بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۴۹۰۷_۲۰۱۲۸۸۷

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض گرایش (جبر)

عنوان

ایده‌آل های اول وابستهٔ زیرمدولهای اول و مدولهای یکدست

استاد راهنما

دکتر رضا نقی‌پور

استاد مشاور

دکتر علی‌اکبر مهرورز

پژوهشگر

الناز اسدالهی قدوسی

بهمن ۱۳۸۸

نام خانوادگی دانشجو: اسدالهی قدوسی　　　　نام: الناز

عنوان: ایده‌آل های اول وابستهٔ زیرمدولهای اول و مدولهای یکدست

استاد راهنما : دکتر رضا نقی‌پور

استاد مشاور: دکتر علی‌اکبر مهرورز

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　رشته: ریاضی محض　گرایش: (جبر)　دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی　تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۸۸　تعداد صفحه: ۶۹

کلید واژه‌ها: مدولهای یکدست و مطلقاً یکدست، قضیهٔ ایده‌آل اصلی تعمیم یافته، زیرمدولهای اول، رتبهٔ مدولها، مدول ضربی، مدول پروژکتیو، ایده‌آل محض، رد یک مدول.

چکیده

دراین پایان‌نامه ابتدا به بررسی مفاهیم و قضایایی در مورد زیرمدولهای اول در مدولهای یکدست و آزاد می‌پردازیم. بعلاوه، ارتفاع زیرمدولهای اول و زنجیرهای اشباع زیرمدولهای اول نیز مورد بحث قرار می‌گیرد. سپس نشان می‌دهیم که ایده‌آل وابستهٔ $\theta(M)$ و ایده‌آل رد $T(M)$ از مدول M، نقشهای متفاوت، اما مشابهی را بترتیب در مطالعهٔ مدولهای ضربی و پروژکتیو دارند. درواقع هردوی $\theta(M)$ و $T(M)$ مورد بررسی قرار می‌دهیم و بخصوص نشان می‌دهیم که مدولهای باوفای ضربی و پروژکتیو خواص مشابهی دارند.

فهرست مطالب

مقدمه

این پایان‌نامه بر اساس دو مقاله زیر تنظیم شده است:

1. A. Azizi, *Prime submodules and flat modules*, Acta Mathematica Sinica, 23(1), 147-152, (2007).

2. M. M. Ali, D. J. Smith, *Some remarks on multiplication and projective modules*, Comm. Algebra, 32(10), 3897-3909, (2004).

در این پایان‌نامه تمام حلقه‌ها جابه‌جایی و یکدار و تمام مدولها یکانی در نظر گرفته شده‌اند. فرض کنیم F یک R- مدول یکدست باوفا و N زیرمدولی از R- مدول M باشد. نشان می‌دهیم که N یک زیرمدول اول M است اگر و فقط اگر $F \otimes_R N$ یک زیرمدول اول $F \otimes_R M$ باشد. همچنین ثابت خواهیم کرد که اگر R یک حلقهٔ نوتری باشد، آنگاه $GPIT$ برای هر R- مدول متناهیاً تولید شده برقرار است اگر و فقط اگر برای هر ایده‌آل اول P از R، $\frac{R}{P}$ یک دامنهٔ ددکیند باشد. درضمن، اگر R یک حلقهٔ ZPI یا حلقهٔ تقریباً ضربی باشد، آنگاه $GPIT$ برای هر R- مدول متناهیاً تولید شده برقرار است.

فرض کنیم R یک حوزهٔ ایده‌آل اصلی، F یک R- مدول آزاد با رتبهٔ متناهی و N یک زیرمدول P- اول F باشد. درستی احکام زیر را در فصل ۲ ثابت خواهیم کرد:

۱) پایهٔ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ برای F و عدد صحیح k، $0 \leq k \leq n-1$، موجودند بطوریکه $N = N(k, P)$.

۲) برای هر عدد صحیح k، $0 \leq k \leq n-1$، زنجیر $N(k,0) \subseteq N(k,P)$ اشباع شده است.

