دانشگاه بیرجند
دانشکده علوم
گروه آمار

عنوان پایان نامه:

استنباط آماری توزیع پارتو بر اساس مقادیر رکوردی–زمانی و استنباط آماری برای پارامترهای فازی

ارائه شده جهت اخذ مدرك کارشناسی ارشد در رشته آمار گرایش ریاضی

استاد راهنما:

دکتر محمد قاسم اکبری

استاد مشاور:

دکتر مجید رضایی

نگارش:

علیرضا سعیدی

تابستان ۹۰

دانشگاه سیرجند
مدیریت تحصیلات تکمیلی

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

فرم شماره ۱۰

با تاییدات خداوند متعال جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی کارشناسی ارشد آقای **علیرضا سعیدی**

به شماره دانشجویی: **۸۸۲۳۱۲۶۰۲۱** رشته: **آمار** گرایش: **آمار ریاضی** دانشکده: **علوم**

تحت عنوان: استنباط آماری توزیع پارتو براساس مقادیر رکوردی- زمانی و استنباط آماری برای پارامترهای فازی

به ارزش ۶ واحد درساعت: ۱۲-۱۴ روز: یک‌شنبه مورخ: ۱۳۸۹/۰۷/۰۳

با حضور اعضای محترم جلسه دفاع و نماینده تحصیلات تکمیلی به شرح ذیل تشکیل گردید:

سمت	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
استاد راهنمای اول	**دکتر محمد قاسم اکبری**	**استادیار**	
استاد مشاور اول	**دکتر مجید رضایی**	**استادیار**	
داور اول	**دکتر غلامرضا محتشمی برزادران**	**دانشیار**	
داور دوم	**دکتر محسن عارفی**	**استادیار**	
نماینده تحصیلات تکمیلی	**دکتر یدالله واقعی**	**استادیار**	

نتیجه ارزیابی دفاع که منوط به ارائه اصلاحات پیشنهادی توسط هیئت داوران حداکثر ظرف مدت یکماه پس از تاریخ دفاع می باشد، به شرح زیر مورد تایید قرار گرفت:

☑ قبول (با درجه: عالی و امتیاز: ۱۹,۵۱) ☐ دفاع مجدد ☐ غیر قابل قبول

۱- عالی (۲۰- ۱۹) ۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹- ۱۸) ۳- خوب (۱۷/۹۹- ۱۶) ۴- قابل قبول (۱۵/۹۹- ۱۴)

(بدیهی است عواقب آموزشی ناشی از عدم ارائه به موقع اصلاحات مزبور به عهده دانشجو می باشد)

بسم الله الرحمن الرحيم

کلیه مزایا اعم از چاپ و تکثیر، نسخه برداری، ترجمه، اقتباس و ... از پایان نامه کارشناسی ارشد برای دانشگاه بیرجند محفوظ می‌باشد. نقل مطالب با ذکر منبع بلامانع است.

تقدیم به

ساحت آقا علی ابن موسی الرضا

پدر و مادر مهربان و بزرگوار و برادر و خواهرانم که پرورش یافتگان آن دو درّ صدف هستی اند

آنانکه اهل علم اند و بدون پژوهش تصمیم گیری نمی کنند

تمام دوستانی که مرا در تهیه این پایان نامه یاری نمودند.

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس به درگاه ایزد منّان، که از عنایتش پدری عزیز و مادری مهربان به من ارزانی فرمود که شکر ایشان به زبان برنیاید، پروردگاری که از رحمت خویش و برکت وجودی این دو عزیز نعمت علم آموزی و توفیق بهره مندی از محضر اساتید گرانقدر دانشگاه بیرجند را به من عطا نمود.

برگردن است از زحمات استاد گرامی و بزرگوار

جناب آقای **دکتر محمد قاسم اکبری**، که با راهنماییهای سودمند و صبر بی پایان خویش در انجام این پایان نامه مرا یاری نموده اند تشکر و قدردانی کنم. از درگاه گره گشای عالم توفیقات روزافزون برای ایشان آرزو می‌نمایم. همچنین از جناب آقای **دکتر مجید رضایی** استاد مشاور خودم کمال تشکر را دارم.

