بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی محض

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته محاسبات نرم ساختارهای جبری منطقی

عملگرهای حالت روی ساختارهای فازی

مولف:
مهسا صادقی کوثرخیزی

استاد راهنما:
دکتر آرشام برومند سعید

آذر ماه ۱۳۹۳

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی محض

دانشکده ریاضی و رایانه
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: مهسا صادقی کوثرخیزی امضاء:

استاد راهنما: دکتر آرشام برومند سعید امضاء:

داور اول: دکتر اسفندیار اسلامی امضاء:

داور دوم: دکتر سید شاهین موسوی امضاء:

نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر آزیتا تاج الدینی امضاء:

تقدیم به

پدرم که استواریش کوه را یادآور است و

مادرم که مهربانیش خورشید را شرمسار ساخته...

و خواهران عزیزم...

تشکر و قدردانی

به نظر من ما انسانها بر روی کره زمین زندگی نمی‌کنیم، بلکه سرزمین واقعی ما، قلب کسانی است که به آنها علاقه داریم .

فراتر از بودن - کریستین بوبن

سپاس خدایی را که اوّل و آخِر وجود است، بی آنکه اوّلی بر او پیشی بگیرد یا آخری پس از او باشد؛ خدایی که دست هر چشمی از دامن دیدارش کوتاه است و فهم هر کبوتر توصیفگری از پرواز در آسمان وصفش عاجز.

بر خود لازم می‌دانم تا از زحمات استاد با کمالات و شایسته‌ام، جناب آقای دکتر آرشام برومند سعید، که در کمال سعه صدر با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه متقبل شدند.

از استادان فرزانه و دلسوز، جناب آقای دکتر اسفندیار اسلامی و جناب آقای دکتر شاهین موسوی که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

مهسا صادقی کوثرخیزی- پاییز ۱۳۹۳

چکیده

تکواره‌های مشبکه مانده کراندار ($R\ell$ - تکواره‌ها) یک کلاس جامع از مشبکه‌های مانده (نه لزوماً جابجایی) می‌باشند. لذا شبه BL - جبرها و شبه MV - جبرها و در نتیجه BL - جبرها و MV - جبرها را می توان به عنوان $R\ell$ - تکواره‌های کراندار در نظر گرفت. در پایان نامه پیش رو زبان $R\ell$ - تکواره‌هایی که یک مولد غیر جابجایی از MV - جبرها و BL - جبرها می‌باشد، با اضافه کردن یک عملگر یکتایی که خواص جبری از یک حالت را توصیف می‌کند را توسعه می‌دهیم. این نتیجه‌ی جبری $R\ell$ - تکواره‌های حالت و $R\ell$ - تکواره‌های حالت- ریخت نامیده و خواص پایه از چنین جبرهایی را ارائه می‌دهیم. همچنین جبرهای به طور زیر مستقیم تحویل ناپذیر و چند توسیع از انواع $R\ell$ - تکواره‌های حالت- ریخت و یک تأثیر متقابل بین حالات و عملگر های حالت را توصیف می‌کنیم.

کلمات کلیدی: *جبرهایی از منطق فازی، مشبکه‌های مانده، عملگر حالت، عملگر حالت- ریخت، جبرهای به طور زیر مستقیم کاهش ناپذیر، حالت، مولدهای واریته‌ها*

مقدمه

تکواره‌های مشبکه مانده مرتب کراندار ($R\ell$ -تکواره ها) کلاسی از مشبکه‌های مانده کراندار (نه لزوماً جابجایی) تشکیل می‌دهد که شامل کلاس‌هایی از جبرهایی می‌باشد که بر پایه‌ی استدلال فازی هستند. یعنی، شبه BL -جبرها [۱۰] و شبه MV -جبرها [۲۵] (= GMV -جبرها [۴۲])، و در نتیجه BL -جبرها [۳۰] و جبرها-MV [۴] به عنوان $R\ell$ -تکواره‌های کراندار شناخته شده‌اند. همچنین ساختارهای مانده‌ایی نیز جزئی از کلاس مذکور می‌باشند [۵].

