دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

تقریب انتگرال‌های منفرد نوع کوشی با تابع وزن تعریف شده روی بازه انتگرال‌گیری

استاد راهنما

دکتر صداقت شهمراد

استاد مشاور

دکتر مهرداد لکستانی

پژوهشگر

ساعد جلالی

۱۳۹۲

بسم الله الرّحمن الرّحیم

الهی! دل ده، که در کار تو جان بازیم. جانی ده، که کار آن جهان سازیم. تقوایی ده، که دنیا را بسپریم. روحی ده، که از دین برخوریم. یقینی ده، که در آز بر ما باز نشود. قناعتی، تا صعوه‌ی حرص ما باز نشود. دانایی ده، که از راه نیفتیم. بینایی ده، که در چاه نیفتیم. دست گیر، که دست آویز نداریم، درگذار، که بد کرده‌ایم. آزرم دار، که آزرده‌ایم. طاعت مجوی، که آب آن نداریم. از هیبت مگوی، که تاب آن نداریم. توفیقی ده، تا در دین استوار شویم. عقبی ده، تا از دنیا بیزار شویم. نگاهدار، تا پریشان نشویم. به راه دار تا پشیمان نشویم. بیاموز، تا شریعت بدانیم. برافروز، تا در تاریکی نمانیم. بنمای، تا در روی کس ننگریم. بگشای دری، که بگذریم. تو بساز، که دیگران ندانند. تو بنواز، که دیگران نتوانند. همه را از خود رهایی ده. همه را به خود آشنایی ده. همه را از مکر شیطان نگاهدار. همه را از فتنه‌ی نفس آگاه دار. الهی! بساز کار من، و منگر به کردار من. دلی ده، که طاعت افزون کند. طاعتی ده، که به بهشت راهنمون کند. علمی ده، که در او آتش هوا نبود. علمی ده، که در او آب زرق و ریا نبود. دیده ای ده، که عزّ ربوبیت تو بیند. نفسی ده، که حلقه‌ی بندگی تو در گوش کند. جانی ده، که زهر حکمت تو به طبع نوش کند. تو شفا ساز، که از این معلولان شفایی نیاید. تو گشادی ده، که از این ملولان کاری نگشاید. به اصلاح آر، که نیک بی‌سامانیم! جمع دار، که بس پریشانیم.

ساعد جلالی

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم به خاطر زحمات بی دریغشان.

به نام خدا

و من لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

راز و رمز پویای علم و کشف معانی بدیع و تجلی جلوه‌های شهودی معرفت کیمیایی است که آسمان علم به برکت سیما و سیره‌ی نورانی نبی مکرم صلی الله علیه و آله و سلم، انسان در بند خاک را به معراج حضور می‌خواند. و چه خرم علمی که از چشمه‌ی معارف سیراب شود و چه زیبا دانشی که قبای پرنیانش به عطر و بوی گلستان محمدی معطر شود و چه معماری باشکوهی، بنایی که سنگ هویت و فرهنگ آن ریشه درمدینه النبی بیابد. و امروز کاخ آباد علم به سروش معنوی و مفهوم پیام او بیش از پیش محتاج راهنمایانی است که علاوه بر حفظ آبادانی آن در راه اعتلای آن به فرزندان خویش محبت نمایند.

جناب آقای دکتر **صداقت شهمراد** استاد راهنمای بزرگوارم:

شما روشنایی بخش تاریکي جان هستید و ظلمت اندیشه را نور می‌بخشید. چگونه سپاس گویم مهربانی و لطف شما را که سرشار از عشق و یقین است. چگونه سپاس گویم تأثیر علم آموزی شما را که چراغ روشن هدایت را بر کلبه‌ی محقر وجودم فروزان ساخته است. آری در مقابل این همه عظمت و شکوه شما مرا نه توان سپاس است و نه کلام وصف.

جناب آقای دکتر **مهرداد لکستانی** استاد مشاور گرانقدرم:

از این‌که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این پایان‌نامه را تقبل فرمودید و در آماده‌سازی این پایان‌نامه به نحو احسن، اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادید، کمال امتنان را دارم.