۳) اگر $P \neq 0$، آنگاه $ht\, N(k,P) = k+1$.

۴) اگر $P = 0$، آنگاه $ht\, N(k, P) = k$.

در فصل ۳ از توصیفات اندرسون[1] روی مدولهای ضربی و اینکه $\theta(N) = \theta([N :_R M])$، استفاده کرده و برهان‌های جدیدی را برای قضیهٔ ۶.۱ از مرجع [۸] و لم ۴.۱ از مرجع [۱۴] به ترتیب در قضیهٔ ۱.۱.۳ و گزارهٔ ۴.۱.۳ می‌آوریم.

در قضیهٔ ۴.۲.۳، نشان می‌دهیم که اگر M یک R- مدول پروژکتیو باشد، آنگاه $R = T(M) + ann_R(m)$ برای هر $m \in M$. معادلاً $Rm = T(M)m$ برای هر $m \in M$. همچنین نشان می‌دهیم که اگر M پروژکتیو باشد، آنگاه $T(M) = \sum_{m \in M} ann_R(ann_R(m))$.

قضیهٔ ۶.۲.۳ چند خاصیت از ایده‌آلهای پروژکتیو را بدست می‌دهد. در قضیهٔ ۷.۲.۳ شرایط لازم و کافی برای اینکه یک مدول پروژکتیو، ضربی باشد را بیان می‌کنیم و در گزارهٔ ۱۲.۲.۳ نشان می‌دهیم که اگر M ضربی یا پروژکتیو باشد، آنگاه برای هر زیرمدول N از M، $T(N) \subseteq T(M)$، هرچند عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست.

[1] Anderson

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ زیرمدولهای اول و اولیه

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم M یک R- مدول باشد. یک زیرمدول سرهٔ N از M را یک زیرمدول اول[1] M گوییم هرگاه برای هر $r \in R$ و $a \in M$ بطوریکه $ra \in N$، داشته باشیم $a \in N$ یا $rM \subseteq N$. در این صورت $[N :_R M] = \{r \in R \mid rM \subseteq N\}$ یک ایده‌آل اول R است.

تعریف ۲.۱.۱ اگر N یک زیرمدول اول M باشد و $P = [N :_R M]$، در این صورت N را یک زیرمدول P- اول M گوییم.

تعریف ۳.۱.۱ زیرمدول اول N از M را یک زیرمدول اول مینیمال[2] روی زیرمدول K از M گوییم هرگاه $K \subseteq N$ و هیچ زیرمدول اولی مانند L از M موجود نباشد که $K \subset L \subset N$.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم n یک عدد صحیح نامنفی و برای هر i، $0 \leq i \leq n$، N_i یک زیرمدول اول (یا P- اول) M باشد. در این صورت زنجیر $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_n$ یک زنجیر از زیرمدولهای اول (یا P- اول) M است. حال اگر N یک زیرمدول اول M باشد، ارتفاع N را با $ht\, N$ (یا $ht_P N$) نمایش می دهیم و گوییم $ht\, N = n$، اگر برای هر زنجیر مانند زنجیر فوق داشته باشیم $N = N_0$ و هیچ زنجیر با طول بزرگتر از n با این خاصیت موجود نباشد.

---

[1] Prime submodule

[2] Minimal

قضیه ۵.۱.۱ (ایده‌آل اصلی کرول[3]) فرض کنیم R یک حلقهٔ نوتری و $x \in R$ یکال نباشد. فرض کنیم P یک ایده‌آل اول مینیمال R روی $< x >$ باشد. در این صورت $ht\, P \leq 1$.

برهان. رجوع شود به [۱۹] قضیهٔ ۲.۱۵. □

قضیه ۶.۱.۱ (تعمیم ایده‌آل اصلی کرول[4]) فرض کنیم R یک حلقهٔ نوتری و n یک عدد صحیح نامنفی باشد. فرض کنیم Q یک ایده‌آل R باشد که توسط n عضو تولید می‌شود و فرض کنیم P یک ایده‌آل اول مینیمال R روی Q باشد. در این صورت $ht\, P \leq n$.

