دانشکده فنی مهندسی

گروه مهندسی مکانیک

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی

عنوان:

تحلیل ارتعاشات اجباری استوانه FGM به روش بدون المان

استاد راهنما:

دکتر مهرداد فروتن

نگارش:

رسول مرادی دستجردی

شهریور ۱۳۸۹

چکیده: مواد هدفمند، مواد جدید و نوظهوری هستند، که اکثرا از ترکیب دو ماده مختلف که یکی فلز و دیگری سرامیک است ساخته می‌شوند، به طوری که خواص ترکیب حاصل به طور یکنواخت تغییر می‌کند. در نتیجه در این مواد جزء حجمی مواد تشکیل دهنده، به صورت تابعی یکنواخت تغییر کرده و باعث ایجاد میکروساختار غیر یکنواخت و یک ماکروساختار با تغییرات پیوسته می‌شود.

روش‌های بدون المان با توجه به مزایایی که نسبت به روش‌های المان محور دارند در سال‌های اخیر جایگاه ویژه‌ای در حوزه‌ی مسائل مکانیک جامدات پیدا کرده‌اند. در این پایان‌نامه، در کاری جدید، تحلیل دینامیکی استوانه‌هایی از جنس مواد هدفمند (در حالت تقارن محوری)، که خواص مکانیکی آن در راستای شعاع طبق مدل‌های مختلفی تغییر می‌کند، به روش بدون المان بررسی شده است. نتایج بدست آمده از این کار با کارهای قبلی مقایسه و مطابقت بسیار خوبی نیز حاصل شده است. از آنجایی که روش‌های بدون المانی که بر پایه فرم ضعیف می‌باشند، نسبت به روش‌هایی که فاقد انتگرال‌گیری هستند مانند روش کالوکیشن، از پایداری و دقت بهتری برخوردار می‌باشند، لذا از روش بدون المانی استفاده شده که مبتنی بر فرم ضعیف معادله حرکت می‌باشد. برای انتگرال‌گیری، از شبکه پس-زمینه و روش انتگرال‌گیری عددی گوس استفاده شده است. روش بدون المان مورد استفاده بر پایه توابع شکل MLS می‌باشد، از طرفی چون توابع شکل MLS خاصیت دلتای کرونیکر را ارضاء نمی‌کنند، برای اعمال شرایط مرزی اساسی از روش تبدیل استفاده شده است. با توجه به الگوریتم حل این مسائل به روش بدون المان در نرم‌افزار MATLAB کدی توسعه یافته که بوسیله آن تحلیل دینامیکی استوانه FGM، انجام شده است. در این تحلیل تاثیر ابعاد هندسی استوانه، نوع تکیه‌گاه‌ها و از همه مهم‌تر نحوه تغییرات خواص مکانیکی ماده بر فرکانس‌های طبیعی، ارتعاشات اجباری و همچنین بر انتشار موج تنش بررسی شده است. با توجه به اینکه روشهای عددی قابلیت انعطاف زیادی روی حل این نوع مسائل دارند، این تحقیق و نتایج آن برای طراحی مخازن و یا لوله‌های تحت فشار از جنس مواد هدفمند بسیار مناسب می‌باشد.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: مقدمه ۱
۱-۱- مقدمه‌ای بر ارتعاشات ۲
۱-۱- ۱-مبدأ ارتعاشات ۲
۱-۱-۲- اهمیت مطالعه ارتعاشات ۳
۱-۱-۳- دسته بندی ارتعاشات ۳
۱-۱-۴- اندازه‌گیری و کاربردهای ارتعاشات ۴
۱-۱-۵- کنترل فرکانس‌های طبیعی ۴
۱-۲- مقدمه‌ای بر مواد هدفمند ۵
۱-۳- مقدمه‌ای بر روش بدون المان ۶
۱-۳-۱- محدودیت‌های روش المان محدود ۸
۱-۳-۲- روند تحلیل مسائل به روش‌های بدون المان ۹
۱-۳-۳- مزایای بی نیازی روش‌های بدون المان به شبکه‌بندی ۱۱
۱-۳-۴- پیوستگی توابع شکل بدون المان ۱۲
۱-۳-۵- مقایسه روش اجزاء محدود و روش‌های بدون المان از دیدگاه محاسباتی ۱۳
۱-۳-۶- اعمال شرایط مرزی اساسی ۱۴
۱-۴- مروری بر کارهای گذشته ۱۵
فصل دوم: مواد هدفمند ۱۹
۲-۱- مقدمه ۲۰
۲-۲- مواد هدفمند ۲۰
۲-۲-۱- ماهیت مواد هدفمند ۲۰
۲-۲-۲- مبدأ پیدایش مواد هدفمند ۲۱
۲-۲-۳- انواع مواد هدفمند ۲۱
۲-۳- روشهای تولید مواد هدفمند ۲۲
۲-۳-۱- متالورژی پودر ۲۲
۲-۳-۲- روش پلاسما اسپری و درجه حرارت بالا ۲۳
۲-۳-۳- روشهای الکتروفیزیکی ۲۴
۲-۳-۴- نشت بخار مواد، توسط روشهای شیمیایی و فیزیکی ۲۴
۲-۳-۵- روش سانتریفیوژی (تفکیک گریز از مرکز) ۲۵
۲-۴- کاربردهای مواد هدفمند ۲۶
۲-۵- مدل‌های ریاضی به منظور بیان خواص مکانیکی ماده هدفمند ۲۷
۲-۵-۱- مدل اول- استفاده از تابع نمایی ۲۸
۲-۵-۲- مدل دوم- استفاده از تابع توانی ۲۸