جناب آقای دکتر**غلامرضا حجتی** استاد داور عزیزم:

از این‌که اوقات ارزشمند خویش را به داوری این پایان‌نامه اختصاص داده اید، از شما کمال تشکر و سپاس‌گزاری را دارم.

در پایان از تمامی اعضای خانواده‌ام که در راه کسب علم و دانش همواره مشوق و حامی من بودند و با قبول تمام مشکلات بر خود، راه تحصیل مرا هموار نمودند سپاس‌گزاری می‌نمایم.

شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا بر منتهای همت خود کامران شدم.

ساعد جلالی

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: جلالی   نام: ساعد

عنوان: تقریب انتگرال‌های منفرد نوع کوشی با تابع وزن تعریف شده روی بازه انتگرال‌گیری

استاد راهنما : دکتر صداقت شهمراد

استاد مشاور : دکتر مهرداد لکستانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی کاربردی   گرایش: آنالیز عددی   دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی   تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۲   تعداد صفحات: ۸۰

کلید واژه‌ها: انتگرال منفرد، معادله انتگرال منفرد، قاعده انتگرال‌گیری، درونیاب اسپلاین خطی، تابع وزن

چکیده

جواب‌های معادلات انتگرال منفرد (SIEs) مشخصه بر حسب انتگرال‌های منفرد نوع کوشی با تابع وزن بیان می‌شود. قواعد انتگرال‌گیری جدیدی را برای تقریب تمامی جواب‌های معادله انتگرال منفرد مشخصه نوع کوشی روی بازه $[-۱,۱]$ معرفی می‌کنیم. تخمین خطاها در کلاسی از توابع $H^{\alpha}([-۱,۱],A)$ و $C^{۱}([-۱,۱])$ بیان می‌شود. نتایج عددی حتی برای حالت‌های نیمه‌کراندار و بی‌کران از جواب‌های انتگرال منفرد مشخصه نوع اول بسیار مطلوب هستند.

فهرست مطالب

مقدمه **۴**

۱ معادلات انتگرال و مفاهیم اولیه **۶**

۱.۱ انتگرال‌های مجازی ۶
۲.۱ مفاهیم اولیه توابع مختلط ۷
۳.۱ قاعده انتگرال لایبنیتز ۹
۴.۱ مقدار اصلی کوشی ۱۰
۵.۱ بسط لوران ۱۴
۶.۱ توابع گاما و بتا ۱۵
۷.۱ انتگرال‌گیری عددی ۱۶
۱.۷.۱ قاعده ذوزنقه‌ای ۱۷
۲.۷.۱ قاعده سیمپسون ۱۹
۳.۷.۱ روش‌های نیوتن-کاتس باز ۲۰
۸.۱ معادلات انتگرال ۲۱
۱.۸.۱ پیدایش معادلات انتگرال ۲۱
۲.۸.۱ انواع معادلات انتگرال ۲۳

۲ معادله انتگرال منفرد با هسته کوشی **۲۵**

۱.۲ معادله انتگرال آبل ۲۵
۲.۲ معادله انتگرال منفرد روی خم $\mathcal{L}$ ۲۶
۳.۲ معادلات انتگرال منفرد نوع اول با هسته کوشی ۲۷
۱.۳.۲ معادله انتگرال منفرد نوع اول با هسته کوشی روی $L = [-۱, ۱]$ . . . ۲۷

۴.۲ قاعده انتگرال‌گیری برای تقریب انتگرال منفرد نوع کوشی با تابع وزن بی‌کران روی کرانه‌ها ۳۳

