دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان:

فضاهای طوقه کوچك و نظریه‌ی پوشش برای فضاهایی غیر هاسدورف هموتوپیکی

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

استاد راهنما:

دکتر بهروز مشایخی فرد

استاد مشاور:

دکتر زینب حامد لبافیان

نگارنده:

آتنا خالقی

زمستان ۱۳۹۰

فهرست مطالب

چکیده

اهمیت طوقه های کوچک در نظریه ی فضاهای پوششی توسط بردسکی، دیداك، لابز و میترا در [۴،۵] مشخص گردید.یك طوقه کوچك حول نقطه xدر فضای X، طوقه ای است که هر همسایگی از آن شامل نمایشی از طوقه ی کوچك باشد. فضای طوقه کوچك، فضایی غیر همبند ساده است که هر طوقه در آن کوچك است. وجود طوقه ی کوچك در یك فضا سبب از بین رفتن خاصیت همبند ساده نیم موضعی آن فضا و به دنبال آن غیر هاسدورف هموتوپیکی بودن فضا می گردد. در این رساله علاقه مند به مطالعه ی طوقه ی کوچك، فضاهای غیر هاسدورف هموتوپیکی و پوشش های چنین فضاهایی هستیم. از این رو فضای طوقه کوچك نیم موضعی را به عنوان شرط لازم و کافی بر وجود پوشش جهانی از فضای غیر هاسدورف هموتوپیکی معرفی خواهیم کرد و اثبات می کنیم برای فضای طوقه کوچك نیم موضعی، X فضای طوقه کوچك است اگر و تنها اگر هر پوشش از X بدیهی گردد، اگر و تنها اگر $\pi_1^{top}(X)$ گروه توپولوژی ناگسسته باشد.

مقدمه

اهمیت طوقه‌های کوچک در نظریه فضاهای پوششی ابتدا توسط بردسکی[1]، دیداک[2]، لابز[3] و میترا [4] در [۴] و [۵] و پس از آن توسط ویرک [5] در [۱۲] و همچنین پاکدامن، ترابی و مشایخی در [۱۰] مشخص گردید. سپس برای اولین بار در سال ۲۰۰۶ مفهوم فضاهای هموتوپیکی هاسدورف توسط کنن[6] و کانر [7]بیان شد. این دو در مقاله خود به ارایه چند مثال از فضای هموتوپیکی هاسدورف و ارتباط بین شرط هاسدورف برای فضای مسیرهای روی X و شرط هموتوپیکی هاسدورف فضای X پرداختند.

وجود طوقه‌های کوچک در فضا باعث می‌شود که فضا همبند ساده نیم‌موضعی و به دنبال آن هاسدورف هموتوپیکی نباشد، بنابراین ما در این رساله علاقه‌مند به مطالعه فضاهای غیر هاسدورف هموتوپیکی و بررسی فضاهای پوششی آن‌ها هستیم.

این رساله شامل چهار فصل است. در فصل اول، تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز این رساله جمع‌آوری شده است، با این فرض که خواننده با مفاهیم اولیه توپولوژی کارشناسی آشنایی دارد.

در فصل دوم به مطالعه نظریه فضاهای پوششی کلاسیک، فضاهای پوششی جهانی و ویژگی‌های آن

---

[1] Brodskiy

[2] Dydak

[3] Labuz

[4] Mitra

[5] Virk

[6] Cannon

[7] Conner

بر اساس فصل دهم از کتاب [۱۱] پرداخته شده است.

در فصل سوم مفاهیم طوقه کوچک، فضای طوقه کوچک و گروه طوقه کوچک بر اساس مقاله [۱۲] بیان شده است. همچنین فضایی طوقه کوچک با استفاده از جزایر همساز ساخته می‌شود. در ادامه تاثیر طوقه‌های کوچک بر فضاهای پوششی بررسی شده است.

