p^{\pm}(n^T, n^S)$$

تحت یکسانی U و M، مشتق $dX(u_0)$ را می‌توان با نگاشت همانی id_{T_pM} روی فضای مماس T_pM در $p = X(u_0)$ یکسان درنظر گرفت. این بدان معناست که $dL^{\pm}(u_0) = id_{T_pM} \pm de(u_0)$.
با دلایلی مشابه می‌توان ثابت کرد که $de(u_0)$ نیز یک تبدیل خطی روی فضای مماس T_pM است، بنابراین $dL^{\pm}(u_0)$ یک تبدیل خطی روی T_pM است به‌طوری‌که $S_p^{\pm} = dL^{\pm}(u_0) : T_pM \to T_pM$ و $A_p = -de(u_0) : T_pM \to T_pM$. از این‌رو $S_p^{\pm} = id_{T_pM} \pm A_p$. درنتیجه رابطه‌ی $\bar{\kappa}_p^{\pm} = -1 \pm \kappa_p$ بین مقادیر ویژه‌ی $S_p^{\pm}$ و A_p برقرار می‌شود.

تعریف ۵.۲ نقطه p را یک (n^T, n^S)–نقطه نافی نامند هرگاه انحناهای اصلی در نقطه p برابر و برای $\kappa^{\pm} \in R$ رابطه‌ی $S_P^{\pm}(n^T, n^S) = \kappa^{\pm} id_{T_pM}$ برقرار باشد. همچنین M را کلاً نافی گویند هرگاه هر نقطه‌ی M یک (n^T, n^S)–نقطه نافی باشد.

قضیه ۲.۲ اگر $M = X(U)$ کلاً نافی باشد، به‌ازای هر $p \in M$، $\kappa_p^{\pm}$ و $\bar{\kappa}_p$ ثابت و برابر $\kappa^{\pm}$ و $\bar{\kappa}$ هستند. آن‌گاه رده‌بندی زیر برقرار است:

۱) فرض کنید $\kappa^{\pm} \neq 0$.

- اگر $0 < |\bar{\kappa}| = |\kappa^{\pm} + 1| < 1$، آن‌گاه M یک قسمت از ابرسطح هیپربولیک $HP(v, 1) \cap S_1^n$ است.
- اگر $1 < |\bar{\kappa}| = |\kappa^{\pm} + 1|$، آنگاه M یک قسمت از یک ابرسطح بیضوی $HP(v, 1) \cap S_1^n$ است.

- اگر $\bar{\kappa} = \kappa^{\pm} + 1 = 0$، آن‌گاه M یک قسمت از یک ابرسطح هیپربولیک $HP(v, 0) \cap S_1^n$ است.

۲) اگر $\kappa^{\pm} = 0$ آن‌گاه M یک قسمت از ابر h–کره دسیتر است.

برهان با استفاده از تعریف به‌ازای $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ و هر $p = X(u) \in M$ داریم $-L^{\pm}_{u_i} = \kappa^{\pm}_p X_{u_i}(u)$، بنابراین $L^{\pm}_{u_i u_j}(u) = \kappa^{\pm}_{u_j p} X_{u_i}(u) + \kappa^{\pm}_p X_{u_i u_j}(u)$. از آنجاکه $L^{\pm}_{u_i u_j} = L^{\pm}_{u_j u_i}$ و $X_{u_i u_j} = X_{u_j u_i}$، آنگاه $\kappa^{\pm}_{u_j p} X_{u_i}(u) - \kappa^{\pm}_{u_i p} X_{u_j}(u) = 0$. به‌عبارت دیگر به‌ازای $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$، X_{u_i} ها مستقل خطی‌اند، درنتیجه $\kappa^{\pm}_p$ ثابت و برابر $\kappa^{\pm}$ است. ازآنجاکه $\kappa^{\pm} = \pm\bar{\kappa}_p - 1$، داریم $\bar{\kappa}^{\pm}_p$ ثابت و برابر $\bar{\kappa}^{\pm}$ است.