۳ ساخت قاعده انتگرال‌گیری برای تقریب انتگرال منفرد نوع کوشی ۴۴

۱.۳ مقدمه ۴۴

۲.۳ ساخت قاعده انتگرالگیری عددی ۴۷

۱.۲.۳ ساخت قاعده انتگرالگیری عددی برای $Q_i(f,x)$ ۴۷

۲.۲.۳ قاعده انتگرالگیری برای $I_i(f,x)$ ۵۰

۳.۳ تخمین خطاها ۵۳

۴ نتایج عددی ۶۳

۱.۴ مقدمه ۶۳

۲.۴ مثال‌های عددی ۶۳

مراجع ۷۷

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۷۸

فهرست اشکال

۱.۲ افراز بازه ۳۵

۱.۴ نمودار خطای جدول ۱ . . . . ۶۵
۲.۴ نمودار خطای جدول ۲ . . . . ۶۶
۳.۴ نمودار خطای جدول ۳ . . . . ۶۷
۴.۴ نمودار خطای جدول ۴ . . . . ۶۸
۵.۴ نمودار خطای جدول ۵ . . . . ۷۰
۶.۴ نمودار خطای جدول ۶ . . . . ۷۱
۷.۴ نمودار خطای جدول ۷ . . . . ۷۲
۸.۴ نمودار خطای جدول ۸ . . . . ۷۳

مقدمه

معادلات انتگرال منفرد با هسته‌های کوشی و هیلبرت در کارهای هیلبرت و پوانکاره در شروع قرن بیستم به عنوان تعمیم معادلات فردهلم ظاهر شدند. در دهه سی‌ام رابطه تنگاتنگی بین این معادلات و مسائل متعدد در ایرودینامیک، نظریه کشسانی، الکترودینامیک، و رشته‌های دیگر پیدا شد. از آن پس توسعه خوبی در ارتباط با تئوری این معادلات شروع شد.

افرادی چون **کارلمن**[۱]، **پلملج**[۲]، **گاخوف**[۳] و **میخلین**[۴] به همراه ریاضی‌دانان لهستانی از قبیل **سوچوکی**[۵] و **پوگورزلسکی** [۶] در این فرایند نقش به‌سزایی داشتند. در همین دهه با وجود اینکه نظریه معادلات انتگرال منفرد هنوز به طور کامل توسعه نیافته بود روش‌های عددی برای حل این معادلات در حال انجام بود. تحقیق و بررسی در مورد حل عددی معادلات به صورت

$$a(x)\varphi(x) + \frac{۱}{\pi i}\int_{-۱}^{۱} \frac{b(t)}{t-x}\varphi(t)dt + \frac{۱}{\pi i}\int_{-۱}^{۱} K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad -۱ < x < ۱$$

[۱] T. Carleman

[۲] J. Plemelj

[۳] F. D. Gakhov

[۴] S. G. Mikhlin

[۵] J. Sochocki

[۶] W. Pogorzelski

توسط افرادی مانند **مالسوپ**[۷] ، **لاورنتف** [۸] و **کلدیش**[۹] آغاز شد.
در اکثر نشریات روش‌های پیشنهادی برای حل معادلات انتگرال نوع فردهلم، برای حل این نوع معادلات منفرد نیز به‌کار می‌رفت و در حالت‌های خاص محاسبه جواب‌های تقریبی به حل بعضی دستگاه‌های خطی تقلیل یافت که متاسفانه بازتاب خوبی از بسیاری ازمشخصات معادله فوق نداشتند. مثلا در نظریه معادلات انتگرال منفرد جواب معادله مشخصه به‌صورت صریح قابل محاسبه است ولی اکثر این روشها با آن مطابقت ندارند.

این پایان‌نامه که بر اساس مرجع [۴، ۵] تنظیم شده است، شامل چهار فصل است که در آن روند ساخت یک قاعده انتگرال‌گیری عددی برای انتگرال منفرد نوع کوشی با استفاده از توابع وزن را بررسی خواهیم کرد و در نهایت جواب‌های عددی حاصل را با جواب دقیق چند مساله مقایسه می‌کنیم.

[۷] G. Multhopp

[۸] M. A. Lavrent'ev

[۹] M. V. Keldysh

فصل ۱

معادلات انتگرال و مفاهیم اولیه

۱.۱ انتگرال‌های مجازی

رفتار $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ را وقتی $b \longrightarrow \infty$ مفهوم انتگرال نامتناهی (که انتگرال مجازی نوع اول نیز خوانده می‌شود) را تداعی می‌کند که آن را با علامت $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ نشان می‌دهند. یک تعمیم دیگر این‌طور به‌دست می‌آید که بازه $[a,b]$ را متناهی گرفته و f را در یک یا چند نقطه بی‌کران فرض کنیم. این انتگرال‌ها را که با فرایند حدی مناسبی به‌دست می‌آیند، انتگرال های مجازی نوع دوم می‌نامند. اگر $f(x)$ یک تابع کراندار و انتگرال پذیر روی بازه‌ای به‌صورت $[a,x]$ باشد که a یک عدد ثابت و x یک متغیر بزرگتر از a باشد، انتگرال $\int_a^\infty f(y)\mathrm{d}y$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_a^\infty f(y)\mathrm{d}y = \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(y)\mathrm{d}y = \lim_{x\to\infty}(F(x)-F(a)),$$