برهان. رجوع شود به [۱۹] قضیهٔ ۴.۱۵. □

تعریف ۷.۱.۱ گوییم قضیهٔ ایده‌آل اصلی (PIT) برای R- مدول M برقراراست، اگر برای هر زیرمدول اول N از M که روی یک زیرمدول دوری از M مینیمال است داشته باشیم، $ht\, N \leq 1$.

تعریف ۸.۱.۱ گوییم قضیهٔ ایده‌آل اصلی تعمیم یافته (GPIT) برای R- مدول M برقراراست، اگر برای هر زیرمدول اول N از M که روی یک زیرمدول از M تولید شده توسط n عضو، مینیمال است داشته باشیم، $ht\, N \leq n$.

تعریف ۹.۱.۱ زیرمدول N از R- مدول M را یک زیرمدول P- اولیه[5] گوییم هرگاه برای هر $x, y \in M$ که $xy \in N$ داشته باشیم $x \in N$ یا به ازای یک n طبیعی، $y^n M \subseteq N$.

---

[3] Krull Principal ideal theorem

[4] Generilized Krull Principal ideal theorem

[5] P-primary

قضیه ۱۰.۱.۱ فرض کنیم M یک R- مدول باشد. در این صورت تناظر یک به یک بین زیرمدولهای P- اولیهٔ N از M که $P \cap S = \varnothing$ و زیرمدولهای $S^{-1}P$- اولیهٔ $S^{-1}N$ از $S^{-1}R$- مدول $S^{-1}M$ برقرار است و $S^{-1}N \cap M = N$.

برهان. رجوع شود به [۱۴] صفحهٔ ۱۶۰ قضیهٔ ۱۰. □

۲.۱ مدول کسرها، مدول یکدست و یکدست باوفا

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم M یک R- مدول و S یک زیر مجموعهٔ بستهٔ ضربی از R باشد. روی $M \times S$ رابطهٔ $\sim$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall (m,s),(m',s') \in M \times_R S, (m,s) \sim (m',s') \Leftrightarrow \exists t \in S; t(s'm - sm') = 0$$

به راحتی دیده می‌شود که $\sim$ یک نسبت هم‌ارزی روی $M \times S$ است. کلاس هم‌ارزی عضو (m,s) در $M \times S$ را با $\frac{m}{s}$ نشان می‌دهیم. پس

$$\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'} \Leftrightarrow (m,s) \sim (m',s').$$

مجموعهٔ همهٔ کلاسهای هم‌ارزی رابطهٔ $\sim$ را با $S^{-1}M$ نشان می‌دهیم، یعنی

$$S^{-1}M = \{\frac{m}{s} \mid m \in M, s \in S\}.$$

براحتی دیده می‌شود که $S^{-1}M$ با اعمال

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{sm' + s'm}{ss'}$$

و

$$\frac{a}{t}.\frac{m}{s}=\frac{am}{st}$$

یک $S^{-1}R$- مدول است که آن را مدول کسرهای M نسبت به S می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه و P یک ایده‌آل اول آن باشد. دراین صورت $S=R-P$ یک مجموعهٔ بستهٔ ضربی در R است. حلقهٔ کسرهای

$$S^{-1}R=\{\frac{r}{s}\mid r\in R,s\in S\}$$

را با نماد R_P نشان می‌دهیم و آن را موضع سازی[6] R در P می‌نامیم. موضع سازی مدولها هم بهمین صورت تعریف می‌شود.

تبصره ۳.۲.۱ مجموعهٔ $\{\frac{r}{s}\in R_P\mid r\in P,s\in R-P\}$ تنها ایده‌آل ماکسیمال R_P است، یعنی R_P یک حلقهٔ موضعی است. این ایده‌آل R_P را با PR_P نشان می‌دهیم.

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنیم M یک R- مدول باشد. در این صورت عبارات زیر معادلند:

۱) $M=0$.

۲) برای هر ایده‌آل اول P از R، $M_P=0$.

۳) برای هر ایده‌آل ماکسیمال Q از R، $M_Q=0$.