عنوان **صفحه**

۲-۵-۳- مدل سوم - پروفیل تابع توانی ساده ۲۸
۲-۵-۴- مدل چهارم- استفاده از رابطه غیر خطی ۲۸
۲-۵-۵- مدل پنجم- استفاده از رابطه غیر خطی متاثر از دمای مواد ۲۹
۲-۵-۶- مدل ششم- استفاده از رابطه غیر خطی (با رابطه‌ای دیگر برای کسر حجمی) ۲۹
فصل سوم: روش بدون المان ۳۱
۳-۱- مقدمه ۳۲
۳-۲- معرفی روش‌های بدون المان ۳۳
۳-۳- دسته بندی روش‌های بدون المان ۳۴
۳-۳-۱- دسته‌بندی بر اساس فرمول‌بندی فرآیند ۳۵
۳-۳-۲- دسته‌بندی بر اساس شماتیک تابع تقریب ۳۷
۳-۳-۳- دسته‌بندی بر اساس دامنه حل مسئله ۳۸
۳-۴- توابع شکل ۴۰
۳-۴-۱- توابع شکل اجزاء محدود ۴۱
۳-۴-۲- توابع شکل حداقل مربعات متحرک (MLS) ۴۲
۳-۴-۲-۱- ساختِ توابع شکل MLS به روش حداقل سازی مربعات خطای تقریب محلی ۴۴
۳-۴-۲-۲- مشتقات توابع شکل MLS ۴۸
۳-۴-۲-۳- خواص توابع شکل MLS ۴۹
۳-۴-۲-۴- ارزیابی تحلیلی توابع شکل MLS دوبعدی $\mathbf{X}=[x,y]$ و مشتقات آنها نظیر $n=1$ ۵۱
۳-۴-۳- انتخاب توابع وزن ۵۲
۳-۴-۳-۱- اندازه حوزه اثر تابع وزن ۵۳
۳-۴-۳-۲- فرم‌های ریاضی تابع وزن ۵۴
۳-۴-۴- وارون‌پذیری ماتریس ممان ۵۵
۳-۵- انتگرال‌گیری در روش‌های بدون المان فرم ضعیف ۵۶
۳-۵-۱- قواعد انتگرال‌گیری عددی ۵۶
۳-۵-۲- دقت انتگرال‌گیری ۵۷
۳-۶- ترکیب و یا سوار کردن معادله‌ها ۵۷
۳-۷- اعمال شرایط مرزی اساسی ۵۹
۳-۷-۱- روش تبدیل ۵۹
۳-۷-۱-۱- اعمال شرایط مرزی اساسی به روش اجزاء محدود ۶۱
۳-۸- حل دستگاه معادله‌های نهایی ۶۲
۳-۹- جمع بندی ۶۳
فصل چهارم: فرمول‌بندی مسئله ۶۴
۴-۱- مقدمه ۶۵
۴-۲- بیان مسئله ۶۵