که درآن F تابع اولیه f است. اگر حد فوق کراندار باشد انتگرال را همگرا گوییم، در غیر این صورت واگراست.

مثال ۱.۱.۱. انتگرال مجازی $\int_1^\infty x^{-s}\mathrm{d}x$ به‌ازای $s > 1$ همگرا و به‌ازای $s \leq 1$ واگرا است. زیرا

$$\mathbf{I}(b)=\int_{1}^{b}x^{-s}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{b^{1-s}-1}{1-s}, & s\neq 1\\ \log(b), & s=1\end{cases}$$

بنابراین $\mathbf{I}(b)$ به حدی متناهی میل می‌کند *اگر وفقط اگر* $s>1$ که در این حالت حد موردنظر چنین خواهد بود

$$\int_{1}^{\infty}x^{-s}\mathrm{d}x=\frac{1}{s-1}.$$

۲.۱ مفاهیم اولیه توابع مختلط

تعریف ۱.۲.۱. یک خم پیوسته در صفحه مختلط به‌صورت پارامتری به شکل زیر تعریف می‌شود

$$Z(t)=x(t)+iy(t),$$

که در آن $x,y:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ دو تابع پیوسته می‌باشند. اگر نقاط آغازی و پایانی بر روی هم منطبق باشند، خم را بسته گویند.

تعریف ۲.۲.۱. اگر $t_1\neq t_2$ و داشته باشیم $Z(t_1)\neq Z(t_2)$، در این‌صورت خم با خودش تلاقی نخواهد کرد و خم را **ساده** یا **ژوردان** گویند [۱۴].

تعریف ۳.۲.۱. خمی که دارای مشتق پیوسته باشد، هموار نامیده می‌شود [۱۴].

تعریف ۴.۲.۱. یک تابع تحلیلی، تابعی است که به طور محلی به وسیله یک سری توانی همگرا مشخص می‌شود. به صورت دیگر، یک تابع تحلیلی یک تابع بینهایت بار مشتق پذیراست به این صورت که سری تیلور در هر نقطه z_0 در دامنه‌اش برای z به اندازه کافی نزدیک به z_0 همگراست و مقدارش برابر با $f(z)$ است. به علاوه این تابع درz_0 تحلیلی است هرگاه f در یک همسایگی z_0 تحلیلی باشد، به عبارت دیگر f در z_0 تحلیلی است هرگاه در یک همسایگی از z_0 دارای بسط تیلور باشد [۱۴].

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک خم بسته هموار در فضای مختلط باشد. ناحیه درونی $\mathcal{L}$ را با $\mathcal{D}^+$ و متمم ناحیه $\mathcal{D}^+ + \mathcal{L}$ را با $\mathcal{D}^-$ نشان می‌دهیم. اگر تابع $f(z)$ در $\mathcal{D}^+$ تحلیلی و در $\mathcal{D}^+ + \mathcal{L}$ پیوسته باشد آن‌گاه طبق فرمول کوشی برای توابع مختلط داریم

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau = \begin{cases} f(z), & z \in \mathcal{D}^+ \\ 0, & z \in \mathcal{D}^- \end{cases} \tag{1.1}$$

همچنین اگر $f(z)$ در $\mathcal{D}^-$ تحلیلی و در $\mathcal{D}^- + \mathcal{L}$ پیوسته باشد

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau = \begin{cases} f(\infty), & z \in \mathcal{D}^+ \\ -f(z) + f(\infty). & z \in \mathcal{D}^- \end{cases} \tag{2.1}$$

خم $\mathcal{L}$ در جهت مثبت در نظر گرفته می‌شود، یعنی روی مسیر بسته $\mathcal{L}$ جهت حرکت به‌گونه‌ای است که ناحیه درون $\mathcal{L}$ همواره سمت چپ متحرک باشد. انتگرال سمت چپ فرمول‌های (۱.۱) و (۲.۱) به انتگرال کوشی معروف است [۷].