برهان. رجوع شود به [۹] صفحهٔ ۴۶. □

---

[6] Localization

گزاره ۵.۲.۱ زیرمدول اولیهٔ N از R- مدول M اول است اگر و فقط اگر $[N:_R M]$ یک ایده‌آل اول R باشد.

برهان. رجوع شود به [۱۶] گزارهٔ ۱ صفحهٔ ۶۲. □

تعریف ۶.۲.۱ یک R- مدول مانند F را یکدست[7] گوییم اگر برای هر R- همریختی یک به یک مثل $\varphi: M' \longrightarrow M$، R- هومومورفیسم $1_F \otimes_R \varphi: F\otimes_R M' \longrightarrow F\otimes_R M$ یک به یک باشد. به عبارت دیگر R- مدول F یکدست است اگر و فقط اگر برای هر دنبالهٔ دقیق کوتاه از R- مدولها و R- هومومورفیسمها مثل

$$0\longrightarrow M\longrightarrow N\longrightarrow K\longrightarrow 0,$$

دنبالهٔ

$$0\longrightarrow F\otimes_R M'\longrightarrow F\otimes_R M\longrightarrow F\otimes_R M''\longrightarrow 0$$

یک دنبالهٔ دقیقی از R- هومومورفیسمها باشد.

قضیه ۷.۲.۱ یک R- مدول مانند M یکدست است اگر و فقط اگر موضعاً یکدست باشد.

برهان. رجوع شود به [۱۰] صفحهٔ ۴۳۴. □

تعریف ۸.۲.۱ یک R- مدول مانند F را یکدست باوفا[8] گوییم هرگاه دنبالهٔ

$$0\longrightarrow M'\longrightarrow M\longrightarrow M''\longrightarrow 0,$$

Flat[7]

Faithfully flat[8]

یک دنبالهٔ دقیق کوتاه از R- مدولها و R- همومورفیسمها است اگر و فقط اگر دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow F \otimes_R M' \longrightarrow F \otimes_R M \longrightarrow F \otimes_R M'' \longrightarrow 0$$

یک دنبالهٔ دقیق کوتاه از R- همومورفیسمها باشد.

تعریف ۹.۲.۱ یک R- مدول مانند M را باوفا[9] گوییم هرگاه $ann_R M = 0$.

۳.۱ تعریف بعضی حلقه‌های خاص

تعریف ۱.۳.۱ حوزهٔ صحیح R را یک دامنهٔ ددکیند[10] گوییم اگر هر ایده‌آل R به صورت حاصلضربی از ایده‌آلهای اول باشد.

تعریف ۲.۳.۱ حلقهٔ R را یک حلقهٔ ZPI گوییم هرگاه هر ایده‌آل R را بتوان به صورت حاصلضربی از ایده‌آلهای اول نوشت.

تعریف ۳.۳.۱ حلقهٔ R یک حلقهٔ تقریباً ضربی[11] است اگر هر ایده‌آلی از R که رادیکال آن اول است، توانی از رادیکال‌اش باشد.

Faithfull[9]
Dedekind domain[10]
Almost multiplication[11]

قضیه ۴.۳.۱ اگر R یک حلقهٔ تقریباً ضربی باشد، آنگاه برای هر ایده‌آل اول P از R، R_P یک حلقهٔ ZPI است.

برهان. رجوع شود به [۱۴] صفحهٔ ۲۱۶ قضیهٔ ۲۳.۹. □

گزاره ۵.۳.۱ فرض کنیم F یک R- مدول یکدست و I یک ایده‌آل از R باشد. در این صورت $I \otimes_R F \cong IF$.

برهان. رجوع شود به [۱۹] صفحهٔ ۴۱ گزارهٔ ۷.۱.۲. □

۴.۱ رتبه، زیرمدول بی‌تاب، مدولهای آزاد

تعریف ۱.۴.۱ اگر R یک حوزهٔ صحیح با میدان کسرهای K باشد، آنگاه رتبهٔ M را بعد (یا رتبه) فضای برداری $KM = S^{-1}M$ روی K تعریف می‌کنیم، یعنی $rank\, M = dim_K KM$.