یادآوری می‌کنیم BL -جبرها و شبه BL -جبرها معنی جبری از منطق پایه‌ایی هایک [1] [۳۱] و شبه منطق پایه [۳۲] می‌باشند. همچنین MV -جبرها و شبه MV -جبرها، به ترتیب جبرهایی از منطق نامتناهی ارزشی لوکاسیویچ [2] [۴] و منطق غیر جابجایی لوکاسیویچ [۳۹] می‌باشند. بعلاوه، کلاس $R\ell$ -تکواره‌های کراندار شامل کلاسی از جبرهای هایتینگ [3] [۱] می‌باشد. به عبارت دیگر، جبرهایی از منطق شهودگرایی هستند. ([۲])

مفهوم یک حالت (= همانند اندازه احتمالاتی) روی یک MV -جبر توسط ماندیسی [4] [۴۰] به عنوان یک مورد ویژه از یک حالت روی یک مجموعه جزئاً مرتب توزیع پذیر

---

[1] Hajek

[2] Lukasiewicz

[3] Heyting

[4] Mundici

[1] توسط کوپکا [2] و چوانس [3] [۳۷] معرفی شده است. یادآوری می‌کنیم که یک حالت روی یک MV -جبر M یک نگاشت $s : M \longrightarrow [۰,۱]$ می‌باشد. حالات روی BL -جبرها، شبه BL -جبرها و $R\ell$ -تکواره‌های کراندار در [۴۵،۲۴،۱۸،۱۹] معرفی و مطالعه شده‌اند. به تازگی، حالات روی ساختارهای جبری متفاوت به طور فشرده مطالعه شده است. [۳۸،۳۶،۴۱،۴۵،۴۶] فلامینیو [4] و مونتاگنا [5] [۲۲،۲۳] به دستاورد دیگری از حالات روی MV -جبرها نزدیک شدند. آنها ساختار MV -جبرها را بااستفاده از یک عملگر یکتایی بزرگ و نتیجه را MV -جبرهای حالت نامیدند. دی نولا [6] و دارسکیج [7] [۷]، MV -جبرهای حالت-ریخت را که نوعی قوی تر از MV -جبرهای حالت می‌باشند را معرفی کرده‌اند. بعلاوه، MV -جبرهای حالت-ریخت تحویل ناپذیر در [۷] مشخص و چند کلاس از آنها در [۸] مطالعه شده است. همچنین، نوعی از عملگر مشابه برای GMV -جبرها (بدون نیاز به جابجایی بودن) توسط راچونک [8] و سالوانووا [9] [۴۴] تعریف شده است.

عملگرهای حالت و عملگرهای حالت-ریخت روی BL -جبرها اخیراً توسط سینقو [10] [۶] معرفی و مورد بحث قرار گرفته‌اند و BL -جبرهای حالت-ریخت به طور زیرمستقیم تحویل ناپذیر در [۱۵] توضیح داده شده است. تعاریف جدید از این مفاهیم را برای دست یافتن به ساختار BL -جبرها (و MV -جبرها) استفاده شده است. با الهام از تحقیقات

---

[1] D-poset

[2] Kopka

[3] Chovanec

[4] Flaminio

[5] Montagna

[6] Di Nola

[7] Dvurecenskij

[8] Ruchunek

[9] Salounova

[10] Ciungu et al.

اخیر روی MV -جبرهای حالت، BL -جبرهای حالت و GMV -جبرهای حالت در این پایان نامه $R\ell$ -تکواره‌های حالت $(\mathbf{M},\sigma)$ را معرفی و مورد بحث قرار می‌دهیم.