در فصل چهارم به مطالعه فضاهای غیر هاسدورف هموتوپیکی و فضاهای پوششی آن‌ها بر اساس مقاله [۱۰] پرداخته شده است. در این فصل پوشش کوچک معرفی می‌شود، همچنین ثابت می‌گردد که هر پوشش کوچک از X یک پوشش جهانی در حالت رسته‌ای است. در ادامه این فصل، مفهوم فضای طوقه کوچک نیم‌موضعی برای اولین بار در مرجع [۱۰] به عنوان شرط لازم و کافی بر وجود پوشش جهانی برای فضای غیر هاسدورف هموتوپیکی معرفی شده است. در انتهای این فصل نشان داده می‌شود، برای هر فضای طوقه کوچک نیم‌موضعی مانند X، X طوقه کوچک است اگر و تنها اگر هر پوشش از X بدیهی باشد اگر و تنها اگر گروه $\pi_1^{top}(X)$ یک گروه توپولوژی ناگسسته باشد.

۱

مقدمات و پیشنیازها

این فصل در سه بخش به پیشنیازهای مورد نظر این رساله می‌پردازد.

۱.۱ مفاهیم جبری

در این بخش قصد داریم، مفاهیم جبری که در این رساله مورد استفاده قرار می‌گیرد، بیان کنیم. در ابتدا به معرفی رسته می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. یک رسته[1] ی $\mathfrak{C}$ از سه بخش تشکیل شده است:

۱. رده‌ای از اشیاء مانند A، B، C و $\cdots$ که آن را با $Obj(\mathfrak{C})$ نمایش می‌دهند،

۲. رده‌ای از ریخت[2] ها که به هر دوتایی مرتب از اشیاء مانند (A, B) مجموعه‌ای از ریخت‌ها نسبت داده می‌شود، این مجموعه را با نماد $Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$ نشان می‌دهند. توجه داریم که

[1] category

[2] morphism

مجموعه‌های نسبت داده شده به دوتایی‌های متمایز، دوبه‌دو مجزا هستند.

۳. عمل بین ریخت‌ها که برای هر $f, g \in Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$ عمل بین این دو ریخت را با نماد $f \circ g$ نشان می‌دهند و این عمل دارای سه خاصیت زیر است،

i) برای هر $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$ و هر $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(B, C)$، داریم $g \circ f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A, C)$،

ii) برای هر $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(B, C)$، هر $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$ و هر $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(C, D)$ داریم

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

iii) برای هر $A \in Obj(\mathfrak{C})$ ریخت $1_A \in Hom_{\mathfrak{C}}(A, A)$ موجود است به قسمی که برای هر $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$ و هر $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(A, C)$

داریم $f \circ 1_A = f$ و $1_A \circ g = g$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم $\mathfrak{C}$ یک رسته‌ی دلخواه و A یک شی ثابت در آن باشد در این صورت

۱. تابعگون[1]

$$Hom(A, -) : \mathfrak{C} \longrightarrow Sets$$

$$B \longmapsto Hom(A, B)$$

یک تابعگون همورد[2] از رسته‌ی $\mathfrak{C}$ به رسته‌ی مجموعه‌ها است.

[1] functor

[2] covariant functor

۲. تابعگون

$$Hom(-,A) : \mathfrak{C} \longrightarrow Sets$$

$$B \longmapsto Hom(B,A)$$

یک تابعگون ناهمورد (پادورد)[1] از رسته‌ی $\mathfrak{C}$ به رسته‌ی مجموعه‌ها است.

تعریف ۳.۱.۱. در رسته‌ی $\mathfrak{C}$، ریختی مانند $f : A \to B$، ریخت هم‌ارزی[2] نامیده می‌شود هرگاه ریخت $g : B \to A$ موجود باشد به قسمی که $f \circ g = 1_B$ و $g \circ f = 1_A$.

تعریف ۴.۱.۱. در رسته‌ی $\mathfrak{C}$ یک دستگاه مستقیم[3] با مجموعه‌ی اندیس‌گذار I عبارت است از مجموعه‌ای از اشیاء F_i و ریخت‌های $\psi_i^j : F_i \longrightarrow F_j$ برای $i \leqslant j$ به طوری که:

۱. برای هر $i \in I$، ریخت $\psi_i^i : F_i \longrightarrow F_i$ همانی است.

