بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ارومیه

عنوان :

نامساوی‌های وابسته به کلاس توابع p- ارز تعریف شده توسط عملگر انتگرالی سایتو

ارائه دهنده : هدایت شریفی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

استاد راهنما :

جناب آقای دکتر سعید شمس

آبان ۱۳۸۸

پایان نامه آقای/~~خانم~~ هدایت شریفی به تاریخ ۸۸/۸/۱۸

شماره — مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸٫۱۰ (هیجده و ۱۰)

قرار گرفت .

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران : دکتر حمید دهقی

۲- استاد مشاور : دکتر —

۳- داور خارجی : دکتر رسول آقالاری

۴- داور داخلی : دکتر سعید استادباشی

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر خیراله هوشیار قهرمانلو

تقدیم به :

پدر بزرگوار، مادر مهربان،

همسر دلسوز، فرزند دلبند و برادر و خواهر عزیزم

و تمامی دوستان و عزیزانی که در این راه مرا همیاری نموده‌اند.

تقدیر و تشکر :

سپاس بیکران خدای راست که دستانم را توان نوشتن از اوست
تا به انجام رسانم هر آنچه را که به یادش آغاز کردم.

سپاس آنان را که روشنای ردای علمشان، نردبان ناجی نادانی است، آنان که معلم میثاق
و مهرند و شکوفاگر شاخه‌های شباب اندیشه.

پس از حمد و ثنای پروردگار یکتا، بر خود لازم می‌دانم از:
استاد راهنمای گرانقدر جناب آقای دکتر سعید شمس
و داور خارجی جناب آقای دکتر آقالاری
و داور داخلی جناب آقای دکتر استادباشی
و نماینده تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر خیراله هوشیار قهرمانلو
راهنمایان بزرگوار و فهیمی که از لحظه‌های گرانمایه اوقات پربرکت خویش دریغ
نورزیدند و مهربانانه مشوق و موید اینجانب بودند، صمیمانه تقدیر و تشکر نمایم.
همچنین احساس فروتنانه خودم را تقدیم می‌کنم به دوستان و همکلاسی‌هایم
که با درایت و تشویق خویش مشاورانی دلسوز و فرزانه بودند.

شایسته است از تمامی عزیزانی که در تدوین این تحقیق مرا یاری نمودند
صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

فهرست مندرجات

چکیده

فرض کنید $A(p,n)$ مجموعه همه توابعی مانند f باشد که در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$f(z) = z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^k$$

همچنین تعریف می‌کنیم:

$$\phi_p(a,c;z) := z^p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} z^{k+p}$$

حال عملگر $L_p(a,c)f(z)$ رابا استفاده از ضرب هادامارد به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_p(a,c)f(z) = \phi_p(a,c;z) * f(z)$$

در این پایان‌نامه بعضی ویژگیهای اساسی عملگر $L_p(a,c)$ از جمله کران بالای قسمت حقیقی کسرهای شامل عملگربه ازای پارامترهای مختلف ؛رابطه عملگر بامشتق راشویه؛ نامعادله‌های شامل عملگر و پیروی دیفرانسیلی در میان توابع دیگر و توابعی که عملگر روی آنهااثر می‌کند و چگونگی بدست آوردن بهترین محیط برای این توابع بررسی شده‌اند.

پیشگفتار

این پایان‌نامه شامل چهار فصل است .

در فصل اول تعاریف وقضایای مورد نیاز برای فصل‌های بعدی آورده شده‌اند.این فصل شامل دو بخش است. در بخش اول به موضوع توابع محدب و ستاره‌گون خواهیم پرداخت و تعاریف و قضایایی مانند نگاشت همدیس ؛قضیه مدول ماکسیمم؛و قضیه نگاشت باز و شرایط لازم و کافی برای برای محدب یا ستاره‌گون بودن یک تابع را ذکر خواهیم کرد.

در بخش دوم به موضوع ضرب پیچشی یا هادامارد خواهیم پرداخت. ابتدا ضرب را تعریف کرده و سپس به معرفی خواص آن می‌پردازیم و چند لم و قضیه را در این باره بیان و اثبات خواهیم کرد.