پایان نامه پیش رو به صورت زیر نگارش شده است. فصل اول، به بیان تعاریف و مفاهیم پایه برای $R\ell$ -تکواره‌ها پرداخته شده است. فصل دوم، از یک توسیع غیر جابجایی از تعریف یک BL -جبر حالت به نام $R\ell$ -تکواره حالت استفاده و چند نتیجه از [۶] را بیان و ثابت می‌کنیم. یک عملگر حالت و خواص گوناگون آن ازجمله یک عملگر حالت قوی، یک عملگر حالت-ریخت ضعیف و یک عملگر حالت-ریخت که یک $R\ell$ -خودریختی خودتوان می‌باشد را معرفی می‌کنیم. σ -فیلترهای نرمال ماکزیمال را بیان کرده و نشان می‌دهیم که مشبکه σ -فیلترهای نرمال و مشبکه σ -همنهشتی های روی $(\mathbf{M},\sigma)$ یکریخت هستند. در ادامه با $R\ell$ -تکواره‌های حالت به طور زیر مستقیم تحویل ناپذیر و مولدهایی از واریته ی $R\ell$ -تکواره‌های حالت-ریخت کار می‌کنیم. فصل سوم، رابطه‌ی بین عملگرهای حالت و حالات را بیان می‌کنیم. نشان می‌دهیم که برای هر حالت s روی M، می‌توان یک عملگر حالت روی تصویر همریخت از M القا شده توسط s تعریف کنیم. ثابت می‌کنیم اگر $(\mathbf{M},\sigma)$ یک $R\ell$ -تکواره حالت خوب باشد، آنگاه یک نگاشت دوسویی بین حالات σ -سازگار روی M و حالات روی $R\ell$ -تکواره $\sigma(M)$، از M تحت σ وجود دارد. بعلاوه، ارتباط بین عملگرهای حالت روی یک $R\ell$ -تکواره نرمال M و عملگرهای حالت روی GMV -جبر $\mathcal{MV}(M)$ از عناصر $x \in M$ به طوری که $x^{-\sim} = x = x^{\sim -}$ را توضیح می‌دهیم. در نهایت، نشان می‌دهیم که هر عملگر حالت روی یک $R\ell$ -تکواره خطی همیشه یک عملگر حالت-ریخت می‌باشد.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

۱.۱ مشبکه‌ها

تعریف ۱.۱.۱. ([۱]) مجموعه‌ی M به همراه عمل ترتیب $\leqslant$ را یک مجموعه مرتب (جزئاً مرتب) می‌نامیم، هرگاه برای هر $x, y, z \in M$ داشته باشیم

الف) $x \leqslant x$؛

ب) اگر $x \leqslant y, y \leqslant x$، آنگاه $x = y$؛

پ) اگر $x \leqslant y, y \leqslant z$، آنگاه $x \leqslant z$.

مجموعه‌ی جزئاً مرتب $(M, \leqslant)$ را یک مجموعه کلاً مرتب می‌نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in M$، $x \leqslant y$ یا $y \leqslant x$. فرض کنید S یک زیر مجموعه از مجموعه جزئاً مرتب $(M, \leqslant)$ باشد. $x \in M$ را یک کران بالای S می‌نامیم هرگاه به ازای هر $t \in S$ داشته باشیم $t \leqslant x$.([۱])

تعریف ۲.۱.۱. ([۱]) فرض کنید $(M', \leqslant_{M'}), (M, \leqslant_M)$ دو مجموعه جزئاً مرتب باشند. نگاشت $f : M \longrightarrow M'$ را حافظ ترتیب می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in M$ که $x \leqslant y$ داشته باشیم $f(x) \leqslant f(y)$.

تعریف ۳.۱.۱. ([۱]) مجموعه جزئاً مرتب $(M, \leqslant)$ به همراه عملگرهای دوتایی $\vee$ و $\wedge$ را یک مشبکه می‌نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند

الف) عملگرهای $\wedge, \vee$ جابجایی باشند. یعنی برای هر $x, y \in M$ داشته باشیم

$$x \vee y = y \vee x \quad , \quad x \wedge y = y \wedge x؛$$

ب) عملگرهای $\wedge, \vee$ شرکت‌پذیر باشند. یعنی برای هر $x, y \in M$ داشته باشیم

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \quad , \quad (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)؛$$

پ) عملگرهای $\wedge, \vee$ خودتوان باشند. یعنی برای هر $x \in M$ داشته باشیم

$$x \vee x = x \vee x \quad , \quad x \wedge x = x \wedge x؛$$

ت) عملگرهای $\wedge$, $\vee$ خاصیت جذب داشته باشند. یعنی برای هر $x, y \in M$ داشته باشیم
$x \wedge (x \vee y) = x \ \ , \ \ x \vee (x \wedge y) = x$.