۲. اگر $i \leqslant j \leqslant k$، آن‌گاه $\psi_j^i o \psi_k^j = \psi_k^i$ یا به عبارتی نمودار زیر جابه‌جایی است.

$$\begin{tikzcd}
F_i \arrow[rr, "\psi_j^i"] \arrow[dr, "\psi_k^i"'] & & F_j \arrow[dl, "\psi_k^j"] \\
& F_k &
\end{tikzcd}$$

دستگاه مستقیم را با نماد $\{F_i, \psi_j^i\}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم $\{F_i, \psi_j^i\}$ یک دستگاه مستقیم در رسته‌ی $\mathfrak{C}$ باشد. در این صورت حد مستقیم[4] این دستگاه شیئی در رسته‌ی $\mathfrak{C}$ است که آن را با نماد $\lim\limits_{\rightarrow} F_i$ نشان می‌دهیم،

[1] contravariant functor

[2] equivalence

[3] direct system

[4] direct limit

همراه با خانواده‌ای از ریخت‌ها مانند $\{\alpha_i : F_i \longrightarrow \varinjlim F_i\}$ که برای هر $i \leqslant j$ ، داشته باشیم $\alpha_i = \alpha_j o \psi_j^i$ ، به علاوه برای هر شئ X در رسته‌ی $\mathfrak{C}$ همراه با خانواده‌ی دلخواهی از ریخت‌ها به صورت $\{f_i : F_i \longrightarrow X\}$ که برای هر $i \leqslant j$، در شرط $f_i = f_j o \psi_j^i$ صدق کند، ریخت منحصر به فرد $\beta : \varinjlim F_i \longrightarrow X$ وجود داشته باشد به طوری که در نمودار جابه‌جایی زیر صدق کند.

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim F_i \arrow[rr, dashed, "\beta"] & & X \\
& F_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "\psi_j^i"] & \\
& F_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

۲.۱ مفاهیم توپولوژی

در این بخش به معرفی چند مفهوم توپولوژی که در این رساله نیاز داریم، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱. نگاشت پیوسته و پوشای $f : X \to Y$ همسانی[۱] نامیده می‌شود، در صورتی که زیرمجموعه U از Y باز باشد اگر و تنها اگر $f^{-1}(U)$ در X باز باشد.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنیم $\sim$ رابطه‌ی هم‌ارزی روی X و $X/\sim$ فضای خارج قسمتی باشد. در این صورت نگاشت طبیعی $\upsilon : X \to X/\sim$، همسانی است.

لم ۳.۲.۱. *اگر نگاشت $f : X \to Y$ پیوسته، پوشا و باز باشد آن‌گاه نگاشت f همسانی است.*

لم ۴.۲.۱ (لم چسب[۲]). *فرض کنیم فضای X اجتماعی متناهی از زیرمجموعه‌های بسته به صورت $X = \cup_{i=1}^{n} X_i$ باشد. اگر برای فضای Y نگاشت‌های پیوسته‌ی $f_i : X_i \to Y$ وجود داشته باشد به*

[1]identification

[2]gluing lemma

قسمی‌که روی اشتراک این مجموعه‌ها مساوی باشند، یعنی برای هر i, j،

$$f_i \mid_{X_i \cap X_j} = f_j \mid_{X_i \cap X_j}, \tag{۱.۱}$$

آن‌گاه نگاشت پیوسته منحصر به فرد $f : X \to Y$ با ضابطه $f \mid_{X_i} = f_i$ برای هر i، قابل تعریف است.

تعریف ۵.۲.۱. یک گروه G به همراه توپولوژی τ را گروه توپولوژی[1] گوییم هرگاه دو نگاشت $\theta : G \times G \longrightarrow G$ با ضابطه‌ی $\theta(g, h) = gh$ و $i : G \longrightarrow G$ با ضابطه‌ی $i(g) = g^{-1}$ پیوسته باشند.

به عنوان مثال می‌توان به گروه $(R, +)$ با توپولوژی اقلیدسی و $(S^1, \circ)$ با توپولوژی زیرفضایی $\mathbb{R}^2$ و هرگروه G همراه با توپولوژی گسسته اشاره کرد.

لم ۶.۲.۱. *فرض کنیم G یک گروه توپولوژی و H یک زیرگروه نرمال آن باشد، در این صورت نگاشت خارج قسمتی*

$$q : G \to \frac{G}{H}$$

نگاشتی باز است.