در فصل دوم قضایای پیروی دیفرانسیلی را ذکر می‌کنیم.این فصل هم شامل دو بخش است.در بخش اول به موضوع توابع تحلیلی وتک‌ارز خواهیم پرداخت و با معرفی کلاسهای $A(p,n)$ و $A(p,n,\alpha)$ قضایایی را در مورد توابع متعلق به این کلاسها ثابت خواهیم کرد.سپس با معرفی کلاس $A(p,n;a,c,\alpha)$ و تابع

$$\phi_p(a,c;z) := z^p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} z^{k+p}$$

عملگرانتگرالی سایتو را به صورت

$$L_p(a,c)f(z) = \phi_p(a,c;z) * f(z)$$

تعریف می‌کنیم.همچنین با تعریف مشتق راشویه به وسیله یک قضیه آن را به عملگرسایتو مرتبط خواهیم کرد.همچنین حالت خاصی از مشتق راشویه را که همان مشتق معمولی است بیان خواهیم کرد. سپس به معرفی پیروی دیفرانسیلی می‌پردازیم و قضایایی را در مورد آن اثبات خواهیم کرد.

در بخش دوم به تعاریف لم‌ها و قضایایی خواهیم پرداخت که برای اثبات دو لم اصلی مقاله مذکور در (هر کدام تحت عنوان یک قضیه)کتاب «پیروی‌های دیفرانسیلی » نوشته آقایان «میلر» و«موکانو»

مورد نیازند سپس این دو لم را نیز ثابت خواهیم کرد.تعاریفی نظیر زنجیر لاونر ؛توابع پذیرفتنی ؛شرط پذیرفتگی؛جواب پیروی دیفرانسیلی ؛محیط بر جواب پیروی دیفرانسیلی و بهترین محیط در این بخش آورده شده‌اند.

فصل سوم در باره پیروی دیفرانسیلی در بین توابع تحلیلی می‌باشد.در قسمت اول این فصل به نامعادله‌های شامل عملگر خطی $L_p(a,c)$ می‌پردازیم و یک قضیه مهم را در این زمینه ثابت خواهیم کرد و با استفاده از آن نتیجه‌ای رانیز در مورد مشتقات راشویه بررسی خواهیم کرد.

در بخش دوم این فصل به نتایج حاصله از توابع تحلیلی می‌پردازیم و چندین قضیه مهم رادر مورد پیروی دیفرانسیلی در بین توابع تحلیلی و بدست آوردن بهترین محیط برای این توابع ؛ثابت خواهیم کرد و در آخرین تذکر این فصل با استفاده از نتایج بدست آمده به اثبات دوباره یکی از قضایای فصل اول که قضیه اول مقاله است خواهیم پرداخت .

فصل چهارم تحت عنوان مراجع نیز که فصل آخر مقاله می‌باشد شامل سه بخش واژه‌نامه فارسی به انگلیسی و واژه‌نامه انگلیسی به فارسی و کتاب‌نامه می‌باشد.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ توابع محدب و ستاره‌گون

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم G یک مجموعه باز بوده و $f : G \to \mathbb{C}$ یک تابع مختلط باشد. گوییم f در نقطه $z_\circ \in G$ مشتق پذیر است هر گاه

$$\lim_{h \longrightarrow \circ} \frac{f(z_\circ + h) - f(z_\circ)}{h}$$

موجود باشد و آن را با $f'(z_\circ)$ نشان می دهیم.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم G یک مجموعه باز در $\mathbb{C}$ بوده و f نگاشتی از G به توی $\mathbb{C}$ باشد. f را در G تحلیلی گوییم هر گاه f در هر نقطه از G مشتق پذیر باشد. همچنین گوییم f در نقطه $z_\circ \in G$ تحلیلی است هر گاه f در یک همسایگی از $z_\circ$ مشتق پذیر باشد.

تعریف ۳.۱.۱ فرض می کنیم A کلاس توابع تحلیلی در دیسک واحد باز

$$U = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < ۱\}$$

باشد و $A_\circ$ خانواده ای از توابع $f \in A$ با ویژگی نرمالیزه $f(\circ) = f'(\circ) - ۱ = \circ$ باشد.

تعریف ۴.۱.۱ (نگاشت همدیس[۱]) نگاشت پیوسته ای که اندازه زاویه بین خمهای مار بر یک نقطه‌ی مفروض $z_\circ$ را حفظ نماید،حافظ زاویه در $z_\circ$ گوییم، اگر $f(z)$ در $z_\circ$ حافظ زاویه باشد و بعلاوه جهت زوایای بین خمهای مار بر نقطه‌ی $z_\circ$ را نیز حفظ نماید، می گوییم $f(z)$ در $z_\circ$ همدیس است.

قضیه ۵.۱.۱ هرگاه $f : G \to \mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد، آنگاه f در هر نقطه‌ی $z_\circ \in G$ که $f'(z_\circ) \neq \circ$ باشد، همدیس است.

برهان : به مرجع [۲]مراجعه کنید.

مثال ۶.۱.۱ نگاشت $f(z) = z^{۲}$ در هر نقطه‌ی $z_\circ \neq \circ$ همدیس است زیرا مشتق آن یعنی $f'(z) = ۲z$ در $z_\circ$ ، مخالف صفر است. اما $f(z) = z^{۲}$ در نقطه‌ی $z = \circ$، که f' صفر می شود، همدیس نیست. زیرا در واقع

$$arg f(z) = arg z^{۲} = ۲ arg z \ .$$

این نگاشت هر زاویه به رأس مبدأ مختصات را دو برابر می کند.

تعریف ۷.۱.۱ اگر $r > \circ$ و a یک عدد مختلط باشد ، $D(a,r) = \{z : |z-a| < r\}$ یک قرص مستدیر به مرکز a وشعاع r است و داریم $\bar{D}(a,r) = \{z : |z-a| \leqslant r\}$.

و$D'(a,r) = \{z : \circ < |z-a| < r\}$ قرص سفته به مرکز a وشعاع r نامیده می شود.

تعریف ۸.۱.۱ گوییم مجموعه E در فضای توپولوژیک X همبند نیست ، هر گاه E اجتماع دو مجموعه ناتهی مانند Aو B باشد که $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$.

مجموعه‌ی E را در فضای توپولوژیک X همبند گوییم هرگاه ناهمبند نباشد.

[۱] Conformal map

به عبارت دیگر مجموعه E را ناهمبند گوییم هرگاه دو مجموعه باز غیرتهی مانند A و B موجود باشد به طوری که

$$E\cap B\neq\emptyset\ ,\ E\cap A\neq\emptyset\ ,\ E\cap A\cap B=\emptyset\ ,\ E\subset A\cup B\ .$$

تعریف ۹.۱.۱ هر مجموعه باز و همبند ناتهی در $\mathbb{C}$ را یک ناحیه گوییم. خاطرنشان می کنیم منظور از Ω یک ناحیه است.

تذکر ۱۰.۱.۱ رده تمام توابع تحلیلی در ناحیه Ω را با $H(\Omega)$ نمایش می دهیم .

تعریف ۱۱.۱.۱ تابع تعریف شده مانند f در Ω بوسیله سری توانی قابل نمایش است هر گاه برای هر قرص $D(a,r)\subset\Omega$ یک سری مانند $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ نظیر شود که به‌ازای هر $z\in D(a,r)$ همگرا به $f(z)$ باشد.

تذکر ۱۲.۱.۱ هر گاه f بوسیله سری توانی در Ω قابل نمایش باشد ، آن‌گاه $f\in H(\Omega)$ است و f' نیز با سری توانی در Ω قابل نمایش است ، در واقع به ازای هر $z\in D(a,r)$ اگر $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ آن‌گاه به ازای این z ها داریم

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(z-a)^{n-1}$$

قضیه ۱۳.۱.۱ (قضیه مدول ماکزیمم[۲]) فرض کنیم Ω یک ناحیه بوده و $f\in H(\Omega)$ و $\overline{D(a,r)}\subset\Omega$ دراین صورت

$$|f(a)|\leqslant Max|f(a+re^{i\theta})|,\qquad -\pi<\theta\leqslant\pi \qquad (۱)$$

[۲] Maximum modulus'Theorem

تساوی در(۱) برقرار است اگر وفقط اگر f در Ω ثابت باشد. در نتیجه $|f|$ در هیچ نقطه از Ω ماکزیمم موضعی ندارد مگر f ثابت باشد.

برهان : به مرجع [۱۳]،مراجعه کنید.

قضیه ۱۴.۱.۱ (قضیه نگاشت باز[۳]) هر گاه Ω یک ناحیه و$f \in H(\Omega)$ باشد ، دراین صورت $f(\Omega)$ یک ناحیه است و یایک نقطه .

برهان : به مرجع [۱۳] صفحه ۲۵۴ ، مراجعه کنید.

تعریف ۱۵.۱.۱ تابع $f(z)$ را روی U تک ارز[۴] گوییم هر گاه برای هر z_1 و z_2 در U که $z_2 \neq z_1$ داشته باشیم $f(z_1) \neq f(z_2)$.

تعریف ۱۶.۱.۱ تابع $f(z)$ را در نقطه $z_0 \in \Omega$ موضعاً تک ارز[۵] گوییم، هر گاه در یک همسایگی z_0 تک ارز باشد.

مثال ۱۷.۱.۱ تابع $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$ را در نظر می‌گیریم. این تابع در U تحلیلی و تک ارز است. این تابع اهمیت خاصی در نظریه توابع تحلیلی دارد و به تابع کوبه [۶] معروف است.

قضیه ۱۸.۱.۱ فرض کنیم f در $B(a;R)$(گوی به مرکز a و به شعاع R)تحلیلی باشد و $f(a) = \alpha$. اگر $f(z) - \alpha$ یک صفر از مرتبه‌ی m در $z = a$ داشته باشد، آن گاه $\epsilon > 0$ و $\delta > 0$ وجود دارند بطوری که برای هر $|\eta - \alpha| < \delta$، معادله‌ی $f(z) = \eta$ دقیقاً m ریشه‌ی ساده در $B(a;\epsilon)$ دارد.

برهان : به مرجع [۲] ص.۹۸، مراجعه کنید.

---

[۳] Open Mapping Theorem

[۴] Univalent

[۵] Locally Univalent

[۶] Koebe Function

نتیجه ۱۹.۱.۱ اگر $f(z)$ در $z_۰$ تحلیلی باشد و $f'(z_۰) \neq ۰$، آن گاه f در یک همسایگی $z_۰$ یک به یک است. یا به عبارت دیگر $f(z)$ موضعاً تک ارز است.

قضیه ۲۰.۱.۱ (قضیه $\frac{۱}{۴}$ کوبه) فرض کنیم $f \in S$ در این صورت f قرص به مرکز مبدأ و شعاع $\frac{۱}{۴}$ را می‌پوشاند.

برهان : به مرجع [۳] قضیه ۳.۲ مراجعه کنید.

تعریف ۲۱.۱.۱ مجموعه تمام توابع تحلیلی و تک ارز f که در دیسک واحد $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱\}$ تعریف شده ودر شرایط نرمالیزه $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$ صدق می کنند را با S (برگرفته از کلمه آلمانی *Schlicht*) نمایش می‌دهیم.

می توان دید که هر $f \in S$ دارای بسط تیلور به فرم زیر می باشد:

$$f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < ۱.$$

تذکر ۲۲.۱.۱ یادآوری می کنیم که S یک فضای برداری نیست. یعنی لازم نیست که مجموع دو تابع در S، متعلق به S باشد.

برای مثال مجموع دو تابع $f(z) = z(۱-z)^{-۱}$ و $g(z) = z(۱-iz)^{-۱}$ در نقطه‌ی $\frac{۱}{۲}(۱+i)$ مشتق صفر دارد و لذا $f+g$ تک ارز نیست.

حال به معرفی تبدیلات اولیه‌ای خواهیم پرداخت که تحت آن تبدیلات خانواده S حفظ می شوند:

الف)تزویج [۷].اگر $f \in S$ و $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = z + \bar{a}_۲ z^۲ + \bar{a}_۳ z^۳ + \ldots$، آن گاه $g \in S$.

ب)دوران [۸].اگر $f \in S$ و $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$،آن گاه $g \in S$.

[۷] Conjugation

[۸] Rotation

ج)انبساط[۹].اگر $f \in S$ و $g(z) = r^{-1}f(rz)$، که $0 < r < 1$، آن گاه $g \in S$.

د)خودریختی دیسکی[۱۰].اگر $f \in S$ و

$$g(z) = \frac{f(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}) - f(\alpha)}{(1-|\alpha|^2)f'(\alpha)}, \quad |\alpha| < 1.$$

آن گاه $g \in S$.

ن)تبدیل ریشه دوم[۱۱] اگر $f \in S$ و $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$، آن گاه $g \in S$.

و)تبدیل مقدار حذف شده[۱۲].اگر $f \in S$ و $f(z) \neq w$، آن گاه

$$g(z) = \frac{wf(z)}{w - f(z)},$$

به S تعلق دارد.

تعریف ۲۳.۱.۱ تابع p−ارز تابعی است که هر مقداری را p بار می‌پذیرد. اگر f تابعی p ارز باشد و $f(a) = b$ آنگاه $f(z) - b$ یک صفر از مرتبه p در $z = a$ دارد. مجموعه توابع p−ارز رابر قرص واحد U با A_p نمایش می‌دهیم . به عبارت دیگر

$$A_p = \{f \in H(U) : f(z) = z^p + \sum_{p+1}^{\infty} a_k z^k\}$$

تعریف ۲۴.۱.۱ دامنه‌ی $D \subset \mathbb{C}$ را نسبت به z_0 ستاره‌گون[۱۳] گوییم، هرگاه هر پاره خطی که نقاط D را به z_0 وصل می‌کند، دقیقاً داخل D قرار گیرد.

[۹] Dilation

[۱۰] Disk Automorphism

[۱۱] Squar-root transformation

[۱۲] Omited-value transformation

[۱۳] Starlike

تعریف ۲۵.۱.۱ تابع $f \in S$ را نسبت به مبدأ ستاره‌گون (یا به طور خلاصه ستاره‌گون) گوییم اگر چنانچه U با f بر دامنه‌ای نگاشته شود که نسبت به $z_\circ = \circ$ ستاره‌گون است. این زیر رده از S را با S^* نشان می‌دهیم.

لم ۲۶.۱.۱ فرض کنیم $f \in S$. در این صورت $f \in S^*$ اگر و تنها اگر f هر قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان ستاره‌گون بنگارد.

برهان : به مرجع [۱۴] ص.۳۷۹، مراجعه کنید.

قضیه ۲۷.۱.۱ فرض کنیم $f \in S$. آنگاه $f \in S^*$ اگر و تنها اگر

$$Re\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\} > \circ, \quad (z \in U).$$

با توجه به قضیه‌ی فوق یک توسیع تحلیلی برای S^* بصورت زیر می باشد:

$$S^* = \left\{ f \in S : \quad Re\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\} > \circ \right\}.$$

مثال ۲۸.۱.۱ تابع کوبه $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ یک تابع ستاره گون است.

برای اثبات، ملاحظه می شود که نگاره‌ی $|z| < 1$ تحت تابع $k(z)$ ، صفحه‌ی W است که در امتداد پرتو $-\frac{1}{4}$ تا ∞ بریده شده است و یا این مطلب با نشان دادن

$$Re\{z\frac{k'(z)}{k(z)}\} = Re\{\frac{1+z}{1-z}\} > \circ .$$

نیز قابل اثبات است.

تعریف ۲۹.۱.۱ گوییم تابع $f \in S$، ستاره‌گون از مرتبه‌ی $0 \leq \beta < 1$ است هر گاه

$$Re\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\} > \beta, \quad (z \in U).$$

مجموعه‌ی این توابع را با $S^*(\beta)$ نمایش می دهیم. لذا

$$S^*(\beta) = \left\{f \in S: \quad Re\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\} > \beta\right\}.$$

مثال ۳۰.۱.۱ تابع $f(z) = \frac{z}{(1-z)^{2-2\beta}}$ ستاره گون از مرتبه $0 \leq \beta < 1$ می باشد.

قضیه ۳۱.۱.۱ تابع f ستاره‌گون از مرتبهٔ $1/2$ است اگر و تنها اگر برای $z_1, z_2 \in U$ داشته باشیم :

$$Re(\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}.\frac{z_2}{f(z_2)}) > 1/2$$

برهان : به مرجع [۱۸] قضیهٔ ۵.۱ مراجعه کنید.

تذکر ۳۲.۱.۱ قرار دهید

$$P = \{\phi \in H(U) : Re\ \phi > 0, \phi(0) = 1\}$$

تعریف ۳۳.۱.۱ دامنه‌ی $D \subset \mathbb{C}$ را محدب [۱۴] گوییم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه از D را به هم وصل می کند،تماماً داخل D قرار گیرد.

[۱۴] Convex

تعریف ۳۴.۱.۱ تابع $f \in S$ را محدب گوییم اگر چنانچه U با f بر یک دامنه‌ی محدب نگاشته شود. این زیر رده از S را با K نشان می دهیم.

لم ۳۵.۱.۱ فرض کنیم $f \in S$، در این صورت $f \in K$ اگر و تنها اگر f هر قرص $|z| < r < ۱$ را بر میدان محدب بنگارد.

برهان : به مرجع [۱۴] ص.۳۸۳، مراجعه کنید.

قضیه ۳۶.۱.۱ فرض کنیم f یک تابع تحلیلی و تک ارز در U باشد که $f(\circ) = \circ$ و $f'(\circ) = ۱$. در این صورت $f \in K$ اگر و تنها اگر

$$Re\{۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\} > \circ\ , \quad (z \in U).$$

به این ترتیب با توجه به قضیه‌ی فوق یک توسیع تحلیلی برای K بصورت زیر می باشد:

$$K = \left\{f \in S : \quad Re\{۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\} > \circ\right\}.$$

تعریف ۳۷.۱.۱ گوییم تابع $f \in S$ محدب از مرتبه‌ی β $(\circ \leq \beta < ۱)$ است هر گاه

$$Re\{۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\} > \beta, \quad (z \in U).$$

مجموعه‌ی این توابع را با $K(\beta)$ نمایش می دهیم. لذا

$$K(\beta) = \left\{f \in S : \quad Re\{۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\} > \beta\right\}.$$

قضیه ۳۸.۱.۱ اگر $f \in K$ باشد، آن گاه برای $z \in U$ داریم :

الف) $Re\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\} > \frac{1}{2}$ یعنی $f \in S^*(\frac{1}{2})$ و

ب) $Re\{\frac{f(z)}{z}\} > \frac{1}{2}$.

برهان : به مرجع [۳] مراجعه کنید.

قضیه ۳۹.۱.۱ (قضیه‌ی الکساندر[۱۵]) فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در U باشد که $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$. آن‌گاه $f \in K$ اگر و تنها اگر $zf'(z) \in S^*$.

قضیه ۴۰.۱.۱ (قضیه‌ی نوشیرو-وارچوسکی[۱۶]) اگر f یک تابع تحلیلی در دامنه‌ی محدب D بوده و $Re\{f'(z)\} > 0$، آن گاه f در D تک ارز است.

برهان : به مرجع [۳] قضیه۲.۱۶ مراجعه کنید.

تعریف ۴۱.۱.۱ تابع $f \in S$ را نزدیک به‌محدب[۱۷] گوییم اگر و تنها اگر یک تابع محدب g (نه لزوماً نرمالیزه) چنان باشد که

$$Re\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\} > 0$$

و این معادل است با اینکه تابع ستاره گون h (نه نرمالیزه) چنان باشد که

$$Re\{z\frac{f'(z)}{h(z)}\} > 0$$

این زیر رده از S را با C نشان می دهیم.

تذکر ۴۲.۱.۱ واضح است که : $K \subset S^* \subset C \subset S$.

[۱۵] Alexander's theorem

[۱۶] Noshiro -Warschawski's theorem

[۱۷] close to convex

قضیه ۴۳.۱.۱ هر تابع نزدیک به‌محدب تک ارز است.

برهان : فرض کنیم تابع f نزدیک به‌محدب باشد ، در این صورت تابع محدبی مانند g موجود است که $Re\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\} > ۰$. فرض کنید D برد g باشد با اختیار

$$h(w) = f(g^{-۱}(w)), \qquad w \in D$$

خواهیم داشت :

$$h'(w) = \frac{f'(g^{-۱}(w))}{g'(g^{-۱}(w))} = \frac{f'(z)}{g'(z)} > ۰ \quad w \in D$$

پس طبق قضیه‌ی ۴۰.۱.۱ ، h تک ارز است . بنابراین f تک ارز است.

قضیه ۴۴.۱.۱ فرض کنید Ω یک مجموعه در صفحه مختلط $\mathbb{C}$ باشد و $\phi(u,v;z)$ یک نگاشت مختلط باشد به طوری که $\phi : \mathbb{C}^۲ \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ و $u = u_۱ + iu_۲$, $v = v_۱ + iv_۲$ همچنین فرض کنید که

$$\forall z \in U \quad , \quad \forall u_۲, v_۱ \in R \quad st \quad v_۱ \leq -(n/۲)(۱ + u_۲^۲) \qquad (۱.۱۹)$$

$$\phi(iu_۲, v_۱; z) \notin \Omega$$

حال اگر تابع $q(z) = ۱ + c_n z^n + c_{n+۱} z^{n+۱} + ...$ در U تحلیلی باشد و

$$\phi(q(z), zq'(z); z) \in \Omega \quad (z \in U)$$

آنگاه

$$Re\{q(z)\} > ۰ \qquad (z \in U)$$