فرض کنید M یک مجموعه جزئاً مرتب باشد و $S \subseteq M$ و $x, y \in M$ قرار می‌دهیم ([۱])

$$x \vee y = sup\{x, y\} \ \ , \ \ x \wedge y = inf\{x, y\}.$$

$$\bigvee S = supS \ \ , \ \ \bigwedge S = infS.$$

قضیه ۴.۱.۱. ([۱]) *فرض کنید M یک مجموعه جزئاً مرتب ناتهی باشد.*

الف) *اگر $x \wedge y$, $x \vee y$ برای تمام $x, y \in M$ موجود باشند، آنگاه M را یک مشبکه می‌باشد.*

اگر $\bigwedge S$, $\bigvee S$ برای تمام $S \subseteq M$ موجود باشند، آنگاه M را یک مشبکه کامل می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. ([۱]) مشبکه $(M; \vee, \wedge)$ را توزیع پذیر نامیم، هرگاه عملگر $\wedge$ نسبت به عملگر $\vee$ توزیع پذیر باشد. یعنی به ازای هر $x, y, z \in M$ داشته باشیم

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

مثال ۶.۱.۱. ([۱]) برای اعداد حقیقی a, b بازه $[a, b]$ به همراه ترتیب معمولی $\leqslant$، یک مشبکه کامل توزیع پذیر است.

تعریف ۷.۱.۱. ([۱]) زیر مجموعه M' از مشبکه $(M; \vee, \wedge)$ را یک زیر مشبکه نامیم، هرگاه M' تحت اعمال $\wedge$, $\vee$ بسته باشد. یعنی برای هر $x, y \in M'$ داشته باشیم
$x \wedge y \in M' \ \ , \ \ x \vee y \in M'$.

تعریف ۸.۱.۱. ([۱]) فرض کنید $M_۲, M_۲$ دو مشبکه باشند. نگاشت $f : M_۱ \longrightarrow M_۲$ را یک همریختی مشبکه‌ها نامیم، هرگاه حافظ عملگرهای $\wedge, \vee$ باشد. به عبارت دیگر، برای هر $x, y \in M_۱$ داشته باشیم

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \ \ , \ \ f(x \vee y) = f(x) \vee f(y).$$

تعریف ۹.۱.۱. ([۱]) مشبکه $M_۱$ را یکریخت با مشبکه $M_۲$ نامیم. هرگاه یک همریختی دوسویی مانند $\alpha : M_۱ \longrightarrow M_۲$ موجود باشد، که α , $\alpha^{-۱}$ حافظ ترتیب باشند.

یک همریختی دوسویی را یک یکریختی (مشبکه) گوییم.

اگر $\alpha : M_۱ \longrightarrow M_۲$ یک همریختی یک به یک باشد، آنگاه زیر مشبکه $\alpha(M_۱)$ از $M_۲$ یک یکریختی از $M_۱$ می‌باشد و α را یک نشاننده (از $M_۱$ به توی $M_۲$) می‌نامیم. ([۱])

۲.۱ مشبکه‌های مانده

تعریف ۱.۲.۱. ([۳]) یک مشبکه مانده، یک جبر $\mathbf{M} = (M; \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, ۰, ۱)$ از نوع $\langle ۲, ۲, ۲, ۲, ۰, ۰ \rangle$ می‌باشد که در خواص زیر صدق می‌کند.

(LR۱) $(M; \wedge, \vee, ۰, ۱)$ یک مشبکه کراندار باشد.

(LR۲) $(M; \odot, ۱)$ یک تکواره جزئاً مرتب جابجایی باشد.

(LR۳) $\odot$, $\rightarrow$ یک جفت الحاقی باشند. به عبارت دیگر برای هر $x, y, z \in M$ داشته باشیم

$$x \leqslant y \rightarrow z \quad \Leftrightarrow \quad x \odot z \leqslant y.$$

مثال ۲.۲.۱. ([۳]) فرض کنید p یک عدد طبیعی ثابت باشد و $I = [۰, ۱]$ بازه‌ی حقیقی

واحد باشد. اگر برای هر $x, y \in I$ تعریف کنیم

$$x \odot y = ۱ - min\{۱, \left[(۱ - x)^p + (۱ - y)^p\right]^{۱/p}\}$$

$$x \to y = sup\{z \in [۰, ۱] \big| x \odot z \leqslant y\}$$

آنگاه $(I; max, min, \odot, \to, ۰, ۱)$ یک مشبکه مانده می‌باشد. که به آن مولد ساختار لوکاسیویچ[۱] می‌گویند.