برهان. فرض کنیم U مجموعه‌ی باز دلخواهی در G باشد، در این صورت تساوی‌های زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}
q^{-1}(q(U)) &= q^{-1}(\{uH \mid u \in U\}) \\
&= \{g \in G \mid q(g) \in \{uH \mid u \in U\}\} \\
&= \{g \in G \mid gH = uH, \ \exists u \in U\} \\
&= \{g \in G \mid g \in uH, \ \exists u \in U\} \\
&= \{uh \mid \exists u \in U, \ \exists h \in H\} \\
&= \bigcup_{h \in H} Uh.
\end{aligned}$$

[1] topological group

چون انتقال راست در گروه توپولوژی همسان ریختی است، برای هر $h \in H$، مجموعه‌ی Uh در G باز است. بنابراین مجموعه‌ی $q^{-1}(q(U))$ در G باز است و چون توپولوژی $\frac{G}{H}$ خارج قسمتی است، نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی $q(U)$ در $\frac{G}{H}$ باز است. چون مجموعه‌ی U دلخواه انتخاب شد، می‌توان نتیجه گرفت که نگاشت q باز است. $\square$

لم ۱.۲.۷. *فرض کنیم G یک گروه توپولوژی باشد و $H \trianglelefteq G$. در این صورت گروه خارج قسمتی $\frac{G}{H}$ یک گروه توپولوژی است که $\frac{G}{H}$ به‌عنوان یک فضای خارج قسمتی از G به وسیله‌ی H در نظر گرفته می‌شود.*

برهان. فرض کنید نگاشت $\varphi : G \times G \to G$ نشان‌دهنده‌ی عمل دوتایی گروه G باشد که پیوسته است. عمل دوتایی القایی در گروه خارج قسمتی $\frac{G}{H}$ را با نماد زیر نشان می‌دهیم،

$$\bar{\varphi} : \frac{G}{H} \times \frac{G}{H} \to \frac{G}{H}$$

که ضابطه‌ی آن به صورت زیر است،

$$\bar{\varphi}(aH, bH) = abH.$$

برای این که ثابت کنیم $\frac{G}{H}$ گروه توپولوژی است، ابتدا پیوستگی نگاشت $\bar{\varphi}$ را بررسی می‌کنیم. برای این منظور، فرض می‌کنیم که مجموعه‌ی دلخواه $U \subseteq \frac{G}{H}$ باز باشد و نشان می‌دهیم، تصویر وارون این مجموعه، $\bar{\varphi}^{-1}(U)$ در $\frac{G}{H} \times \frac{G}{H}$ باز است. فرض کنیم $q : G \to \frac{G}{H}$ نگاشت خارج قسمتی با

ضابطه‌ی $q(g) = gH$ باشد، در این صورت تساوی‌های زیر برقرار است،

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}^{-1}(U) &= \{(aH, bH) |\ \bar{\varphi}(aH, bH) \in U\} \\
&= \{(aH, bH) |\ abH \in U\} \\
&= \{(aH, bH) |\ q(ab) \in U\} \\
&= \{(aH, bH) |\ ab \in q^{-1}(U)\} \\
&= \{(aH, bH) |\ \varphi(a, b) \in q^{-1}(U)\} \\
&= \{(aH, bH) |\ (a, b) \in \varphi^{-1}(q^{-1}(U))\}. \qquad (۲.۱)
\end{aligned}$$

برای اثبات باز بودن مجموعه‌ی $\bar{\varphi}^{-1}(U)$، مجموعه‌ای باز حول هر نقطه‌ی آن، می‌یابیم. نقطه‌ی دلخواه (aH, bH) را در این مجموعه در نظر بگیرید، با توجه تساوی‌های (۲.۱) نظیر این نقطه، عنصر $(a, b) \in \varphi^{-1}(q^{-1}(U))$، در دست است. چون نگاشت‌های q و φ پیوسته هستند، مجموعه‌ی $\varphi^{-1}(q^{-1}(U))$ در $G \times G$ باز است، بنابراین حول هر نقطه از جمله (a, b)، مجموعه‌ی بازی مانند $V_1 \times V_2$ موجود است که در شرط $(a, b) \in V_1 \times V_2 \subseteq \varphi^{-1}(q^{-1}(U))$ صدق می‌کند. اینک ادعا می‌کنیم مجموعه‌ی $q(V_1) \times q(V_2)$ در $\frac{G}{H} \times \frac{G}{H}$ باز است و در شرط صدق می‌کند،