در حالت خاص $f(x) = 1$ داریم

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{\tau - z}\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 1, & z \in D^+ \\ 0. & z \in D^- \end{cases}$$

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک خم بسته یا باز با طول متناهی باشد و $\varphi(\tau)$ تابعی پیوسته از متغیر مختلط τ روی خم $\mathcal{L}$ باشد، در این‌صورت انتگرال

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau, \qquad z \in \mathbb{C}\backslash L \tag{3.1}$$

از نوع کوشی نامیده می‌شود و $\varphi(\tau)$ تابع چگال و $\frac{1}{\tau - z}$ هسته آن می‌باشد [۷].

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{L}$ خم هموار و $\varphi(t)$ تابع تعریف شده روی $\mathcal{L}$ باشد. در این‌صورت تابع $\varphi(t)$ در شرط هولدر صدق می‌کند هرگاه به‌ازای هر دو نقطه دلخواه از خم داشته باشیم

$$|\varphi(t_۲) - \varphi(t_۱)| \leq A|t_۲ - t_۱|^{\lambda},$$

به‌طوری که A و λ اعداد مثبت هستند که به ترتیب ثابت هولدر و شاخص هولدر نامیده می‌شوند. گوییم یک تابع در شرط H صدق می‌کند هرگاه در شرط هولدر صدق کند و اگر λای خاص مدنظر باشد، گوییم در شرط $H(\lambda)$ صدق می‌کند. خالت خاص شرط هولدر که به‌ازای $\lambda = ۱$ حاصل می‌شود به شرط **لیپشیتس** معروف است [۱۰].

۳.۱ قاعده انتگرال لایبنیتز

قضیه ۱.۳.۱. *اگر $f(x,t)$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\mathrm{d}\alpha(x)}{\mathrm{d}x}$ و $\frac{\mathrm{d}\beta(x)}{\mathrm{d}x}$ پیوسته باشند، آن‌گاه*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\mathrm{d}t\Big) = \frac{\mathrm{d}\beta(x)}{\mathrm{d}x}f(x,\beta(x)) - \frac{\mathrm{d}\alpha(x)}{\mathrm{d}x}f(x,\alpha(x)) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x,t)\mathrm{d}t,$$

که در آن f_x مشتق تابع f نسبت به متغیر x است.

برهان. قرار می‌دهیم $F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t,x)\mathrm{d}t$ با جانشانی $u = \alpha(x)$ و $v = \beta(x)$ در $F(x)$ نتیجه می‌شود

$$F(x) = G(u,v,x) = \int_u^v f(t,x)\mathrm{d}t.$$

دقت کنید که تابع $G(u,v,x)$ در اصل معادل $F(x)$، اما وابسته به u، v و x است. از آنجا که

$$F_x(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}G(u,v,x)}{\mathrm{d}x},$$

با گرفتن مشتق زنجیری از تابع G خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G(u,v,x)}{\mathrm{d}x} &= G_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + G_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + G_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}, \\ &= G_u a'(x) + G_v b'(x) + G_x. \qquad (۴.۱)\end{aligned}$$

با استفاده از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل-انتگرال داریم

$$G_u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} G(u,v,x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \int_u^v f(t,x)\mathrm{d}t = -f(u,x) = -f(\alpha(x),x),$$

$$G_v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} G(u,v,x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} \int_u^v f(t,x)\mathrm{d}t = f(v,x) = f(\beta(x),x).$$

در نهایت برای به‌دست آوردن G_x، u و v را ثابت گرفته (اگرچه توابعی بر حسب x هستند) و نسبت به متغیر x مشتق می‌گیریم

$$G_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(u,v,x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_u^v f(t,x)\mathrm{d}t = \int_u^v \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(t,x)\mathrm{d}t = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(t,x)\mathrm{d}t.$$