عنوان **صفحه**

۴-۲-۱- روابط حاکم بر مسئله متقارن محوری ۶۶
۴-۲-۲- فرمول‌بندی بدون المان ۶۷
۴-۲-۳- روابط لازم برای حل مسئله دینامیکی ۷۰
۴-۳- الگوریتم حل مسئله ۷۲
۴-۳-۱- مرحله پیش پردازش ۷۲
۴-۳-۱-۱- تعیین ورودی‌های مسئله ۷۳
۴-۳-۱-۲- ایجاد آرایش گره‌ای ۷۳
۴-۳-۱-۳- وارد کردن نقاط انتگرالی در حوزه حل مسئله ۷۳
۴-۳-۱-۴- وارد کردن نحوه تغییرات خواص مواد ۷۵
۴-۳-۲- مرحله حل ۷۵
۴-۳-۲-۱- محاسبه ماتریس‌های جرم و سختی ۷۷
۴-۳-۲-۲- محاسبه بردار نیرو ۷۷
۴-۳-۲-۳- اعمال شرایط مرزی اساسی ۷۷
۴-۳-۲-۴- محاسبه فرکانس‌های طبیعی سیستم ۷۸
۴-۳-۲-۵- محاسبه میدان جابجایی در هر زمان ۷۸
۴-۳-۳- مرحله پس پردازش ۷۸
۴-۴- جمع بندی ۷۹
فصل پنجم: مثال‌های حل شده و نتایج حل ۸۰
۵-۱- مقدمه ۸۱
۵-۲- بررسی ارتعاشات آزاد ۸۱
۵-۲-۱- بررسی ارتعاشات آزاد استوانه‌های همگن ۸۱
۵-۲-۲- بررسی ارتعاشات آزاد استوانه‌های FGM ۸۴
۵-۳- بررسی انتشار موج تحت بار ضربه‌ای در استوانه‌هایی FGM ۸۸
۵-۳-۱- بررسی انتشار موج تحت بار ضربه‌ای در استوانه‌هایی FGM با طول بلند ۸۸
۵-۳-۲- بررسی انتشار موج تحت بار ضربه‌ای در استوانه‌هایی FGM با طول کوتاه ۹۳
۵-۴- بررسی ارتعاشات اجباری در استوانه‌هایی FGM ۱۰۰
۵-۴-۱- تحلیل ارتعاشات اجباری در استوانه‌های FGM با طول بلند ۱۰۰
۵-۴-۲- تحلیل ارتعاشات اجباری در استوانه‌های FGM با طول کوتاه ۱۰۶
۵-۵- نتیجه گیری ۱۰۹
۵-۶- پیشنهادهایی برای ادامه کار حاضر ۱۱۰
مراجع ۱۱۱
چکیده انگلیسی

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

شکل(۱-۱)- مقایسه روند تحلیل مسائل به روش اجزاء محدود و روشهای بدون المان ۱۰
شکل(۱-۲)- جداسازی حوزه مسئله و مرزهای آن ۱۰
شکل(۱-۳)- اتصال گره‌ها به یکدیگر ۱۱
شکل(۱-۴)- شبکه‌بندی سیلندر موتور اتومبیل به کمک نرم افزارهای اجزاء محدود ۱۱
شکل(۱-۵)- تغییر شکل زیاد المان‌ها در تحلیل فرآیند کشش عمیق جام به روش اجزاء محدود ۱۲
شکل(۱-۶)- تابع شکل مطلق (جهانی) دو بعدی ۱۳
شکل(۱-۷)- محاسبه تقریب در نقطه ۱۴
شکل(۲-۱)- نحوه تغییر ریزساختار در مواد هدفمند ۲۲
شکل(۲-۲)- شماتیک تولید FGM به روش متالوژی پودر ۲۳
شکل(۲-۳)- شماتیک تولید FGM به روش اسپری پلاسما ۲۴
شکل(۲-۴)- شماتیک روش نشت بخار مواد، توسط روش های شیمیایی و فیزیکی ۲۵
شکل(۲-۵)- شماتیک تولید FGM به روش گریز از مرکز ۲۵
شکل(۲-۶)- نمودار کسر حجمی مواد بکار رفته در استوانه به ازای nهای مختلف ۲۹
شکل(۲-۷)- به عنوان مثال نحوه تغییرات کسر حجمی ماده بکار رفته در شعاع داخلی ۳۰
شکل(۳-۱)- تابع شکل مطلق (جهانی) گره i ام نظیر المانهای مثلث خطی در روش اجزاء محدود ۴۲
شکل(۳-۲)- تقریب حداقل مربعات استاندارد نظیر بردار پایه خطی ۴۳
شکل(۳-۳)- تقریب حداقل مربعات متحرک نظیر بردار پایه خطی و توابع وزن ثابتِ محدود و هموار ۴۴
شکل(۳-۴)- تقریب محلی تابع یک بعدی $u(x)$ حول نقطه دلخواه و ثابت $\bar{x}$ ۴۵
شکل(۳-۵)- خطای تقریب محلی یک بعدی $L_{\bar{x}}u(x)$ و وزن آن $w(\bar{x}-x_i)$ درگره i ام ۴۶
شکل(۳-۶)- حرکت نقطه به نقطه تابع وزن w و ساخت تقریب MLS ۴۷
شکل(۳-۷)- توابع شکل MLS و مشتقات آنها نظیر بردار پایه خطی و $d_{\max}=3$ ۵۰
شکل(۳-۸)- تابع شکل MLS و مشتقات اول و دومش به ازای $n=1, d=2$ ۵۲
شکل(۳-۹)- شکلهای مستطیلی ودایره ای حوزه اثر و فرم ضرب تانسوری(مستطیلی) تابع وزن ۵۳
شکل(۳-۱۰)- الگوریتم تشکیل ماتریس سختی کل به روش اجزاء محدود ۵۸
شکل(۳-۱۱)- الگوریتم تشکیل ماتریس سختی کل به روش‌های بدون المان ۵۸
شکل(۳-۱۲)- مقادیر گره ای مجازی u_j و حقیقی $\hat{u}_i$ در تقریب های بدون المان ۶۰
شکل(۳-۱۳)- توابع شکل نظیر بردار پایه خطی و $d_{\max}=2$ ۶۱
شکل(۴-۱)- نمایی از یک مسئله متقارن محوری و حوزه حل آن ۶۵
شکل(۴-۲)- نمایی از یک استوانه توخالی تحت فشار داخلی (حالت متقارن محوری) ۶۵
شکل(۴-۳)- فلوچارت مرحله پیش‌پردازش برنامه ۷۲
شکل(۴-۴)- نقاط گوس مرتبه ۴ داخل سلول مربعی در دستگاه مختصات طبیعی ۷۴
شکل(۴-۵)- فلوچارت مرحله حل برنامه ۷۶

عنوان **صفحه**

شکل(۵-۱)- نحوه تغییرات خواص مکانیکی ماده برحسب شعاع استوانه، طبق رابطه (۲-۳) ۸۷
شکل(۵-۲)- تاریخچه زمانی تنش محیطی در شعاع میانی استوانه بلند ($r = 0.375$ m) از روش‌های بدون المان و المان محدود و مقایسه با مرجع [۳۴] ۸۸
شکل(۵-۳)- تغییرات فشار داخلی با زمان طبق رابطه (۵-۱) ۸۹
شکل(۵-۴)- تغییرات فشار داخلی با زمان طبق رابطه (۵-۲) ۸۹
شکل(۵-۵)- ارتعاشات شعاعی نقطه‌ای با شعاع $r = 0.375$ m (شعاع میانی) در استوانه بلند برای nهای مختلف ۹۰
شکل(۵-۶)- تاریخچه زمانی تنش شعاعی استوانه بلند در شعاع $r = 0.375$ m (شعاع میانی) برای nهای مختلف ۹۱
شکل(۵-۷)- تاریخچه زمانی تنش محیطی استوانه بلند در شعاع $r = 0.375$ m (شعاع میانی) برای nهای مختلف ۹۱
شکل(۵-۸)- تغییرات تنش محیطی استوانه بلند در جهت ضخامت در زمان$t=0.3$ (ms) ۹۲
شکل(۵-۹)- تغییرات تنش شعاعی استوانه بلند در جهت ضخامت در زمان $t=0.3$ (ms) ۹۲
شکل(۵-۱۰)- ارتعاشات شعاعی نقطه‌ی $r = 0.375, z = 0.75$ m در استوانه کوتاه برای nهای مختلف ۹۴
شکل(۵-۱۱)- تاریخچه زمانی تنش شعاعی نقطه‌ی $r = 0.375, z = 0.75$ m در استوانه کوتاه برای nهای مختلف ۹۵
شکل(۵-۱۲)- تاریخچه زمانی تنش محیطی نقطه‌ی $r = 0.375, z = 0.75$ m در استوانه کوتاه برای nهای مختلف ۹۵
شکل(۵-۱۳) تاریخچه زمانی تنش محوری نقطه‌ی $r = 0.375, z = 0.75$ m در استوانه کوتاه برای nهای مختلف ۹۶
شکل(۵-۱۴)- تاریخچه زمانی تنش محیطی نقطه‌ای در وسط استوانه کوتاه برای nهای مختلف ۹۷
شکل(۵-۱۵)- توزیع تنش محیطی در حوزه حل مسئله در زمان $t = 0.15$ (ms) ۹۸
شکل(۵-۱۶)- توزیع تنش محیطی در حوزه حل مسئله در زمان $t = 0.6$ (ms) ۹۹
شکل(۵-۱۷)- تغییرات فشار داخلی با زمان طبق روابط (۵-۴و۵) ۱۰۱
شکل(۵-۱۸)- تغییرات فشار داخلی با زمان طبق روابط (۵-۶و۷) ۱۰۲
شکل(۵-۱۹)- ارتعاشات شعاعی نقطه‌ای واقع در شعاع میانی استوانه FGM، تحت بارگذاری مدل اول، برای nهای مختلف ۱۰۳
شکل(۵-۲۰)- ارتعاشات شعاعی نقطه‌ای واقع در شعاع میانی استوانه FGM، تحت بارگذاری مدل دوم، برای nهای مختلف ۱۰۳
شکل(۵-۲۱)- ارتعاشات شعاعی نقطه‌ای واقع در شعاع میانی استوانه FGM، تحت بارگذاری مدل سوم، برای nهای مختلف ۱۰۵
شکل(۵-۲۲)- ارتعاشات شعاعی نقطه‌ای واقع در شعاع میانی استوانه FGM، تحت بارگذاری مدل چهارم، برای nهای مختلف ۱۰۵
شکل(۵-۲۳)- ارتعاشات شعاعی نقطه‌ای واقع در شعاع میانی استوانه FGM ضخیم‌تر، تحت بارگذاری مدل اول، برای nهای مختلف ۱۰۶

عنوان **صفحه**

شکل(۵-۲۴)- ارتعاشات شعاعی نقطه‌ای واقع در مختصات $r = 0.375, z = 0.75$، در استوانه FGM دو سر گیردار با ابعاد $r_i = 0.25$، $r_o = 0.5$ و $L = 1.5\ m$، تحت بارگذاری مدل اول، برای nهای مختلف.....۱۰۷
شکل(۵-۲۵)- ارتعاشات شعاعی نقطه‌ای واقع در مختصات $r = 0.375, z = 1.5$، در استوانه FGM دو سر گیردار با ابعاد $r_i = 0.25$، $r_o = 0.5$ و $L = 3\ m$، تحت بارگذاری مدل اول، برای nهای مختلف.....۱۰۷
شکل(۵-۲۶)- ارتعاشات شعاعی نقطه‌ای واقع در مختصات $r = 0.375, z = 0.75$، در استوانه FGM یک سر گیردار با ابعاد $r_i = 0.25$، $r_o = 0.5$ و $L = 1.5\ m$، تحت بارگذاری مدل اول، برای nهای مختلف.....۱۰۸

فهرست جدول‌ها

شماره جدول **صفحه**

جدول (۱-۱)- تفاوت‌های روش‌های بدون المان و المان محدود ۷
جدول (۳-۱)- طبقه بندی روش‌های بدون المان ۳۹
جدول (۳-۲)- شیوه‌های مختلف فرمول بندی روش‌های بدون المان ۴۰
جدول (۵-۱)- همگرایی و مقایسه پنج پارامتر فرکانس اول برای ارتعاشات تقارن محوری یک استوانه توپر همگن آزاد ($L/r_0 = 4$) ۸۲
جدول (۵-۲)- پنج پارامتر فرکانس اول برای ارتعاشات تقارن محوری یک استوانه توپر همگن آزاد-گیردار و مقایسه با [۱۴] و [۱۷] برای نسبت طول به شعاع خارجی متفاوت ۸۳
جدول (۵-۳)- هشت پارامتر فرکانس اول برای ارتعاشات تقارن محوری استوانه توپر و توخالی همگن گیردار-گیردار و مقایسه با [۱۷] برای نسبت طول به شعاع خارجی متفاوت ۸۳
جدول (۵-۴)- خواص مکانیکی اجزا FGM ۸۴
جدول (۵-۵)- مقادیر پنج پارامتر فرکانس طبیعی اول برای استوانه FGM آزاد-گیردار با سطح داخلی سیلیکون کاربید و سطح خارجی فولاد ضد زنگ، به ازای تغییرات ثابت کسر حجمی ($r_o/r_i = 2$, $L/r_o = 3$) ۸۵
جدول (۵-۶)- مقادیر پنج پارامتر فرکانس طبیعی اول برای استوانه FGM آزاد-گیردار با سطح داخلی سیلیکون کاربید و سطح خارجی فولاد ضد زنگ، به ازای تغییرات ثابت کسر حجمی ($r_o/r_i = 2$, $L/r_o = 6$) ۸۵
جدول (۵-۷). مقادیر پنج پارامتر فرکانس طبیعی اول برای استوانه FGM آزاد-گیردار با سطح داخلی سیلیکون کاربید و سطح خارجی فولاد ضد زنگ، به ازاء تغییرات ثابت کسر حجمی ($r_o/r_i = 1.5$, $L/r_o = 3$) ۸۶
جدول (۵-۸). مقادیر پنج پارامتر فرکانس طبیعی اول برای استوانه FGM که سطح داخلی سیلیکون کاربید و سطح خارجی فولاد ضد زنگ به ازای شرایط مرزی مختلف ($r_o/r_i = 2$, $L/r_o = 6$) ۸۷

علامت‌های اختصاری

علامت	مفهوم
$\mathbf{A}$	ماتریس ضرایب
$\mathbf{B}$	ماتریس رابط، بین بردار تغییرمکان و بردار کرنش
$\mathbf{C}$	کلاس پیوستگی
$\mathbf{D}$	ماتریس رابط، بین بردار کرنش و بردار تنش
E	مدول یانگ
$\mathbf{F}$	بردار نیروهای سطحی
G	مدول برشی
J_1	جاکوبین نگاشت سلول اولیه به سلول انتگرال گیری گوس
L	طول استوانه
$\mathbf{M}$	ماتریس جرم و ماتریس ممان
$\hat{\mathbf{M}}$	ماتریس جرم اصلاح شده
$\mathbf{N}$	بردار توابع شکل اجزاء محدود
N	تعداد کل گره ها
$\mathbf{P}$	بردار توابع پایه
P	خواص مکانیکی
$\mathrm{r_i}$	شعاع داخلی استوانه
$\mathrm{r_o}$	شعاع خارجی استوانه
$\mathbf{T}$	ماتریس تبدیل
$\hat{\mathbf{u}}\,\mathbf{U},$	میدان تغییر مکان حقیقی
V_f	کسر حجمی مواد
d	بُعد
$d_{\max}$	پارامتر اتساع
$\mathbf{f}$	بردار نیرو
$\hat{\mathbf{f}}$	بردار نیرو اصلاح شده
$\mathbf{k}$	ماتریس سختی
$\hat{\mathbf{k}}$	ماتریس سختی اصلاح شده
h	ضخامت استوانه
n	ثابت کسر حجمی
nq	مرتبه گوس هر سلول
r	راستای شعاعی استوانه
$\mathbf{u}$	بردار تغییرمکان مجازی
u_r	تغییرمکان شعاعی
u_z	تغییرمکان محوری

مفهوم	علامت
بردار شتاب	$\ddot{\mathbf{u}}$
تابع وزن	w
راستای محوری استوانه	z
کرنش برشی	γ_{rz}
دلتا کرونیکر	δ_{ij}
کرنش	ε
کرنش شعاعی	ε_r
کرنش جانبی	ε_θ
کرنش محوری	ε_z
محورهای دستگاه مختصات طبیعی	ξ,η
ضریب پواسون	υ
چگالی و شعاع حوزه اثر دایروی	ρ
شعاع‌های حوزه اثر مستطیلی	ρ_x,ρ_y
تنش	σ
تنش شعاعی	σ_r
تنش جانبی	σ_θ
تنش محوری	σ_z
تنش برشی	σ_{rz}
فرکانس طبیعی	ω_i
قسمتی از مرز مسئله	Γ
بردارتوابع شکل بدون المان	$\mathbf{\Phi}$
بردارتوابع شکل اصلاح شده بدون المان	$\hat{\mathbf{\Phi}}$
حوزه تحت بررسی	$\mathbf{\Omega}$
پارامتر فرکانس	Ω

فصل اول

مقدمه

فصل دوم

مواد هدفمند

فصل سوم

روش‌های بدون المان

فصل چهارم

فرمول‌بندی مسئله

فصل پنجم

مثال‌های حل شده و نتیجه‌گیری

مراجع

۱-۱- مقدمه‌ای بر ارتعاشات

مطالعه و تحقیق در زمینه ارتعاشات، به سالها پیش از میلاد برمی‌گردد و با توجه به رشد تکنولوژی و اهمیت این موضوع، تحقیقات در این زمینه، روز به روز گسترش یافته است. در این بخش، با توجه به اهمیت ارتعاشات در سازه‌های مکانیکی، ابتدا توضیحاتی در زمینه مبدأ پیدایش ارتعاشات، اهمیت مطالعه آن و نکاتی در رابطه با کاربرد این علم آمده است.

۱-۱- ۱- مبدأ ارتعاشات

با ابداع اولین ابزار موسیقی، (احتمالا سوت یا طبل) انسان به موضوع ارتعاشات، علاقمند شد و به مطالعه آن همت گماشت. اولین پیشرفتها در زمینه موسیقی توسط چینی ها، ژاپنی ها، هندی ها و مصری ها در چهار هزار سال قبل از میلاد انجام‌گرفت [۱]. استفاده از اغلب ابزار موسیقی سیم دار، مانند چنگ، به حدود سه هزار سال قبل از میلاد می‌رسند [۲].

گالیله[1] را بنیانگذار علم تجربی می دانند. گالیله در سال ۱۶۳۸ مطالعاتی را در زمینه اجسام نوسانی انجام داد و رابطه فرکانس ارتعاشات یک آونگ ساده و طول آونگ و نیز پدیده تشدید در ارتعاشات را مورد بررسی قرار داد. نوشته‌های گالیله نشان می دهد که او درک خوبی از رابطه بین فرکانس، طول، کشش و چگالی یک سیم کشیده مرتعش داشته است [۳].در کتاب‌های جدید ارتعاشات، از قانون دوم نیوتن برای استنتاج معادله‌های حرکت یک جسم مرتعش استفاده می شود. تیلور در سال ۱۷۱۳، مسئله جسم مرتعش را به صورت نظری حل کرد. فرکانس طبیعی نوسان حاصل از معادله حرکت تیلور[2]، با مقادیر آزمایش گالیله مطابقت دارد. در سال ۱۸۶۲، ار.اف.ای کلبش[3] (۱۸۷۲-۱۸۳۳)، ارتعاشات یک پوسته دایره‌ای را مطالعه کرد. پس از او، ارتعاشات بعضی سیستمهای مکانیکی و ساختمانی مورد بررسی قرار گرفت [۴].

1 - Galilee
2 - Taylor
3 - R.F.A.Calbash

در میان کارهای ریلی، روش تعیین فرکانس اصلی نوسان یک سیستم پایستار، از اهمیت خاصی برخوردار است. او در این روش که آن را روش ریلی می‌گویند، از اصل پایستاری انرژی استفاده کرد. روش ریلی یک روش بسیار مفید برای حل مسائل مشکل در ارتعاشات است. بسط این روش، که با استفاده از آن می‌توان فرکانس‌های طبیعی یک سیستم با چند درجه آزادی را تعیین کرد، روش ریلی- ریتز نام دارد.

۱-۱-۲- اهمیت مطالعه ارتعاشات

اغلب فعالیت‌های انسان، به گونه‌ای با ارتعاشات سروکار دارد. به عنوان مثال، می‌شنویم، به دلیل آنکه پرده گوش مرتعش می‌شود. می‌بینیم، زیرا امواج نور نوسان می‌کنند. تنفس با نوسان ریه ها، قدم زدن با حرکت نوسانی دست و پا، و حرف زدن با حرکت نوسانی زبان انجام می‌شود [۵]. درگذشته، دانشمندان برای فهم پدیده-های طبیعت و ابداع نظریه‌های ریاضی ارتعاشات تلاش می‌کردند. اما، امروزه، عمدتا درباره کاربرد ارتعاشات مطالعه می‌کنند و آن را در طراحی ماشین‌ها، فونداسیون‌ها، سازه‌ها، موتورها، توربین‌ها و سیستم‌های کنترل به کار می‌برند.

اغلب ماشین‌ها، به علت نامیزانیکه ممکن است ناشی از نقص طراحی یا ساخت باشد، موتورهایشان، مشکل نوسان دارند. برای مثال، یک موتور دیزل نامیزان، با ایجاد امواج در اطراف خود سروصدا به وجود می‌آورد. چرخ‌های نامیزان بعضی لوکوموتیوها در سرعت‌های زیاد ممکن است تا بیش از یک سانتی متر از روی ریل بلند شوند. در توربین‌ها، ارتعاشات باعث شکست قطعات می‌شود. مهندسان تاکنون نتوانسته‌اند از شکست تیغه‌ها و چرخ توربین‌ها، که از ارتعاشات ناشی می‌شود، جلوگیری کنند. اصولا سازه‌هایی که به عنوان تکیه‌گاه ماشین‌های سانتریفوژ سنگین (مانند موتورها و توربین‌ها) یا برای ماشین‌های رفت و برگشتی (مانند موتورهای بخاری و گازی، و پمپ‌ها) طراحی می‌شوند، دستخوش نوسان می‌شوند. در تمام این موارد، قطعات مرتعش ممکن است بر اثر تنش تکراری دستخوش خستگی شده و بشکنند. این گونه ارتعاشات، علاوه بر فرسودن سریع قطعاتی مانند یاتاقان‌ها و چرخ دنده‌ها، و شل کردن پیچ و مهره‌ها، سر و صدای اضافی نیز ایجاد می‌کنند. در تراش فلزات، ارتعاشات باعث کاهش پرداخت سطوح می‌شود.