$$(aH, bH) \in q(V_1) \times q(V_2) \subseteq \bar{\varphi}^{-1}(U).$$

بنا به لم ۶.۲.۱ نگاشت q باز است، بنابراین مجموعه‌های $q(V_1)$ و $q(V_2)$ در $\frac{G}{H}$ باز هستند. چون $(a, b) \in V_1 \times V_2$، واضح است که $(aH, bH) \in q(V_1) \times q(V_2)$. برای اثبات درستی ادامه‌ی شرط مذکور، فرض کنیم $(a_1 H, b_1 H) \in q(V_1) \times q(V_2)$ عنصر دلخواهی باشد، سپس نشان می‌دهیم که داریم

$$(a_1 H, b_1 H) \in \bar{\varphi}^{-1}(U).$$

با استفاده از تساوی‌های (۲.۱)، کافی است نشان دهیم که $(a_1, b_1) \in \varphi^{-1}(q^{-1}(U))$. با توجه به این که داریم $(a_1 H, b_1 H) \in q(V_1) \times q(V_2)$، عناصر $a_0, b_0 \in G$ موجودند به

طوری که $a_\circ \in V_۱$، $b_\circ \in V_۲$، $a_۱ H = a_\circ H$ و $b_۱ H = b_\circ H$. بنابراین نتیجه می‌شود که $(a_\circ, b_\circ) \in V_۱ \times V_۲ \subseteq \varphi^{-۱}(q^{-۱}(U))$. با استفاده‌ی مجدد از تساوی‌های (۲.۱)، نتیجه می‌شود که $(a_\circ H, b_\circ H) \in \bar{\varphi}^{-۱}(U)$، سپس با تعویض نماینده این رده‌ها، داریم

$$(a_۱ H, b_۱ H) \in \bar{\varphi}^{-۱}(U).$$

چون عنصر $(a_۱ H, b_۱ H) \in q(V_۱) \times q(V_۲)$ دلخواه انتخاب شده است، درستی شمول زیر نتیجه می‌شود،

$$q(V_۱) \times q(V_۲) \subseteq \bar{\varphi}^{-۱}(U).$$

بنابراین مجموعه‌ی $\bar{\varphi}^{-۱}(U)$ در $\frac{G}{H} \times \frac{G}{H}$ باز است و در نتیجه نگاشت $\bar{\varphi}$ پیوسته است.

برای این که ثابت شود، فضای $\frac{G}{H}$ گروه توپولوژی است، علاوه بر نگاشت $\bar{\varphi}$، باید ثابت کنیم، نگاشت القایی از وارون عمل دوتایی نیز، پیوسته است. فرض کنیم نگاشت $\psi : G \to G$ نگاشت وارون عمل دوتایی با ضابطه‌ی $\psi(g) = g^{-۱}$ باشد و $\bar{\psi} : \frac{G}{H} \to \frac{G}{H}$ نگاشت القایی آن روی گروه خارج قسمتی با ضابطه‌ی $\bar{\psi}(gH) = g^{-۱}H$ باشد. همچنین فرض کنیم $U \subseteq \frac{G}{H}$ مجموعه‌ی بازی باشد، در این صورت با توجه به این که $q \circ \psi = \bar{\psi} \circ q$، تساوی زیر برقرار است،

$$\bar{\psi}^{-۱}(U) = q(\psi^{-۱}(q^{-۱}(U))).$$

اینک با رجوع به لم ۶.۲.۱ و این که نگاشت‌های ψ و q پیوسته هستند، مجموعه‌ی $q(\psi^{-۱}(q^{-۱}(U)))$ در $\frac{G}{H}$ باز است. چون مجموعه‌ی U دلخواه انتخاب شده است، نتیجه می‌شود که نگاشت $\bar{\psi}$ پیوسته است. $\square$

گروه‌های توپولوژی دارای ویژگی‌هایی هستند که در ادامه به دو ویژگی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

قضیه ۸.۲.۱. *فرض کنیم G یک گروه توپولوژی باشد و $H \trianglelefteq G$. در این صورت،*

۱. *گروه خارج قسمتی $\frac{G}{H}$ هاسدورف[1] است اگر و تنها اگر H در G بسته باشد،*