با جایگذاری روابط اخیر در رابطه (۴.۱) برهان کامل می‌شود. □

۴.۱ مقدار اصلی کوشی

انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-c}, \quad a<c<b.$$

با محاسبه این انتگرال مجازی داریم

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-c} = \lim_{\varepsilon_۱,\varepsilon_۲\to ۰} \Big[-\int_a^{c-\varepsilon_۱} \frac{\mathrm{d}x}{c-x} + \int_{c+\varepsilon_۲}^b \frac{\mathrm{d}x}{x-c} \Big] = \ln\frac{b-c}{c-a} + \lim_{\varepsilon_۱,\varepsilon_۲\to ۰} \ln\frac{\varepsilon_۱}{\varepsilon_۲},$$

اگر $\varepsilon_۱$ و $\varepsilon_۲$ مستقل از یکدیگر به صفر میل کنند آن‌گاه انتگرال مجازی بالا همگرا نخواهد بود. چنین انتگرالی را انتگرال منفرد گویند، اما اگر $\varepsilon_۱ = \varepsilon_۲ = \varepsilon$ انتگرال همگرا می‌شود.

تعریف ۱.۴.۱. مقدار اصلی کوشی [۱] انتگرال منفرد

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-c}, \quad a<c<b$$

[۱] The Cauchy Prinspal Value

عبارت است از

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\int_a^{c-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x-c}\Big],$$

که طبق محاسبات بالا به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\rho.\upsilon\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}. \qquad (۵.۱)$$

در حالت کلی انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\int_a^b\frac{\varphi(x)\mathrm{d}x}{x-c} \qquad (۶.۱)$$

که $\varphi(x)$ تابعی است که روی بازه (a,b) در شرط هولدر صدق می‌کند. دراین‌صورت می‌توان نوشت

$$\int_a^b\frac{\varphi(x)\mathrm{d}x}{x-c}=\int_a^b\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}\mathrm{d}x+\varphi(c)\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x-c}. \qquad (۷.۱)$$

با توجه به شرط هولدر داریم

$$|\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}|<\frac{A}{|x-c|^{1-\alpha}}\ ,\quad 0<\alpha<1$$

پس انتگرال اولی به عنوان انتگرال مجازی موجود است و انتگرال دوم با توجه به (۵.۱) قابل محاسبه است. پس انتگرال منفرد $\int_a^b\frac{\varphi(x)dx}{x-c}$ بر حسب مقادیر اصلی کوشی موجود است و داریم

$$\rho.\upsilon\int_a^b\frac{\varphi(x)dx}{x-c}=\int_a^b\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}dx+\varphi(c)\ln\frac{b-c}{c-a}.$$

اما برای حالت مختلط فرض کنید $\mathcal{C}=(a,b)$. اگر $\xi\in\mathcal{C}$ ، به‌ازای ε به قدر کافی کوچک تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{C}_\varepsilon=\{z\in\mathbb{C}:|z-\xi|>\varepsilon\}.$$

قسمتی از خم که خارج از دایره به شعاع ε قرار می‌گیرد، از دو بخش تشکیل می‌شود. یکی خم $\mathcal{C}_{1.\varepsilon}=\mathcal{C}_{a\theta_\varepsilon}$ از نقطه a تا نقطه θ_ε، یعنی جایی که دایره $|z-\xi|=\varepsilon$ به خم $\mathcal{C}_\varepsilon$ نزدیک می‌شود، و

دیگری خم $\mathcal{C}_{۲.\varepsilon} = \mathcal{C}_{\zeta_\varepsilon b}$ است که از نقطه ζ_ε یعنی محل طلاقی دایره و خم $C_{۲.\varepsilon}$ شروع و تا نقطه b امتداد می‌یابد .