از اساتید محترم دکتر غلامرضا محتشمی برزادران و دکتر عارفی که داوری این پایان نامه را برعهده داشتند و دکتر واقعی نماینده تحصیلات تکمیلی سپاسگزارم.

شایسته است فرصت غنیمت شمرده و از تمامی مسئولین و کارکنان محترم دانشگاه بیرجند همچنین دوستان گرامی و هم کلاسی های عزیزم که مرا با راهنمایی ها و رهنمود های خود مورد لطف قرار دادند، کمال تشکر را داشته باشم.

علیرضا سعیدی

تابستان ۱۳۹۰

چکیده

در یک دنباله از مشاهدات، رکوردها مقادیری هستند که از مشاهدات ماقبل خود بزرگتر (کوچکتر) می‌باشند. همچنین شماره سریالی که در آن رکورد رخ می‌دهد را زمان رخداد رکورد می‌نامیم. استنباط آماری در حالت کلاسیک بر پایه داده‌ها، متغیرهای تصادفی، پارامترها، برآورد نقطه‌ای و آزمون فرضیه‌های آماری به صورت دقیق است. مواردی وجود دارند که مفاهیم ذکر شده در بالا به صورت دقیق قابل بیان نیستند. از طرف دیگر نظریه مجموعه های فازی یک راهکار مناسب برای تجزیه و تحلیل این مفاهیم است.

در این مطالعه، ابتدا براساس داده‌های رکوردی- زمانی، استنباط آماری برای توزیع پارتوی دو پارامتری مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد و سپس به یافتن برآوردگرهای بیز فازی برای پارامتر فازی براساس مقادیر رکوردی خواهیم پرداخت. در آخر یک تابع چگالی(جرم) احتمال جدید با پارامتر فازی معرفی نموده، همچنین لم نیمن- پیرسن جدید را برای حالتی که فرضیه‌های مورد آزمون فازی هستند را بیان نموده و به مقایسه خطاهای روش جدید و روش طاهری و بهبودیان (۱۹۹۹) با مقدار خطای دقیق خواهیم پرداخت.

واژه‌های کلیدی: *آزمون فرضیه فازی، برآوردگر بیز فازی، توزیع پارتو، رکوردها، لم نیمن- پیرسن*

پیشگفتار

در این پایان نامه به بررسی برآوردگرهای کلاسیک و بیزی و آزمون فرضیه‌های مربوط به پارامترهای توزیع پارتو پرداخته شده است. همچنین برآوردگرهای بیز و آزمون فرضیه‌های فوق در محیط فازی مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور این رساله شامل ۵ فصل می‌باشد که در زیر خلاصه‌ای از مطالب هر فصل آمده است:

در فصل ۱، کاربرد رکوردها، توزیع‌های احتمالی آماره‌های رکوردی بدون (با) در نظر گرفتن زمان رخداد رکوردها و همچنین برخی مفاهیم بیزی شرح داده شده است.

در فصل ۲، اعداد فازی، متغیر تصادفی فازی، امید ریاضی متغیر تصادفی فازی و اندازه L_2 را بر مبنای اعداد فازی بیان نمودیم.

در فصل ۳، توزیع پارتو را معرفی نموده و استنباط آماری را براساس رکوردهای پایین و زمان رخداد آن‌ها را به روش‌های مختلف مورد بررسی قرار داده‌ایم. همچنین برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم و برآوردگر بیز برای پارامترهای این توزیع را بررسی خواهیم کرد و سپس در مورد برآوردگرهای فاصله‌ای این توزیع بحث خواهیم نمود.

در فصل ۴، برآوردگرهای بیز در محیط فازی برای پارامترهای این توزیع مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل ۵، به بررسی آزمون فرضیه‌های فازی خواهیم پرداخت برای این منظور ابتدا به معرفی یک تابع چگالی (جرم) احتمال جدید با پارامترهای فازی پرداخته و سپس لم نیمن- پیرسن تعمیم یافته جدید را برای حالتی که فرضیه‌های مورد آزمون فازی هستند را مورد بررسی قرار داده و به مقایسه خطاهای روش جدید و روش طاهری و بهبودیان (۱۹۹۹) با مقدار خطای دقیق خواهیم پرداخت.

مطالب ارائه شده در فصول ۴ و ۵ جدید می‌باشند.