[1] Hausdorff

۲. *گروه خارج قسمتی $\frac{G}{H}$ گسسته است اگر و تنها اگر H در G باز باشد.*

برهان. برای اثبات (۱)، ابتدا فرض کنیم گروه خارج قسمتی $\frac{G}{H}$ هاسدورف باشد، نشان می‌دهیم مجموعه‌ی $G-H$ در G باز است. برای این منظور فرض کنیم نقطه‌ی $g \in G-H$ دلخواه باشد، سپس مجموعه‌ی بازی حول این نقطه می‌یابیم که درون $G-H$ قرار گیرد که این ثابت می‌کند، باز است. چون $g \in G-H$، دو عنصر gH و H در گروه $\frac{G}{H}$ متمایز هستند. بنا به این که $\frac{G}{H}$ یک فضای هاسدورف است، برای دو عنصر متمایز H و gH، مجموعه‌های باز مجزای $V_\circ$ و $V_\backslash$ موجود هستند که در شرایط زیر صدق می‌کنند،

$$H \in V_\circ, \; gH \in V_1.$$

مجموعه‌ی V_1 در $\frac{G}{H}$ باز است و چون نگاشت q پیوسته است، نتیجه می‌شود که تصویر وارون آن توسط q، یعنی $q^{-1}(V_1)$ در G باز است. حال نشان می‌دهیم این مجموعه درون $G-H$ قرار دارد، به برهان خلف فرض کنیم چنین نباشد. در این صورت عنصری مانند $h \in q^{-1}(V_1) \cap H$ وجود دارد. چون $q(h) = hH = H$، می‌توان نتیجه گرفت که $h \in q^{-1}(V_\circ)$، بنابراین داریم:

$$h \in q^{-1}(V_\circ) \cap q^{-1}(V_1) = q^{-1}(V_\circ \cap V_1) = \emptyset$$

که یک تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و شمول $q^{-1}(V_1) \subseteq G-H$ برقرار است. چون $g \in G-H$ دلخواه انتخاب شد، برای هر نقطه از $G-H$ چنین مجموعه‌ی بازی می‌توان یافت که نتیجه می‌دهد $G-H$ باز است. این شرط معادل بسته بودن H در G است و لزوم را ثابت می‌کند.

برعکس، فرض کنیم مجموعه‌ی H در G بسته باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم، فضای $\frac{G}{H}$ هاسدورف است. برای این منظور دو نقطه‌ی متمایز دلخواه aH و bH را از این فضا در نظر می‌گیریم، سپس نشان می‌دهیم مجموعه‌ی بازی در $\frac{G}{H}$ حول aH موجود است که شامل bH نیست. در نتیجه فضای $\frac{G}{H}$ هاسدورف است. ادعا می‌کنیم مجموعه‌های $(G-bH)H$ شرایط لازم را دارد.

اولا چون H در G بسته است و انتقال چپ در گروه توپولوژی همسان ریختی است، مجموعه‌ی bH در G بسته است و در نتیجه مجموعه‌ی $G-bH$ در G باز است. بار دیگر با استفاده از لم ۶.۲.۱

، نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌ی $(G-bH)H$ در $\frac{G}{H}$ باز است. نشان می‌دهیم این مجموعه شامل aH هست و شامل bH نیست. ابتدا فرض کنیم مجموعه‌ی $(G-bH)H$ شامل bH باشد، در این صورت عنصری از $G-bH$ مانند x وجود دارد که $xH=bH$، بنابراین $b^{-1}x\in H$ یا به طور معادل $x\in bH$ که تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و $bH\notin(G-bH)H$.

ادعا می‌کنیم $a\in G-bH$، برای اثبات این ادعا فرض کنیم چنین نباشد، یعنی $a\notin G-bH$، در این صورت $a\in bH$. این یک تناقض است، زیرا معادل است با $b^{-1}a\in H$ و این، تمایز aH و bH در گروه $\frac{G}{H}$ را نقض می‌کند. چون نقاط aH و bH دلخواه انتخاب شده‌اند، می‌توان نتیجه گرفت که $\frac{G}{H}$ هاسدورف است. برای اثبات (۲)، ابتدا فرض کنیم که گروه خارج قسمتی $\frac{G}{H}$ گسسته باشد، در این صورت هر مجموعه‌ی تک‌عضوی در آن باز است. بنابراین مجموعه‌ی $\{H\}$ در $\frac{G}{H}$ باز است و چون نگاشت q پیوسته است، تصویر وارون آن یعنی $q^{-1}(\{H\})$ در G باز است، از طرفی داریم

$$q^{-1}(\{H\})=H,$$

بنابراین مجموعه‌ی H در G باز است.