اگر مقدار ε به قدر کافی کوچک باشد آن گاه دایره خم را دقیقا در دو نقطه قطع می‌کند پس

$$\begin{aligned}\int_{C_\varepsilon} \frac{d\tau}{\tau - \xi} &= \int_{C_{۱.\varepsilon}} \frac{d\tau}{\tau - \xi} + \int_{C_{۲.\varepsilon}} \frac{d\tau}{\tau - \xi} = \ln\Big(\frac{\xi - \theta_\varepsilon}{\xi - a}\Big) + \ln\Big(\frac{\xi - b}{\xi - \zeta_\varepsilon}\Big) \\ &= \ln(\xi - \theta_\varepsilon) - \ln(\xi - a) + \ln(\xi - b) - \ln(\xi - \zeta_\varepsilon) \\ &= \ln\Big(\frac{\xi - \theta_\varepsilon}{\xi - \zeta_\varepsilon}\Big) + \ln\Big(\frac{\xi - b}{\xi - a}\Big).\end{aligned}$$

اگر $\varepsilon \to ۰$ آن‌گاه $\frac{\xi - \theta_\varepsilon}{\xi - \zeta_\varepsilon} \to -۱$ و به‌دست می‌آوریم

$$\rho.v \int_C \frac{d\tau}{\tau - \xi} = \ln(-۱) + \ln\Big(\frac{\xi - b}{\xi - a}\Big) = \ln\Big(\frac{b - \xi}{\xi - a}\Big),$$

یا

$$\rho.v \int_C \frac{d\tau}{\tau - \xi} = \pi i + \ln\Big(\frac{\xi - b}{\xi - a}\Big),$$

پس مقدار اصلی کوشی برای حالتی که خم بسته باشد، یعنی $b \to a$ برابر است با

$$\rho.v \oint_C \frac{d\tau}{\tau - \xi} = \pi i.$$

حال مقدار اصلی کوشی برای تابع مختلط $\varphi(x)$ که در شرط هولدر صدق می‌کند بر روی خم منحنی‌الخط با ابتدای a و انتهای b به‌صورت زیر است

$$\rho.v \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \varphi(t)[ln\frac{b - t}{a - t} + \pi i],$$

در حالتی که $a = b$ داریم

$$\rho.v \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + i\pi\varphi(t).$$

برای مطالعه بیشتر در این زمینه به مرجع [۶] مراجعه شود.

قضیه ۱.۴.۲. [۷] *دو انتگرال منفرد زیر را در نظر بگیرید*

$$I_۱(t) = \frac{۱}{\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \frac{۱}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_۱)}{\tau_۱ - \tau} d\tau_۱,$$

$$I_{۲}(t) = \frac{۱}{\pi i}\int_L d\tau_{۱}\frac{۱}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_{۱})}{(\tau-t)(\tau_{۱}-\tau)}d\tau_{۱},$$

هر چند تفاوت آنها در ترتیب انتگرال‌گیری است ولی با هم برابر نیستند. این تفاوت توسط فرمول **پوانکاره- برترند**[۲] به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\underbrace{\frac{۱}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\frac{۱}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_{۱})}{\tau_{۱}-\tau}d\tau_{۱}}_{I_{۱}(t)} = \varphi(\tau_{۱},\tau) + \underbrace{\frac{۱}{\pi i}\int_L d\tau_{۱}\frac{۱}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_{۱})}{(\tau-t)\tau_{۱}-\tau)}d\tau}_{I_{۲}(t)},$$

یا

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\frac{۱}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_{۱})}{\tau_{۱}-\tau}d\tau_{۱} = -\pi^{۲}\varphi(\tau_{۱},\tau) + \int_L d\tau_{۱}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_{۱})}{(\tau-t)\tau_{۱}-\tau)}d\tau.$$

قضیه ۳.۴.۱. [۷] فرض کنید $\mathcal{L}$ یک خم هموار(بسته یا باز) باشد و $\varphi(\tau)$ تابع تعریف شده روی $\mathcal{L}$ باشد که در شرط هولدر صدق می‌کند. در این‌صورت انتگرال از نوع کوشی $\Phi(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$ دارای مقادیر حدی $\Phi^-(t)$ و $\Phi^+(t)$ در تمام نقاط غیر منطبق با نقاط انتهایی است

$\Phi^-(t) = \lim_{z\to t^-}\Phi(z)$ و $\Phi^+(t) = \lim_{z\to t^+}\Phi(z)$.