فهرست جداول

جدول ۱.۳ داده‌های دستمزد سالیانه (برحسب ۱۰۰ دلار آمریکا) ۶۴

جدول ۲.۳ داده‌های روردی بدست آمده از جدول داده‌های دستمزد سالیانه ۶۴

جدول ۱.۵ *مقدار احتمال ارتکاب خطای نوع اول و دوم برای برخی* مقادیر k در مثال ۱.۴.۵ . . . . . ۹۸

جدول ۲.۵ *مقدار احتمال ارتکاب خطای نوع اول و دوم برای برخی* مقادیر k در مثال ۲.۴.۵ . . . . . ۱۰۰

جدول ۳.۵ *مقادیر احتمال ارتکاب خطای نوع اول و دوم برای برخی* مقادیر k در مثال ۳.۴.۵ . . . . . ۱۰۲

جدول ۴.۵ *مقادیر احتمال خطای نوع اول و دوم برای برخی* مقادیر k در مثال ۴.۴.۵ . . . . . ۱۰۳

جدول ۵.۵ جدول مربوط به مقادیر خطای نوع اول و دوم در مثال ۶.۴.۵ برای پارامتر γ ۱۰۸

جدول ۶.۵ جدول مربوط به مقادیر خطای نوع اول در مثال ۶.۴.۵ برای پارامتر δ ۱۱۰

جدول ۷.۵ جدول مربوط به مقادیر خطای نوع دوم در مثال ۶.۴.۵ برای پارامتر δ ۱۱۰

فهرست نمودارها

شکل ۱.۲ نمودار توابع عضویت مجموعه های فازی محدب تعریف ۴.۲.۲ . . . . . ۱۵

شکل ۲.۳ نمودار توابع عضویت مجموعه های فازی غیرمحدب مثال ۲.۲.۲ . . . . . ۶۴

شکل ۳.۲ نمودار توابع عضویت توابع نیم پیوسته بالایی و پایینی تعریف ۵.۲.۲ . . . . . ۹۸