برای $p = ۱$ به ساختار لوکاسیویچ می‌رسیم.

$$x \odot y = max\{۰, x + y - ۱\};$$

$$x \to y = min\{۱, ۱ - x + y\};$$

مثال ۳.۲.۱ ([۳]) اگر روی $I = [۰, ۱]$ برای هر $x, y \in I$ تعریف کنیم

$$x \odot y = min\{x, y\};$$

$$x \to y = \begin{cases} ۱ & x \leqslant y; \\ y & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

آنگاه $(I; max, min, \odot, \to, ۰, ۱)$ یک مشبکه مانده است. (به آن ساختار گودل[۲] می‌گویند.)

مثال ۴.۲.۱ ([۳]) اگر روی $I = [۰, ۱]$ فرض کنیم $\odot$ ضرب معمولی از اعداد حقیقی

[۱] Lukasiewicz

[۲] Godel

باشد و برای هر $x, y \in I$

$$x \to y = \begin{cases} ۱ & x \leqslant y; \\ & \\ y/x & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

آنگاه $(I; max, min, \odot, \to, ۰, ۱)$ یک مشبکه مانده می‌باشد.(به آن ساختار ضرب ها یا ساختار گاوس[۱] می‌گویند.)

مثال ۵.۲.۱. ([۳]) فرض کنیم $(M; \wedge, \vee, ', ۰, ۱)$ یک جبر بولی باشد، اگر تعریف کنیم برای هر $x, y \in M$، $x \to y = x' \vee y \quad , \quad x \odot y = x \wedge y$، آنگاه $(M; \wedge, \vee, \odot, \to, ۰, ۱)$ یک مشبکه مانده می شود.

تعریف ۶.۲.۱. ([۳]) مشبکه مانده $(M; \wedge, \vee, \odot, \to, ۰, ۱)$ را یک BL -جبر می‌نامیم، اگر برای هر $x, y \in M$

(BL۴ $x \odot (x \to y) = x \wedge y$؛

(BL۵ $(x \to y) \vee (y \to x) = ۱$.

قضیه ۷.۲.۱. ([۳]) *مشبکه مانده* $(M; \vee, \wedge, \odot, \to, ۰, ۱)$ *یک* MV *- جبر می‌باشد، اگر و تنها اگر برای هر* $x, y \in M$*، در شرط اضافه‌ی زیر صدق کند*

$$(x \to y) \to y = (y \to x) \to x.$$

یک مثال از یک مشبکه مانده‌ی متناهی می‌زنیم که BL - جبر نمی‌باشد.

مثال ۸.۲.۱. ([۳۰]) فرض کنید $A = \{۰, a, b, c, ۱\}$ با $۰ < a, b < c < ۱$ ولی a, b غیرقابل مقایسه‌اند. A نسبت به عملگرهای زیر یک مشبکه مانده است.

---

[۱] Gaines

$\odot$	۰	a	b	c	۱
۰	۰	۰	۰	۰	۰
a	۰	a	۰	a	۰
b	۰	۰	b	b	b
c	۰	a	b	c	c
۱	۰	a	b	c	۱

$\rightarrow$	۰	a	b	c	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱
a	b	۱	b	۱	۱
b	a	a	۱	۱	۱
c	۰	a	b	۱	۱
۱	۰	a	b	c	۱

شرط $x \vee y = \big[(x \to y) \to y\big] \wedge \big[(y \to x) \to x\big]$، برای هر $x, y \in A$ برقرار نمی‌باشد. زیرا

$$c = a \vee b \neq \big[(a \to b) \to b\big] \wedge \big[(b \to a) \to a\big] = (b \to b) \wedge (a \to a) = ۱$$

بنابراین A یک BL -جبر نمی‌باشد.

قضیه ۹.۲.۱ ([۳۰]) *فرض کنید* M *مشبکه مانده باشد و* $x, x_۱, x_۲, y, y_۱, y_۲, z \in M$، *آنگاه قوانین زیر برقرارند*

(lr-c۱) $۱ \to x = x \;\;,\;\; x \to x = ۱$؛

(lr-c۲) $x \odot ۰ = ۰ \;\;,\;\; y \leqslant x \to y \;\;,\;\; x \odot y \leqslant x \wedge y$ *بنابراین* $x \odot y \leqslant x, y$؛

(lr-c۳) $x \odot y \leqslant x \to y$؛

(lr-c۴) $x \to y = ۱ \;\;\Leftrightarrow\;\; x \leqslant y$؛

(lr-c۵) $۰ \to x = ۱ \;\;,\;\; x \to ۱ = ۱ \;\;,\;\; x = y \;\;\Leftrightarrow\;\; x \to y = y \to x = ۱$؛