تعریف ۲.۴.۱ فرض کنیم R یک حوزهٔ صحیح و M یک R- مدول باشد. زیرمدول تابدار M را با $t(M)$ نمایش می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$t(M) = \{m \in M \mid \exists r \in R, r \neq 0, rm = 0\}.$$

حال R- مدول M را تابدار گوییم هرگاه $t(M) = M$ و بی‌تاب[12] گوییم هرگاه $t(M) = 0$.

Tortion free[12]

تعریف ۳.۴.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. R- مدول F را آزاد گوییم اگر بصورت جمع مستقیم کپی‌هایی از R باشد یعنی $F = \oplus_{i \in I} R$. اگر $Rx_i \cong R$ که $x_i \in F$، آنگاه $F = \oplus_{i \in I} Rx_i$ و مجموعهٔ $\{x_i \mid i \in I\}$ یک پایهٔ F می‌نامند.

۵.۱ ایده‌آل کسری و ایده‌آل محض

تعریف ۱.۵.۱ فرض کنیم R یک حوزهٔ صحیح و K میدان کسرهای آن باشد. زیرمجموعهٔ A از K را یک ایده‌آل کسری[13] R گوییم هرگاه

۱) A یک R- مدول باشد.

۲) عضو منظمی مانند d از R موجود باشد بطوریکه $dA \subseteq R$.

تعریف ۲.۵.۱ فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد. ایده‌آل I را ایده‌آل محض[14] R گوییم هرگاه به ازای هر R- مدول M، رشتهٔ

$$0 \longrightarrow I \otimes_R M \longrightarrow R \otimes_R M \longrightarrow \frac{R}{I} \otimes_R M$$

دقیق باشد.

---

[13] Fractional ideal

[14] Pure ideal

۶.۱ مدولهای ضربی

تعریف ۱.۶.۱ R- مدول M را یک مدول ضربی[15] گوییم اگر هر زیرمدول N از M بصورت IM باشد که I ایده‌آلی از R است. بطور معادل M ضربی است اگر و فقط اگر برای هر زیرمدول N از M، $N = [N :_R M]M$.

تعریف ۲.۶.۱ R- مدول M را یک مدول حذفی[16] گوییم اگر برای هر دو ایده‌آل I و J از R، $IM \subseteq JM$ ایجاب کند که $I \subseteq J$. همچنین M را یک مدول حذفی ضعیف[17] می‌نامیم اگر $IM \subseteq JM$ ایجاب کند که $I \subseteq J + ann_R M$.

قضیه ۳.۶.۱ مدولهای متناهیاً تولید شده و ضربی، حذفی ضعیف هستند.

برهان. رجوع شود به [۳] قضیهٔ ۳. □

نتیجه ۴.۶.۱ مدولهای متناهیاً تولید شدهٔ ضربی و باوفا، حذفی هستند.

برهان. فرض کنیم M یک R- مدول متناهیاً تولید شدهٔ ضربی و باوفا باشد. بنا به قضیهٔ قبل M حذفی ضعیف است. پس برای هر دو ایده‌آل I و J از R، $IM \subseteq JM$ ایجاب می‌کند که $I \subseteq J + ann_R M$. چون M با وفا است داریم $ann_R M = 0$، پس $I \subseteq J$ و این یعنی M حذفی است. □

---

[15] Multiplication module

[16] Cancelation module

[17] Weak cancelation module

نتیجه ۵.۶.۱ اگر M یک R- مدول متناهیاً تولید شدهٔ ضربی و باوفا باشد، آنگاه برای هر زیرمدول N از M و هر ایده‌آل I از R، $I[N:_R M] = [IN:_R M]$.