۱-۱-۳- دسته بندی ارتعاشات

مبحث ارتعاشات را می‌توان از جهات مختلفی طبقه‌بندی کرد، که در این قسمت به بعضی از آنها اشاره می-کنیم. از جمله این دسته‌بندی‌ها، می‌توان ارتعاشات میرا و نامیرا، ارتعاشات خطی و غیر خطی، ارتعاشات منظم وتصادفی را نام برد. دسته بندی مهم دیگری که به آن می‌پردازیم دسته‌دبندی ارتعاشات بصورت آزاد و اجباری

می‌باشد. در یک سیستم با ارتعاشات اجباری، در صورتیکه فرکانس نیروی خارجی با یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم برابر شود، تشدید روی می‌دهد و سیستم دستخوش نوسان‌های خطرناک می‌شود.
در بررسی ارتعاشات یک سیستم ممکن است سیستم بصورت گسسته یا پیوسته باشد. سیستم‌هایی که اجزای اینرسی، میرایی و سفتی دارای توزیع پیوسته می‌باشند، به عنوان سیستم‌های پیوسته شناخته می‌شوند. در بررسی این سیستم ها فرض می‌شود، تمام اجزای سیستم نوسان کنند. در نتیجه، درجات آزادی در یک سیستم پیوسته نامحدود است. سیم‌ها، شفت‌ها و تیرها جزء سیستم‌های پیوسته محسوب می‌شوند. معادله فرکانس در یک سیستم پیوسته، یک معادله غیر جبری است که از آن تعداد نامحدودی فرکانس طبیعی و شکل مد به دست می‌آید.

۱-۱-۴- اندازه‌گیری و کاربردهای ارتعاشات

معمولا انسان به عنوان جزئی از یک سیستم محسوب می‌شود. انتقال ارتعاشات به انسان، باعث ناراحتی و افت کارایی او می شود. نوسان ابزار اندازه‌گیری ممکن است باعث نقص کارکرد آنها شود و قرائت این ابزار را با مشکل روبرو سازد [۶]. لذا یکی از اهداف مهم مطالعه ارتعاشات از طریق طراحی درست ماشین آلات و تکیه-گاه‌های آنهاست. در این رابطه مهندس مکانیک سعی می‌کند تا نامیزانی ماشین‌آلات را به حداقل برساند. معمولا، کارکرد یک سیستم را تحت شرایط خاص باید تعیین کرد. اگر سیستم، هنگام آزمایش در یک شرایط خاص کار کند، می توان انتظار داشت که در آن شرایط به کار خود ادامه خواهد داد. برای طراحی ساختمان ها، سکو های نفتی، سیستم تعلیق اتومبیل ها و امثال این ها، اطلاعات مربوط به ارتعاشات این سیستم ها هنگام زلزله، طوفان،زبری سطح جاده ها اهمیت دارد.
بر خلاف آثار مضر مذکور، ارتعاشات کاربردهای مفید صنعتی نیز دارد. از این رو، در سال‌های اخیر، کاربرد وسایل مرتعش گسترش یافته است. برای مثال تسمه نقاله‌ها، قیف‌ها، غربال‌ها، ماشین‌های لباسشویی، مسواک‌های الکتریکی، مته‌های دندانپزشکی، ساعت‌ها وسایل ماساژ الکتریکی و حتی در پرداخت سطح قطعات مکانیکی، از ارتعاشات استفاده می‌شود. ارتعاشات باعث بهبود بازده بعضی فرایندهای ماشین‌کاری، ریخته‌گری، آهنگری و جوشکاری می‌شود. از ارتعاشات برای شبیه سازی زلزله در تحقیقات زمین‌شناسی، و برای مطالعه طراحی رآکتورهای هسته‌ای نیز استفاده می‌شود.

۱-۱-۵- کنترل فرکانس‌های طبیعی

امروزه تقاضا برای تولیدات صنعتی روبه افزایش است. از این رو، برای استفاده بهتر از مواد اولیه، ماشین‌های پر سرعت و سازه‌های سبک‌تر، مورد نیاز است. در این ماشین‌ها، احتمال وقوع تشدید بیشتر می‌شود و اطمینان-