حال فرض می‌کنیم $\kappa^{\pm} \neq 0$، با استفاده از فرض به‌ازای $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$، داریم $-e_{u_i} = \bar{\kappa} X_{u_i}$، بنابراین برای هر $u \in U$ بردار ثابت a موجود است به‌طوری‌که $a = \bar{\kappa} X(u) + e(u)$.

اگر $|\bar{\kappa}| = |\kappa^{\pm} + 1| \neq 0$، برای بردار $v = (\frac{1}{\bar{\kappa}})a$، داریم $< v, v >= 1 - \frac{1}{\bar{\kappa}^2}$ و $< X, v >= 1$. بنابراین دو ادعای اول برقرار است. اگر $\bar{\kappa} = 0$، به‌ازای $v = a$ روابط $< v, v >= -1$ و $< X, v >= 0$ برقرار است، در نتیجه ادعای سوم نیز برقرار می‌باشد.

سرانجام فرض می‌کنیم $\kappa^{\pm} = 0$، بنابراین به‌ازای $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ داریم $L^{\pm}_{u_i} = 0$ و این نتیجه می‌دهد که $L^{\pm}$ ثابت است و بنابراین حکم ثابت می‌شود.$\square$

از آنجا که X_{u_i} ها برای $(i = 1, 2, \cdots, n-2)$ بردارهایی فضاگون اند یک متر ریمانی روی M به‌صورت $ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n-2} g_{ij}\ du_i\ du_j$ قابل تعریف است، که در آن برای هر $u \in U$، g_{ij} به‌صورت $g_{ij} =< X_{u_i}, X_{u_j} >$ می‌باشد.

همچنین فرم اساسی دوم مخروط نوری، وابسته به کنج نرمال (n^T, n^S) برای هر $u \in U$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h^{+}_{ij}(u) = - < (n^T \pm n^S)_{u_i}, X_{u_j} >$$

نکته ۱.۲ فرمول ون گارتن مخروط نوری وابسته به کنج نرمال (n^T, n^S) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$(a):\ (n^T \pm n^S)_{u_i} = \pm < n^S, n^T_{u_i} > (n^T \pm n^S) - \sum_{j=1}^{n-2} h_i^{\pm j}(n^T, n^S) X_{u_j}$$

به‌قسمی که:

$$(h_i^{j\pm}(n^T, n^S))_{ij} = (h_{ik}^{\pm}(n^T \pm n^S))_{ik} (g^{kj})_{kj}$$

و

$$(g^{kj})_{kj} = (g_{kj})^{-1}$$

بنابراین :

$$(b):\ \pi^t \circ (n^T \pm n^S)_{u_i} = -\sum_{j=1}^{n-2} h_i^{j\pm}(n^T, n^S) X_{u_j}$$

برهان از آنجا که $< n^T, n^T >= -1$، داریم $< n^T_{u_i}, n^T >= 0$ و با استفاده از $< n^T, n^S >=<$ $n^T, Xu_i >=< n^S, Xu_i >= 0$ داریم:

$$(n^T + n^S)_{u_i} = \gamma n^T + \mu n^S + \sum_{j=1}^{n-2} T_i^j X_{u_j} \Rightarrow n^T_{u_i} + n^S_{u_i} = \gamma n^T + \mu n^S + \sum_{j=1}^{n-2} T_i^j X_{u_j}$$

$$\cdot < , n^T > \rightarrow < n^T_{u_i}, n^T > + < n^S_{u_i}, n^T >= \gamma < n^T, n^T > + \mu < n^S, n^T >$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} T_i^j < X_{u_j}, n^T >$$

$$\Rightarrow\ -\gamma = < n^S_{u_i}, n^T > \Rightarrow\ \gamma = - < n^S_{u_i}, n^T >$$

با روشی مشابه می‌توان ثابت کرد $\mu = < n^T_{u_i}, n^S >$. همچنین با استفاده از رابطه‌ی $< n^T, n^S >= 0$ داریم: