بسم الله الرحمن الرحیم

۱۲۶۰۶۳

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم

پایان نامه

جهت در یافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان پایان نامه :

توصیفی از عملگرهای دارای برد بسته

استاد راهنما :

سرکار خانم دکتر ثریا طالبی

استاد مشاور :

سرکار خانم دکتر صدیقه شادکام

نگارش :

سمیه جلایری نژاد

بهمن ۸۷

تقدیم به مادرم :

او که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر
سرو وجودش همیشه سرسبز و استوار .

تقدیم به همسرم :

او که نیلوفر تلاشم بر ساقه صبور سر و گونه اش پیچید و به گل نشست.

در اینجا لازم می دانم به رسم ادب و احترام از راهنمایی های استاد ارجمند خانم دکتر ثریا طالبی تشکر فراوان داشته باشم که با دلسوزی و محبت بی دریغ خود، مرا در تهیه این مجموعه یاری نمودند .

همچنین از استاد گرامی خانم دکتر صدیقه شادکام که مسئولیت مشاوره این پایان نامه را بر عهده داشتند، کمال تشکر را دارم .

ضمناً از دوست عزیزم خانم سمیه قبدیان که همواره در طول دوران تحصیل از کمک و تشویق او بهره مند بودم ، تشکر می کنم .

جمهوری اسلامی ایران

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

تاریخ: ۱۳۸۸/۲/۱۴

شماره: ۸۱۰/۳۲۸۲

پیوست:

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه کارشناسی ارشد

پایان نامه تحت عنوان : **توصیفی از عملگرهای دارای برد بسته**

که توسط **سمیه جلایری نژاد** در مرکز **مشهد** تهیه و به هیات داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد . تاریخ دفاع ۸۷/۱۱/۲۰ نمره ۱۸/۷۵ درجه ارزشیابی عالی

اعضای هیات داوران :

نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- دکتر ثریا طالبی	استاد راهنما	استادیار	
۲- دکتر صدیقه شادکام	استاد مشاور	استادیار	
۳- دکتر علی جلیلیان عطار	استاد ممتحن	استادیار	
۴- دکتر مرتضی آقایی	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

باسمه تعالی

نام خانوادگی : **جلایری نژاد**	نام : **سمیه**
عنوان پایان نامه : **توصیفی از عملگرهای دارای برد بسته**	
استاد راهنما : **دکتر ثریا طالبی**	استاد مشاور : **دکتر صدیقه شادکام**
نماینده گروه آموزشی : **دکتر مرتضی آقایی**	استاد داور : **دکتر علی جلیلیان عطار**

درجه تحصیلی : **کارشناسی ارشد**	رشته : **ریاضی محض**	گرایش : **آنالیز**
دانشگاه : **پیام نور**	مرکز : **مشهد**	تاریخ دفاع : ۸۷/۱۱/۲۰

تعداد صفحه : **۶۹ صفحه**

کلید واژه ها : عملگر برد بسته – نقطه انباشتگی – معکوس تعمیم یافته – قضیه طیفی – تصویر طیفی – منظم سازی تیخونوف – معادله عملگر بدرفتار

چکیده :

فرض کنید X و Y دو فضای هیلبرت باشند و $T: X \to Y$ یک عملگر خطی کراندار باشد . اگر $T: X \to Y$ یک عملگر فشرده باشد در این صورت ، برد T در Y بسته است اگر و فقط اگر صفر یک نقطه انباشتگی از طیف T^*T نباشد .

در این پایان نامه قضیه فوق را برای عملگرهای خطی کراندار در حالت کلی وبه سه روش مختلف اثبات می کنیم و به این ترتیب یک ویژگی از عملگرهای کرانداری که دارای برد بسته هستند ، بدست می آوریم .

اولین اثبات با استفاده از این حقیقت است که یک مقدار طیفی تکین از یک عملگر خود الحاق یک مقدار ویژه است که این مطلب از قضیه طیفی نتیجه می شود .

دومین اثبات بوسیله روش منظم سازی تیخونوف از یک معادله عملگر بد رفتار بدست می آید .

اثبات سوم از حالت خاصی از قضیه طیفی نتیجه می شود که در آن هر عملگر خود الحاق می تواند به صورت یک عملگر ضربی روی یک فضای L^2 نمایش داده شود .

فهرست مطالب

مقدمه

فرض کنید X و Y دو فضای هیلبرت باشند و $T:X \to Y$ یک عملگر خطی کراندار باشد . اگر $T:X \to Y$ یک عملگر فشرده باشد در این صورت ، برد T در Y بسته است اگر و فقط اگر صفر یک نقطه انباشتگی از طیف T^*T نباشد .

قضیه فوق را برای عملگرهای خطی کراندار در حالت کلی اثبات می کنیم و به این ترتیب یک ویژگی از عملگرهای کرانداری که دارای برد بسته هستند ، بدست می آوریم .

بسته بودن یا نبودن برد یک عملگر T در زمینه حل معادله عملگری $Tx = y$ اهمیت ویژه ای دارد . درحقیقت معادله فوق بد رفتار(ill-posed) است اگر برد T بسته نباشد. زیرا اگر برد T بسته نباشد ، طبق قضیه (۱-۲-۱۰) عملگر T از پایین کراندار نیست ، پس با توجه به قضیه (۱-۲-۱۱) یا عملگر T یک به یک نیست یا اینکه T^{-1} پیوسته نیست و در هر صورت معادله $Tx = y$ بد رفتار است .

در این حالت ، بنا بر قضیه (٤-۲-٤) ، معکوس تعمیم یافته T یعنی $T^\dagger : R(T) + R(T)^\perp \to X$ که $y \in R(T) + R(T)^\perp$ را به $T^\dagger y$ (کمترین تقریب مربعات با نرم مینیمال) می نگارد، ناپیوسته است .

سه اثبات برای ویژگی فوق در مورد بسته بودن $R(T)$ ، بعنوان کاربردهایی از مفاهیم مختلف در نظریه اساسی عملگرها ارائه می کنیم .

در ابتدا نشان می دهیم که :

صفر یک نقطه انباشتگی از $\sigma(T^*T\big|_{N(T)^{\perp}})$ نباشد $\Leftrightarrow$ $R(T)$ بسته است

که $N(T)^{\perp}$ ، متمم متعامد از فضای پوچ $N(T)$ از T را نشان می دهد .

چون

$$\sigma(T^*T) \subseteq \{0\} \cup \sigma(T^*T\big|_{N(T)^{\perp}})$$

پس نتیجه می شود که اگر $R(T)$ بسته باشد آنگاه صفر نقطه انباشتگی $\sigma(T^*T)$ نیست . بنابراین سه اثبات مختلفی که می آوریم ، در حقیقت اثباتهایی ازمعکوس این استلزام هستند .یعنی اگر صفر یک نقطه انباشتگی $\sigma(T^*T)$ نباشد آنگاه $R(T)$ بسته است .

اولین اثبات با استفاده از این حقیقت است که یک مقدار طیفی تکین از یک عملگر خود الحاق یک مقدار ویژه است که این مطلب از قضیه طیفی نتیجه می شود .

دومین اثبات بوسیله روش منظم سازی تیخونوف (۱-۲-۱۲) از یک معادله عملگر بد رفتار بدست می آید .

این اثبات اساساً از قضیه گراف بسته ، اصل کرانداری یکنواخت و دو حقیقت زیر نتیجه می شود :

(۱) شعاع طیفی و نرم یک عملگر خود الحاق برابرند .

(۲) مقادیر طیفی غیر صفر T^*T و TT^* یکی هستند .

در اثبات سوم ، از حالت خاصی از قضیه طیفی استفاده می شود ، یعنی اینکه هر عملگر خودالحاق می تواند به عنوان یک عملگر ضربی روی یک فضای L^2 نمایش داده شود .

فصل اول

تعاریف و قضایای اولیه

بخش اول

تعاريف اوليه

۱-۱-۱ فضای باناخ

هر فضای برداری نرمدار مانند X که نسبت به متر نرمی کامل باشد یک فضای باناخ نامیده می شود .