برهان. فرض کنیم $ab \in I[N:_R M]$ که $a \in I$ و $b \in [N:_R M]$. در این صورت $abM \subseteq IN$. پس $ab \in [IN:_R M]$ و در نتیجه $I[N:_R M] \subseteq [IN:_R M]$.
برعکس، فرض کنیم $x \in [IN:_R M]$ در این صورت $xM \subseteq IN$ و چون M ضربی است داریم $N = [N:_R M]M$. پس $xM \subseteq I[N:_R M]M$. حال با توجه به نتیجهٔ قبل M حذفی است پس نتیجه می‌شود $x \in I[N:_R M]$ و این یعنی $[IN:_R M] \subseteq I[N:_R M]$. $\square$

تعریف ۶.۶.۱ فرض کنیم M یک R- مدول باشد. ایده‌آل وابستهٔ M را با $\theta(M)$ نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\theta(M) = \sum_{m \in M} [Rm:_R M].$$

قضیه ۷.۶.۱ اگر M یک R- مدول ضربی باوفا باشد، آنگاه
۱) $\theta(M)$ یک ایده‌آل محض R است.
۲) $ann_R M = ann_R \theta(M) = 0$.
۳) $M = \theta(M)M$.

برهان. رجوع شود به [٦] قضیهٔ ۳.۲. $\square$

قضیه ۸.۶.۱ M یک R- مدول متناهیاً تولید شدهٔ ضربی است اگر و فقط اگر $\theta(M) = R$.

برهان. رجوع شود به [۴] قضیهٔ ۱. □

تعریف ۹.۶.۱ فرض کنیم P ایده‌آل ماکسیمالی از R باشد. R- مدول M، P- تاب [18] نامیده می‌شود اگر برای هر $m \in M$، وجود داشته باشد $p \in P$ بطوریکه $(1-p)m = 0$.

تعریف ۱۰.۶.۱ فرض کنیم P ایده‌آل ماکسیمالی از R باشد. R- مدول M، P- دوری[19] نامیده می‌شود اگر وجود داشته باشد $p \in P$ و $x \in M$ بطوریکه $(1-p)M \subseteq Rx$.

قضیه ۱۱.۶.۱ R- مدول M ضربی است اگر و فقط اگر برای هر ایده‌آل ماکسیمال P از R، M، P- تاب یا P- دوری باشد.

برهان. رجوع شود به [۸]. □

قضیه ۱۲.۶.۱ R- مدول M ضربی است اگر و فقط اگر برای هر ایده‌آل ماکسیمال P از R، $M_P = 0$ یا M موضعاً دوری باشد و برای هر زیرمدول N از M، $[N :_R M]_P = [N_P :_{R_P} M_P]$.

برهان. رجوع شود به [۵] قضیهٔ ۱.۲. □

قضیه ۱۳.۶.۱ R- مدول M، P- تاب است اگر و فقط اگر $M_P = 0_P$.

Tortion[18]

Cyclic[19]

برهان. رجوع شود به [۱]. □

لم ۱۴.۶.۱ (ناکایاما[20]) فرض کنیم M یک R- مدول ضربی و I ایده‌آلی از R باشد بطوریکه $I \subseteq J(R)$. در این صورت اگر $M = IM$، آنگاه $M = 0$.

برهان. فرض کنیم $x \in M$ دلخواه باشد. در این صورت ایده‌آلی مانند Q از R موجود است بطوریکه $Rx = QM$. بنابراین $Rx = QM = QIM = IQM = Ix$. در نتیجه $a \in I$ موجود است بطوریکه $x = ax$. پس $x(1-a) = 0$ و چون $1 - a$ در R یکال است نتیجه می‌شود $x = 0$.

قضیه ۱۵.۶.۱ فرض کنیم M یک R- مدول ضربی باوفای متناهیاً تولید شده و N یک زیرمدول متناهیاً تولید شده و یکدست از M باشد. در این صورت $[N :_R M]$ ضربی است.

برهان. رجوع شود به [۱۵] قضیهٔ ۲.۲. □

۷.۱ مدولهای پروژکتیو

تعریف ۱.۷.۱ فرض کنیم M یک R- مدول باشد. تریس[21] M را با $T(M)$ نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(M) = \sum_{f \in Hom_R(M,R)} f(M).$$

Nakayama[20]
Trace[21]