شکل ۴.۲ نمودار توابع عضویت عدد فازی غیر بسته مثال ۳.۲.۲ . . . . . ۱۷

شکل ۵.۲ نمودار توابع عضویت امید ریاضی فازی مثال ۲.۴.۲ . . . . . ۲۶

شکل ۱.۵ نمودار مربوط به فرضیه ساده فازی ۸۱

شکل ۲.۵ نمودار مربوط به فرضیه دو طرفه فازی ۸۲

شکل ۳.۵ نمودار مربوط به فرضیه یک طرفه از راست فازی ۸۲

شکل ۴.۵ نمودار مربوط به فرضیه یک طرفه از چپ فازی ۸۲

شکل ۵.۵ نمودار توابع عضویت فرضیه های H_0 و H_1 مثال ۱.۴.۵ . . . . . ۹۴

شکل ۶.۵ نمودار توابع عضویت فرضیه های H_0 و H_1 مثال ۲.۴.۵ . . . . . ۹۹

شکل ۷.۵ نمودار توابع عضویت فرضیه های H_0 و H_1 مثال ۳.۴.۵ . . . . . ۱۰۱

شکل ۸.۵ نمودار توابع عضویت فرضیه های H_0 و H_1 مثال ۶.۴.۵ . . . . . ۱۰۵

شکل ۹.۵ نمودار توابع عضویت فرضیه های H_0 و H_1 مثال ۶.۴.۵ . . . . . ۱۱۰

شکل ۱۰.۵ نمودار تابع عضویت زنگوله ای ۱۱۱

فهرست مطالب

۱ کلیات و مفاهیم اولیه رکوردها **۱**

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ تاریخچه و کاربرد رکوردها ۲

۱.۲.۱ تاریخچه رکوردها ۲

۲.۲.۱ کاربرد رکوردها ۲

۳.۱ تعاریف و لم ها ۴

۱.۳.۱ تعاریف و نمادها ۴

۴.۱ توزیع‌های احتمالی آماره‌های رکوردی ۸

۱.۴.۱ توابع چگالی احتمال بدون در نظر گرفتن زمان رخداد بین رکوردها . . . ۸

۲.۴.۱ توابع چگالی احتمال با در نظر گرفتن زمان رخداد بین رکوردها ۹

۲ مفاهیم فازی **۱۲**

۱.۲ مقدمه ۱۲

۲.۲ مجموعه‌های فازی ۱۳

۱.۲.۲ تعاریف و نمادها ۱۴

۳.۲ متغیر تصادفی فازی ۱۸

۴.۲ امید ریاضی متغیرهای تصادفی فازی ۲۱

۵.۲ اندازه $L_۲$ ۲۷

۳ استنباط آماری بر اساس رکوردها ۳۱

۱.۳ مقدمه ۳۱

۲.۳ برآوردگر درستنمایی ماکسیمم ۳۳

۳.۳ مفاهیم و اصطلاحات بیزی ۳۸

۴.۳ استنباط بیزی ۴۱

۱.۴.۳ α مجهول و β معلوم ۴۲

۲.۴.۳ α معلوم و β مجهول ۴۴

۳.۴.۳ α و β هر دو مجهول ۴۷

۵.۳ نواحی و فواصل اعتبار ۶۱

۱.۵.۳ فاصله اطمینان برای α ۶۲

۲.۵.۳ فاصله اطمینان برای β ۶۳

۶.۳ نتیجه گیری ۶۶

۴ برآوردگرهای بیز فازی ۶۷

۱.۴ مقدمه ۶۷

۲.۴ برآوردگرهای بیز فازی بر مبنای متر $L_۲$ ۶۹

۳.۴ مثال های عددی ۷۱

۵ آزمون فرضیه‌های فازی براساس لم نیمن- پیرسن تعمیم یافته ۷۹

۱.۵ مقدمه ۷۹

۲.۵ مقدمات ۸۰

۱.۲.۵ فرضیه‌های فازی ۸۰

۲.۲.۵ تاریخچه آزمون فرضیه‌های فازی ۸۲

۳.۲.۵ آزمون فرضیه‌های فازی ۸۴
۴.۲.۵ تابع چگالی (جرم) احتمال ۸۴
۳.۵ لم نیمن- پیرسن برای آزمون فرضیه‌های فازی ۸۶
۴.۵ مثال‌های عددی ۹۳
۵.۵ نتیجه گیری ۱۱۱

فصل ۱

کلیات و مفاهیم اولیه رکوردها

۱.۱ مقدمه

در مسأله استنباط، هدف برآورد نقطه‌ای، فاصله‌ای و یا مسائل مربوط به پیش‌بینی می‌باشند که با فرض معلوم بودن توزیع جامعه در حالت کلاسیک، بیزی و ... مورد بحث قرار می‌گیرند. آنچه در این زمینه دارای اهمیت است، آگاهی کامل از توزیع‌های احتمالی در رابطه با موضوع مورد بحث می‌باشد.
در این فصل به معرفی رکوردها[۱] ، رکوردها به همراه زمان و توزیع‌های احتمالی آن می‌پردازیم .

[۱] Records

۲.۱ تاریخچه و کاربرد رکوردها

۱.۲.۱ تاریخچه رکوردها

نظریه رکوردها شاخه نسبتاً جدیدی از آمار بوده و در چند دهه اخیر رشد زیادی کرده است. شاید بتوان گفت چندلر[۲] [۱۹] ، به طور برجسته‌ای مطالعه مقادیر رکورد را شروع کرد و رزنیک[۳] [۴۴] و شروک[۴] [۵۰]، نظریه مجانبی رکوردها را مورد بررسی قرار داده‌اند. گلیک[۵] [۲۸] با استفاده از عنوان شکستن رکوردها و شکستن مرزها تحقیقات بیست و چند ساله اول را جمع‌آوری کرد. در سال های اخیر استنباط آماری براساس رکوردها در حالت پارامتری و ناپارامتری نیز مورد توجه محققین زیادی قرار گرفته است. از آن جمله می‌توان به سامانیگو[۶] و ویتاکر[۷] [۴۶] و [۴۷]، کارلین[۸] و گلفند[۹] [۱۸]، گالتی[۱۰] و پادجت[۱۱] [۳۰] و [۳۱] و فیورورگر[۱۲] و هال[۱۳] [۲۴]، احمدی و ارقامی [۴، ۵، ۶]، احمدی و بالاکریشنان[۱۴] [۷]، احمدی و دوست پرست [۸] اشاره نمود.