۱-۱-۲ فضای هیلبرت

هر فضای برداری مختلط مجهز به یک ضرب داخلی یک فضای پیش هیلبرت نامیده می شود . فضای پیش هیلبرتی که نسبت به نرم $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ کامل باشد ، یک فضای هیلبرت نامیده می شود که حالت خاصی از یک فضای باناخ است .

۱-۱-۳ فضای تفکیک پذیر

فضای خطی نرمدار Ω را تفکیک پذیر می گوییم اگر دارای یک زیرمجموعه چگال شمارا باشد .

۱-۱-۴ عملگر خطی کراندار

نگاشت خطی A از فضای خطی نرمدار X به فضای خطی نرمدار Y پیوسته است اگر و فقط اگر وجود داشته باشد $c>0$ به طوری که $\|Ax\|\leq c\|x\|$ برای هر $x\in X$. به این دلیل عملگر خطی پیوسته را عملگر خطی کراندار نیز می نامند . مجموعه تمام عملگرهای خطی کراندار از X به Y را با $B(X,Y)$ نشان می دهیم و $B(X,X)$ را می نویسیم $B(X)$.

عملگر $A \in B(X,Y)$ را **از پایین کراندار** (bounded below) می گوییم اگر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد به

طوری که برای هر $x \in X$ داشته باشیم : $\|Ax\| \geq \varepsilon \|x\|$

۱ـ۱ـ۵ عملگر فشرده

یک عملگر خطی کراندار بین فضاهای باناخ ، فشرده نامیده می شود اگر گوی واحد (و بنابراین هر مجموعه کراندار) را به یک مجموعه پیش فشرده بنگارد . (مجموعه پیش فشرده مجموعه ای است که بستارش فشرده باشد.)

۱ـ۱ـ۶ نقطه انباشتگی

نقطه $x_0 \in X$ نقطه انباشتگی یا نقطه حدی برای $E \subseteq X$ نامیده می شود ، اگر هر گوی باز به مرکز x_0 شامل حداقل یک نقطه از $E - \{x_0\}$ باشد .

۱ـ۱ـ۷ نقطه تنها

هر گاه $p \in E$ و p نقطه حدی E نباشد ، آنگاه p نقطه تنهای E نام دارد .

۱ـ۱ـ۸ متمم متعامد

برای هر زیر مجموعه S از یک فضای ضرب داخلی X ، مجموعه $S^{\perp}$ را پوچساز یا متمم متعامد S می نامیم و تعریف می کنیم : $S^{\perp} = \{x \in X : \langle x,u \rangle = 0 \quad ; \forall u \in S\}$

۱ـ۱ـ۹ فضای پوچ

اگر X و Y دو فضای خطی و $A \in B(X,Y)$ ، آنگاه مجموعه $N(A)=\{x \in X : Ax=0\}$ را فضای پوچ A می نامیم .

۱ـ۱ـ۱۰ زیر فضای پایا

زیر فضای X_0 از X ، تحت عملگر خطی کراندار A پایاست اگر برای هر $x \in X_0$ داشته باشیم : $Ax \in X_0$.

۱ـ۱ـ۱۱ کراندار نقطه ای و یکنواخت

اگر X و Y دو فضای خطی نرمدار باشند و $E \subseteq X$ و β خانواده ای از عملگرهای خطی از X به Y باشد . آنگاه β کراندار نقطه ای روی E است اگر برای هر $x \in E$ ، وجود داشته باشد $M_x > 0$ به طوری که $\|Ax\| \le M_x$ برای $A \in \beta$.

خانواده β ، روی E کراندار یکنواخت نامیده می شود اگر $M > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $\|Ax\| \le M$ برای هر $A \in \beta$ و برای هر $x \in E$.

۱ـ۱ـ۱۲ الحاق عملگر A

اگر X و Y دو فضای هیلبرت و $A \in B(X,Y)$ ، عملگر یکتایی مانند $T^* \in B(Y,X)$ وجود دارد به

طوری که برای هر $x \in X$ و هر $y \in Y$ داشته باشیم : $\langle Tx,y\rangle = \langle x,T^*y\rangle$

۱ـ۱ـ۱۳ عملگر خودالحاق

اگر X فضای هیلبرت و $A \in B(X,Y)$ ، آنگاه A خود الحاق نامیده می شود اگر $A^* = A$.