(lr-c۶) $x \to y \leqslant (x \odot z) \to (y \odot z)$؛

(lr-c۷) $x \leqslant y \;\;\Longrightarrow\;\; x \odot z \leqslant y \odot z$؛

(lr-c۸) $y^* \leqslant x^*$, $y \to z \leqslant x \to z$, $z \to x \leqslant z \to y$ $\implies$ $x \leqslant y$؛

(lr-c۹) $x \to (y \to z) = (x \odot y) \to z = y \to (x \to z)$؛

قضیه ۱.۲.۱۰. ([۳]) *فرض کنید M مشبکه مانده باشد، اگر $x, y \in M$ آنگاه*

(lr-c۱۰) $x \odot y = \circ \Leftrightarrow x \leqslant y^*$, $x \odot x^* = \circ$؛

(lr-c۱۱) $x^{**} \leqslant x^* \to x$, $x \leqslant x^{**}$؛

(lr-c۱۲) $\circ^* = ۱$, $۱^* = \circ$؛

قضیه ۱.۲.۱۱. ([۳]) *اگر M یک مشبکه مانده کامل باشد و $x \in M$ و $(y_i)_{i\in I}$ یک خانواده از عناصر M باشد. آنگاه*

(lr-c۱۳) $x \odot (\bigvee_{i\in I} y_i) = \bigvee_{i\in I}(x \odot y_i)$؛

(lr-c۱۴) $x \odot (\bigwedge_{i\in I} y_i) \leqslant \bigwedge_{i\in I}(x \odot y_i)$؛

(lr-c۱۵) $x \to (\bigwedge_{i\in I} y_i) = \bigwedge_{i\in I}(x \to y_i)$؛

(lr-c۱۶) $(\bigvee_{i\in I} y_i) \to x = \bigwedge_{i\in I}(y_i \to x)$؛

نتیجه ۱.۲.۱۲. ([۳]) *اگر M یک مشبکه مانده کامل باشد و $x, x', y, y', z \in M$، آنگاه*

(lr-c۱۷ $x \vee y = ۱ \Longrightarrow x \odot y = x \wedge y$؛

(lr-c۱۸ $x \vee (y \odot z) \geqslant (x \vee y) \odot (x \vee z)$؛

بنابراین برای هر عدد طبیعی n, m، $x^m \vee y^n \geqslant (x \vee y)^{nm}$, $x \vee y^n \geqslant (x \vee y)^n$؛

تعریف ۱.۲.۱۳. ([۳]) فرض کنید M یک مشبکه مانده باشد و $f \in M$ داده شده باشد، مزدوج چپ و راست به ترتیب ρ_f, λ_f را از $x \in M$ به وسیله‌ی f به صورت زیر تعریف

می‌کنیم

$$\lambda_f(x) := f \rightsquigarrow (x \odot f);$$

$$\rho_f(x) := f \rightarrow (f \odot x);$$

لم ۱.۲.۱۴. ([۳]) *فرض کنید M یک مشبکه مانده باشد.*

برای تمام $a_1, a_2, ..., a_n, b \in M$، اگر $a = \prod a_j$ آنگاه

$$\prod \rho_b(a_j) \leqslant \rho_b(a) \ \ , \ \ \prod \lambda_b(a_j) \leqslant \lambda_b(a).$$

۱.۳ MV - جبرها

تعریف ۱.۳.۱. ([۳۰]) یک MV - جبر، جبر $\mathbf{M} = (M; \oplus, ^*, 0)$ از نوع $\langle 2, 1, 0\rangle$ می‌باشد که برای هر $x, y, z \in M$ در تساوی‌های زیر صدق می‌کند

(MV۱) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$؛

(MV۲) $x \oplus y = y \oplus x$؛

(MV۳) $x \oplus 0 = x$؛

(MV۴) $x^{**} = x$؛

(MV۵) $x \oplus 0^* = 0^*$؛

(MV۶) $(x^* \oplus y)^* \oplus y = (y^* \oplus x)^* \oplus x$.

توجه کنید که اصول موضوعه‌ی $MV1 - MV3$ نشان دهنده‌ی این هستند که $(M; \oplus, 0)$ یک تکواره جابجایی است. ([۳۰])