۲.۲.۱ کاربرد رکوردها

انسان از سال‌ها دور با مفاهیم آماری و احتمالی مأنوس بوده است. احتمال باریدن برف یا باران، احتمال رو آمدن یک یا چند سکه در یک یا چند بار پرتاب آن، احتمال برنده شدن در یک شرط

[۲] Chandler
[۳] Resnick
[۴] Shorroch
[۵] Glick
[۶] Samaniego
[۷] Withaker
[۸] Carlin
[۹] Gelfand
[۱۰] Gulati
[۱۱] Padgett
[۱۲] Feuerverger
[۱۳] Hall
[۱۴] Balakrishnan

بندی و مانند آن، مثال‌هایی از مفاهیم احتمالی هستند که از دیرباز مورد توجه انسان بوده‌اند. رکوردها نیز از موضوعاتی هستند که اخیراً مورد مطالعه تحقیقات آماری در اکثر علوم و فنون قرار گرفته‌اند. سؤالاتی از قبیل اینکه قیمت بورس بازار تهران چه مقدار بالاتر از قیمت امروز خواهد رفت؟ آیا می‌توان بزرگی زلزله‌ای مخرب‌تر از زلزله بم در سال ۱۳۸۲ را به مقیاس ریشتر پیش‌بینی کرد؟ سیلی مهیب‌تر از سونامی اخیر چه قدرتی دارد؟ همگی سؤالاتی هستند که ذهن هر انسانی را به سمت خود مشغول خواهند کرد. برای پاسخ به این سؤالات و بررسی جزئیات آنها، بدون شک نیازمند علمی هستیم که بتواند ساختار تئوری این پدیده را مورد مطالعه قرار دهد و این موضوع با استفاده از علم آمار و شاخه نظریه توزیع‌ها و گرایش رکوردها قابل بررسی است. به عنوان نمونه‌هایی از کاربرد رکوردها می‌توان به موارد زیر اشاره نمود[۱]:

۱ - سیل‌های مصیبت آفرین و زمین لرزه‌های ویرانگر جزو مواردی هستند که نقش مطالعه رکوردهای بالا را به وضوح برجسته می‌سازند. دانستن زمان وقوع سیلی مخرب‌تر از آخرین سیل ویرانگر و یا دانستن شدت و زمان رخداد زلزله‌ای مهیب‌تر از آخرین زمین لرزه مصیبت آفرین، اطلاعاتی است که چه به لحاظ امنیتی و چه به لحاظ ساخت و ساز سدها، ساختمان‌ها و برج‌ها حائز اهمیت می‌باشند که البته همگی این موارد در قالب مطالعه آماره‌های رکوردی، مورد توجه قرار می‌گیرند.

۲ - غالباً عموم مردم پی‌گیر داده‌های رکوردی هستند. سؤال‌هایی نظیر:

- بالاترین و پایین‌ترین دما در ماه گذشته
- بالاترین و پایین‌ترین آلودگی
- بیشترین آمار تصادفات در ایام نوروزی
- مخرب‌ترین زلزله‌ای که تا به حال رخ داده است
- بالاترین نرخ تورم
- بالاترین درصد شرکت کنندگان در انتخابات
- بیشترین و کمترین تغییرات در قیمت سهام
- کمترین میزان ضرر احتمالی در معاملات بورس

- کمترین میزان بارندگی فصلی
- کمترین زیان متحمل از انتخاب‌های نادرست

برای بررسی و پیش‌بینی مواردی مانند فوق، نیاز به استفاده از داده‌های رکوردی و به کار بردن روش-ها و فنون آماری داریم. از دیگر کاربردهای رکوردها می‌توان به کاربرد آنها در رویدادهای ورزشی، بیماری‌های همه‌گیر[۱۵] ، پزشکی شواهدی[۱۶] ، تحلیل‌های هواشناسی، آب‌شناسی، زلزله‌شناسی، بحث-های مربوط به نفت و استخراج معادن، اقتصاد، مطالعات مربوط به فرآیندهای پواسن، قابلیت اطمینان و کنترل کیفیت اشاره نمود. در آزمون طول عمر ممکن است به برآورد هزینه احتمالی گارانتی علاقمند باشیم. به‌علاوه در مسائل کنترل کیفیت، مقدار مینیمم مشاهده شده و زمان انجام آزمایش می‌تواند در بهینه سازی فرآیند تولید و تعیین حدود تحمل[۱۷] یک چندک جامعه مهم باشد.