۱ـ۱ـ۱۴ عملگر نرمال

اگر X فضای هیلبرت و $A \in B(X,Y)$ ، آنگاه A را نرمال می نامیم اگر $A^*A = AA^*$.

۱ـ۱ـ۱۵ عملگر تصویر

عملگر خطی $P\colon X \to X$ عملگر تصویر گفته می شود اگر : $\forall u \in R(P) \quad ; \quad Pu = u$. به عبارت دیگر P تصویر است اگر و فقط اگر : $P^2 = P$.

۱ـ۱ـ۱۶ عملگر ضربی

عملگر خطی φ در یک جبر باناخ A ضربی است اگر φ غیر بدیهی باشد و $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ برای تمام x و y ها در A .

۱ـ۱ـ۱۷ طیف عملگر A

اگر $A \in B(X)$ ، طیف A که با $\sigma(A)$ نمایش داده می شود ، مجموعه تمام اعداد مختلطی مانند λ

است که $A-\lambda I$ وارون پذیر نباشد . متمم $\sigma(A)$ را **مجموعه حلال** A می گوییم و با $\rho(A)$ نشان می دهیم .

۱_۱_۱۸ مقدار ویژه

فرض کنید $A\in B(X,Y)$. عددی مانند λ مقدار ویژه A نامیده می شود ، اگر بردار غیر صفر $x\in X$ وجود داشته باشد به طوری که $Ax=\lambda x$. در این صورت بردار x ، بردار ویژه متناظر با λ نامیده می شود .مجموعه تمام مقادیر ویژه A را **طیف ویژه** A ، (eigenspectrum) می گوییم و با σ_{eig} نشان می دهیم و داریم : $\sigma_{eig}(A)\subseteq\sigma(A)$.

۱_۱_۱۹ شعاع طیفی

اگر X فضای باناخ و $A\in B(X,Y)$ ، آنگاه شعاع طیفی A را تعریف می کنیم :

$$r_\sigma(A):=\sup\left\{|\lambda|\,;\lambda\in\sigma(A)\right\}$$

۱_۱_۲۰ σ- جبر

یک جبر از مجموعه ها روی X ، گردایه ای ناتهی چون M از زیر مجموعه های X است که تحت اجتماع های متناهی و متمم گیری بسته است . یک σ–جبر، جبری است که تحت اجتماع های شمارش پذیر بسته است .

۱-۱-۲۱ فضای اندازه

فرض کنیم X مجموعه ای مجهز به یک σ-جبر مانند M باشد . یک اندازه روی M تابعی چون $\mu:\mathrm{M}\to[0,\infty]$ است به طوری که :

الف) $\mu(\phi)=0$

ب) اگر $\{E_j\}_1^{\infty}$ دنباله ای از مجموعه های مجزا در M باشد ، آنگاه $\mu(\bigcup_1^{\infty}E_j)=\sum_1^{\infty}\mu(E_j)$.

چنانچه X یک مجموعه و $M\subset P(X)$ یک σ-جبر باشد ، (X,M) یک فضای اندازه پذیر نامیده می شود ، اگر μ یک اندازه روی (X,M) باشد ، آنگاه (X,M,μ) یک فضای اندازه نامیده می شود .

برای هر $E\subset X$، تعریف می کنیم $\mu(E)=\infty$ ؛ اگر E مجموعه ای نا متناهی باشد و $\mu(E)$ را تعداد نقاط در E در نظر می گیریم ؛ اگر E متناهی باشد . در این صورت μ را **اندازه شمارشی** روی X می نامیم .