برعکس، فرض کنیم H در G باز باشد، در این صورت برای هر عنصر $a\in G$، مجموعه‌ی aH در G باز است، زیرا انتقال از چپ در گروه توپولوژی همسان ریختی است. حال چون q نگاشتی باز است، مجموعه‌ی aH را به مجموعه‌ای باز می‌نگارد. بنابراین تصویر aH توسط q که برابر با $\{aH\}$ است، در فضای $\frac{G}{H}$ باز است. در نتیجه فضای $\frac{G}{H}$ گسسته است. □

نتیجه ۹.۲.۱. *در یک گروه توپولوژی G اگر عضو همانی این گروه در G بسته باشد، آن‌گاه G هاسدورف است و اگر عضو همانی این گروه در G باز باشد آن‌گاه G گسسته است.*

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی باشند. در این صورت فضای تمام توابع از X به Y را با نماد Y^X نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{C}(X,Y)=\{f:X\to Y;\text{f پیوسته است}\}$$

در حالتی که $X=S^1$، $\mathcal{C}(S^1,Y)$ فضای تمام طوقه‌ها در Y است و زیرفضای $\mathcal{C}\left((S^1,1),(Y,y)\right)$

از $\mathcal{C}(S^۱, Y)$ فضای تمام مسیرهای بسته روی نقطه y یا فضای طوقه[1] های Y روی y است و معمولاً این فضا را با $Hom\left((S^۱, ۱), (Y, y)\right)$ یا $\Omega_y(Y)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی باشند و K زیرمجموعه‌ی فشرده‌ای از X و U زیرمجموعه‌ی بازی از Y باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\langle K, U\rangle = \{f \in Y^X;\ f(K) \subseteq U\}.$$

مجموعه‌ی

$$\{\langle K, U\rangle;\ K \subseteq X,\ U \subseteq Y\}$$

را به عنوان یک پایه در نظر می‌گیریم و توپولوژی نظیر آن را توپولوژی فشرده-باز[2] روی $\mathcal{C}(X, Y)$ می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای باشد که توسط خانواده زیرمجموعه‌های $\{A_i\}_{i\in I}$ پوشیده شده است و I مجموعه‌ای اندیس‌گذار (حتی نامتناهی) است. به علاوه فرض کنیم

۱. برای هر $i \in I$، A_i فضای توپولوژی باشد،

۲. برای هر $i, j \in I$، دو توپولوژی زیرفضایی القایی توسط A_j و A_i روی $A_i \cap A_j$ منطبق باشد،

۳. برای هر $i, j \in I$، مجموعه $A_i \cap A_j$ در A_j و A_i بسته باشد.

در این‌صورت توپولوژی ضعیف[3] روی X تعریف شده توسط خانواده $\{A_i, i \in I\}$ توپولوژی‌ای است که در آن هر زیرمجموعه‌ی $F \subseteq X$ بسته است اگر و تنها اگر برای هر $F \cap A_i, i \in I$ در A_i بسته باشد.

به‌سادگی می‌توان دید که

i) برای هر $i \in I$، مجموعه‌ی A_i در X بسته است.

---

[1] loop

[2] compact-open topology

[3] weak topology

(ii) توپولوژی زیرفضایی A_i بر توپولوژی A_i منطبق است.

(iii) در صورتی که مجموعه‌ی اندیس‌گذار I متناهی باشد، تنها یک توپولوژی روی X وجود دارد که در شرایط ۱، ۲ و ۳ صدق می‌کند.

قابل ذکر است چنان چه مجموعه‌ی I نامتناهی باشد، ممکن است حکم (iii) برقرار نباشد. برای مشاهده مثال نقض می‌توان به مثال ۱۰.۸ [۱۱] مراجعه کرد.

مثال ۱۳.۲.۱. فرض کنیم $\{X_j : j \in J\}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژی باشد، در این صورت هم‌ضرب[۱] این خانواده که با نماد $\coprod X_j$ نمایش داده می‌شود، برابر با اجتماع مجزای X_jها، همراه با توپولوژی ضعیف مشخص شده توسط این خانواده است.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنیم X یک مجموعه باشد و $\tau = \{A | A \subset X\}$ در این‌صورت τ یک توپولوژی برای X است که این توپولوژی را توپولوژی گسسته[۲] می‌نامند.