۳.۱ تعاریف و لم ها

در این بخش به معرفی برخی مفاهیم برای فهم بهتر مطالب این فصل می‌پردازیم.

۱.۳.۱ تعاریف و نمادها

فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع[۱۸] (iid) از جامعه‌ای پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(.)$ (pdf) و تابع توزیع $F(.)$ (cdf) باشند. در این صورت دنباله مقادیر رکوردها و زمان رخداد رکوردها و زمان بین آنها بصورت زیر تعریف می‌شوند:

تعریف ۱.۳.۱. مشاهده X_k را یک رکورد بالا (پایین) گوییم، هرگاه از تمام مشاهدات ماقبل خود بزرگتر (کوچکتر) باشد، در این صورت برای رکورد بالا رابطه

[۱۵] Epidemiology
[۱۶] Evidence Medicine
[۱۷] Tolerance Limits
[۱۸] Independent Identically Distributed

$$X_k > \max\{X_۱, X_۲, , X_{k-۱}\} \qquad k = ۲, ...$$

و برای رکورد پایین

$$X_k < \min\{X_۱, X_۲, , X_{k-۱}\} \qquad k = ۲, ...$$

برقرار هستند.

حال k امین رکورد پایین و بالا را به ترتیب با L_k و U_k نمایش می‌دهیم. بنابراین $L_۱ = U_۱ = X_۱$، یعنی همواره اولین مشاهده از داده های طبیعی به عنوان اولین رکورد پایین یا بالا ثبت می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱. زمانی که در آن رکورد پایین رخ می‌دهد یک متغیر تصادفی می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_۱ = ۱, L_k = \min_j\{j > L_{k-۱}, X_j < X_{L_{k-۱}}\},$$

که L_k زمان رخ دادن k امین رکورد پایین می‌باشد.

به طور مشابه برای رکورد بالا داریم

$$U_۱ = ۱, U_k = \min_j\{j > U_{k-۱}, X_j > X_{U_{k-۱}}\}.$$

که U_k زمان رخ دادن k امین رکورد بالا می‌باشد.

تعریف ۳.۳.۱. تعداد آزمایش های لازم پس از وقوع L_i (U_i) را برای بدست آوردن یک رکورد جدید زمان رخداد بین رکوردها می‌نامیم و با K_i نمایش می‌دهیم.

لذا برای رکوردهای پایین می‌توان نوشت:

$$K_i = \min_j\{j - i | L_j > L_i, j > i\}.$$

در این حالت رکوردها و زمان رخداد آنها، با در نظر گرفتن r رکورد اول به صورت زیر ثبت می شوند:

$$L_۱, K_۱, L_۲, K_۲, , L_r, K_r$$

و برای رکوردهای بالا داریم:

$$K_i = \min_j\{j - i | U_j > U_i, j > i\}.$$

و به طور مشابه رکوردها و زمان‌های رخداد آنها بصورت زیر ثبت می‌شوند:

$$U_۱, K_۱, U_۲, K_۲, , U_r, K_r$$

نمونه‌گیری براساس متغیرهای تصادفی برای رسیدن به رکوردهای مطلوب معمولاً به دو صورت انجام می‌گیرد:

۱ نمونه گیری معکوس[۱۹]

در این روش، دنباله مشاهدات به طور متوالی آزمایش می‌شوند تا r امین رکورد بدست آید. بدیهی است که در این روش تعداد رکوردها ثابت r، اما حجم نمونه یک متغیر تصادفی است. دراین روش نمونه گیری برای سادگی در محاسبات K_r را برابر ۱ قرار می دهیم.

۲ نمونه‌گیری تصادفی[۲۰]

در این روش، حجم نمونه یک متغیر مقدار ثابت nاست و نمونه‌گیری تا پایان آزمایش nام ادامه می یابد که از بین آنها فقط مقادیر رکوردها ثبت می‌شوند. واضح است که در این حالت تعداد رکوردها یک متغیر تصادفی است. در این روش $K_r = n - \sum_{i=۱}^{r-۱} K_i$ می‌باشد.

[۱۹] Inverse Sampling
[۲۰] Random sampling