۱-۱-۲۲ تابع مشخصه

اگر (X,M,μ) یک فضای اندازه باشد و $E\subset X$ ، تابع مشخصه χ_E از E به صورت زیر تعریف می شود :

$$\chi_E=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}.$$

۱ـ۱ـ۲۳ فضای L^2

فرض کنیم (X, M, μ) یک فضای اندازه باشد و f تابع اندازه پذیری روی X باشد . تعریف می کنیم:

$$\|f\|_2 = \left[\int |f|^2 d\mu\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad L^2(X, M, \mu) = \left\{f : X \to \mathbb{C} : \|f\|_2 < \infty\right\} .$$

با در نظر گرفتن اندازه شمارشی μ روی $(A, P(A))$ که در آن A مجموعه ای نا تهی است حالت خاص مهمی از ساختار مذکور بدست می آید ؛ در این حالت معمولاً $L^2(\mu)$ با $l^2(A)$ نشان داده می شود . بنابراین $l^2(A)$ مجموعه توابع $f : A \to \mathbb{C}$ است به طوری که $\sum_{\alpha \in A} |f(\alpha)|^2$ متناهی باشد .

۱ـ۱ـ۲۴ فضای L^∞

فرض کنیم (X, M, μ) یک فضای اندازه باشد و f تابع اندازه پذیری روی X باشد . تعریف می کنیم: $\|f\|_\infty = \inf\left\{\alpha > 0 : \mu(\left\{x : |f(x)| > \alpha\right\}) = 0\right\}$. با این قرارداد که : $\inf \Phi = \infty$ و تعریف می کنیم :

$$L^\infty = L^\infty(X, M, \mu) = \left\{f : X \to \mathbb{C} : \|f\|_\infty < \infty\right\}$$

۱ـ۱ـ۲۵ معادله عملگر بد رفتار

فرض کنیم X و Y فضاهای نرمدار و $T : X \to Y$ عملگری خطی باشد . معادله $Tx = y$ خوش رفتار (well-posed) گفته می شود اگر T شرایط زیر را داشته باشد :

T (i) پوشا باشد .

T (ii) یک به یک باشد .

T^{-1} (iii) پیوسته باشد .

در غیر این صورت معادله فوق بد رفتار گفته می شود .

۱ـ۱ـ۲۶ منحنی بسته

اگر X یک فضای توپولوژیک باشد ، یک منحنی در X، تابع پیوسته ای مانند γ است از یک بازه فشرده $[\alpha,\beta]\subset R^1$ بتوی X .

اگر نقاط ابتدا و انتهای γ بر هم منطبق باشند ، γ یک منحنی بسته است .

۱ـ۱ـ۲۷ مسیر

یک مسیر، منحنی است که در صفحه به طور تکه ای مشتق پذیر پیوسته باشد . مسیر بسته ، یک منحنی بسته است که مسیر هم باشد .

۱ـ۱ـ۲۸ فضای برداری توپولوژیکی

یک فضای برداری توپولوژیکی ، فضای برداری است که روی آن یک توپولوژی تعریف شده باشد که عمل جمع برداری و ضرب اسکالر دو بردار در آن توپولوژی پیوسته باشد و همچنین هر مجموعه تک

نقطه ای در این توپولوژی بسته باشد .

۱-۱-۲۹ فضای دوگان

اگر X یک فضای برداری باناخ باشد ، X^* فضای تمام تابعک های خطی کراندار از X به $\mathbb{C}$ می باشد .

۱-۱-۳۰ تابع هلومورفیک

در مطالعه جبرهای باناخ لازم است که مفهوم تابع تحلیلی و مختلط مقدار را به توابع برداری مقدار گسترش دهیم . حداقل دو تعریف مهم از توابع هلومورفیک را باید ذکر کنیم : هلومورفیک قوی و هلومورفیک ضعیف . اگر مقادیر تابع در یک فضای فرشه قرار گیرد ، این دو تعریف یک رده از توابع را معرفی خواهند کرد .

اگر Ω یک مجموعه باز در $\mathbb{C}$ و X یک فضای توپولوژیکی مختلط باشد

الف) تابع $f:\Omega \to X$ را هلومورفیک ضعیف در Ω گوییم اگر Λf به ازای هر $\Lambda \in X^*$ هلومورفیک به معنای معمولش باشد .

ب) تابع $f:\Omega \to X$ را هلومورفیک قوی در Ω گوییم اگر $\lim_{w\to z}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ وجود داشته باشد .(به ازای هر $z \in\Omega$)