این مقادیر حدی بر حسب تابع چگال $\varphi(t)$ وانتگرال منفرد $\Phi(t)$ با فرمول‌های زیر بیان می‌شوند

$$\Phi^+(t) = \frac{۱}{۲}\varphi(t) + \frac{۱}{۲\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{۱}{۲}\varphi(t) + \frac{۱}{۲\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

که انتگرال $\Phi(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$ نشانگر انتگرال منفرد بر حسب مقدار اصلی است. روابط فوق به فرمول‌های **سوخوتسکی- پلملج**[۳] معروفند که معادل روابط زیر هستند

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t),$$

$$\frac{۱}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau = \Phi^+(t) + \Phi^-(t).$$

مقدار $\Phi^+(t) - \Phi^-(t)$ جهش تابع Φ در امتداد خم $\mathcal{L}$ نامیده می‌شود.

[۲] Poincare-Bertrand

[۳] Sokhotski-Plemelj

قضیه ۴.۴.۱. [۱۴] *فرض کنید $f(z)$ در ناحیه $\mathcal{R}$ محدود به دو منحنی C_1 و C_2 تحلیلی باشد، دراین‌صورت*
$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$
قضیه ۵.۴.۱. [۱۴] *اگر $f(z)$ در ناحیه همبند ساده $\mathcal{R}$ تحلیلی باشد، آن‌گاه $\int_a^b f(z)dz$ مستقل از مسیری است که دو نقطه a و b را در $\mathcal{R}$ به‌هم وصل می‌کند .*

۵.۱ بسط لوران

در بسیاری از کاربردها لازم است که تابع $f(z)$ حول نقطه تکین خود بسط داده شود. قضیه تیلور را در این حالت نمی‌توان مورد استفاده قرار داد. لذا برای این منظور از سری لوران استفاده می‌کنیم. نمایش به وسیله سری لوران در حلقه محصور به دو دایره متحدالمرکز که $f(z)$ در تمام نقاط درونی و مرزی آن تحلیلی باشد، معتبر است.

قضیه ۱.۵.۱. [۱۴] *اگر $f(z)$ درون و روی ناحیه $\mathcal{R}$ محدود به دو دایره متحدالمرکز C_1 و C_2 به مرکز a و به ترتیب به شعاع‌های r_1 و r_2 $(r_1 > r_2)$ تحلیلی باشد، آن‌گاه برای هر z در $\mathcal{R}$ داریم*
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}, \tag{۸.۱}$$
که در آن
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\omega)}{(\omega - a)^{n+1}} d\omega, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\omega)}{(\omega - a)^{-n+1}} d\omega, \quad n = 1, 2, \ldots .$$
تعریف ۲.۵.۱. فرض کنید $f(z)$ در یک همسایگی محذوف بی‌نهایت، تحلیلی است و بسط لوران آن به شکل زیر است
$$f(z) = \ldots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$
در این‌صورت منظور از مانده $f(z)$ در بی‌نهایت که با
$$\Re_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)dz,$$

نشان داده می‌شود عدد $-c_{-1}$ است که در آن γ دایره‌ای با شعاعی به اندازه کافی بزرگ $\rho = |z|$ است که در جهت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود [۱۴].

۶.۱ توابع گاما و بتا

تعریف ۱.۶.۱. [۱۲] تابع $\Gamma(z)$ به عنوان تعمیمی از تابع فاکتوریل از اعداد صحیح مثبت به فضای مختلط در نظر گرفته می‌شود که به‌صورت زیر است

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad Re(z) > 0.$$

انتگرال فوق مطلقا همگراست و داریم

$$|\Gamma(x+iy)| \leq \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0$$

این تابع جز در نقاط $z = 0, -1, -2, \cdots$ ، همه جا تحلیلی است و

$$\Re_{z=-k}\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

از ویژگی‌های تابع گاما این است که

$$\begin{aligned}
&\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad Re(z) > 0 \\
&\Gamma(z)\Gamma(z-1) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad z \in \mathbb{C} \\
&\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

تعریف ۲.۶.۱. [۱۲] تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, \quad p,q > 0.$$

این تابع بر حسب تابع گاما به صورت زیر بسط داده می‌شود و برای اعداد مختلط p و q با قسمت حقیقی مثبت برقرار است

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$