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنیم X یک مجموعه باشد و $\tau = \{\phi, X\}$ در این‌صورت τ یک توپولوژی برای X است که آن را توپولوژی ناگسسته[۳] می‌نامند.

تعریف ۱۶.۲.۱. یك مسیر[۴] در X تابعی پیوسته مانند $f : I \to X$ است. اگر $f(۰) = a$ و $f(۱) = b$ آن گاه f مسیری از a به b است.

تعریف ۱۷.۲.۱. فضای X همبند مسیری[۵] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a, b \in X$ مسیری در X از a به b موجود باشد.

[1] coproduct

[2] discrete topology

[3] indiscrete topology

[4] path

[5] path connected

تعریف ۱.۲.۱۸. فضای X همبند مسیری موضعی[۱] نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in X$ و هر همسایگی باز U از x همسایگی V با خاصیت $x \in V \subseteq U$ موجود باشد به قسمی که هر دو نقطه در V را بتوان به وسیله‌ی مسیری در U به یکدیگر متصل کرد.

لم ۱.۲.۱۹. *فضای X همبند مسیری موضعی است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$ و هر همسایگی باز U از x، مجموعه‌ی همبند مسیری باز V با خاصیت $x \in V \subseteq U$ موجود باشد.*

برهان. فرض کنیم X همبند مسیری موضعی باشد، مجموعه‌ی V را مولفه‌ی مسیری از U شامل x انتخاب می‌کنیم. بالعکس، بنا به تعریف فضای همبند مسیری موضعی، بدیهی است. □

لم ۱.۲.۲۰. *فرض کنیم X همبند و همبند مسیری موضعی باشد، در این صورت X همبند مسیری است.*

برهان. چون X همبند است، لذا تنها دارای یك مولفه است، از آن جایی که X همبند مسیری موضعی است، لذا X مولفه‌ی مسیری است، بنابراین حکم برقرار است. □

۱.۳ مفاهیم توپولوژی جبری

در این بخش به برخی از مفاهیم توپولوژی جبری که در این رساله مورد نیاز است، خواهیم پرداخت.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم $X \subseteq Y$، در این صورت

۱. فضای X را توکشیده[۲] Y گوییم، هرگاه نگاشت پیوسته $r : Y \longrightarrow X$ موجود باشد به طوری که $roi = 1_X$ که در آن $i : X \longrightarrow Y$ نگاشت شمول است. در این حالت نگاشت r را توکشنده[۳] گوییم.

---

[1] locally path connected

[2] retract

[3] retraction

۲. فضای X را توکشیده‌ی دگردیسی[۱] Y گوییم هرگاه X توکشیده‌ی Y باشد و $1_Y \simeq ior$.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی، A زیرفضای دلخواهی از X و $f, g : X \to Y$ نگاشت‌هایی پیوسته باشند. در این صورت گوییم f و g نسبت به A هموتوپیک[۲] هستند هرگاه نگاشتی پیوسته مانند $F : X \times I \to Y$ موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\forall x \in X,\ F(x, 0) = f(x),$

۲. $\forall x \in X,\ F(x, 1) = g(x)$ و

۳. $\forall a \in A,\ \forall t \in I,\ F(a, t) = f(a) = g(a).$

تذکر ۳.۳.۱. *فرض کنیم X فضایی توپولوژی باشد و f و g دو مسیر در X باشند. در این صورت هموتوپی نسبی[۳] بین این دو مسیر، نسبت به مجموعه $\dot{I} = \{0, 1\}$ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین اگر f و g نسبت به $\dot{I}$ هموتوپیک باشند، آن‌گاه طبق تعریف داریم:*

نگاشت $F : I \times I \to I$ با خواص زیر موجود است،

۱.

$$\forall s \in I,\ F(s, 0) = f(s),\ F(s, 1) = g(s),$$

۲.

$$\forall t \in I,\ F(0, t) = f(0) = g(0),$$

۳.

$$\forall t \in I,\ F(1, t) = f(1) = g(1).$$

[1]deformation retract

[2]homotopic

[3]relative homotopy