دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

میانگین پذیری ضعیف دوگان دوم جبر باناخ A و $n-$ میانگین پذیری ضعیف $A^{\#}$

استاد راهنما

دکتر جواد لالی

تدوین

فاطمه یعقوبی

اسفند ۸۷

چکیده

می‌خواهیم رابطه بین میانگین‌پذیری ضعیف A^{**} و میانگین‌پذیری ضعیف A را مورد بررسی قرار دهیم. به طور کلی، این حکم ثابت شده است که هر جبر باناخی میانگین‌پذیری را از دوگان دوم خودش به ارث می‌برد. ولی، مثالی موجود نیست که این موضوع را برای میانگین‌پذیری ضعیف رد کند. بسیاری از پژوهشگران، در سالهای اخیر، از جنبه‌های مختلفی میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ را مطالعه کرده‌اند(به منابع این پایان‌نامه مراجعه کنید). سئوال جالبی در این جا مطرح می‌شود که آیا می‌توان خاصیت میانگین‌پذیری ضعیف را از A^{**} به A منتقل کرد؟ این مسئله را بسیاری از پژوهشگران مورد بررسی قرار داده‌اند و شرایطی پیدا کرده‌اند که تحت آن شرایط، میانگین‌پذیری ضعیف A^{**} مستلزم میانگین‌پذیری ضعیف A می‌شود. در این خصوص، تحت هر یک از حالتهای زیر به سئوال فوق پاسخ مثبت داده شده است.

۱) A یک ایده‌ال چپ A^{**} باشد،

۲) A دوگان جبر باناخی باشد،

۳) A ارنز منظم باشد و هر اشتقاق از A به توی A^* ضعیفاً فشرده باشد،

۴) A ایده‌ال راست A^{**} باشد و $A^{**}A = A^*$.

مسئله باز دیگری که در این زمینه مطرح می‌شود این است که آیا رابطه‌ای بین n—میانگین‌پذیری ضعیف A و n—میانگین‌پذیری ضعیف $A^\sharp$ وجود دارد. این مسئله با حداقل شرایط به صورت زیر مطرح شده است: فرض کنید A یک جبر باناخی است که یا میانگین‌پذیر ضعیف است و یا دارای واحد تقریب کراندار است. در این صورت، به ازای $n \geq ۰$، واحد ساز آن n—میانگین‌پذیر ضعیف است اگر و فقط اگر خود جبر A، n—میانگین‌پذیر ضعیف باشد.

رده بندی موضوعی: 43A20، 43M20، 46H10، 46H20.

واژه‌های کلیدی: جبر باناخ، اشتقاق، میانگین‌پذیری ضعیف، درونی، واحددارشده، ضرب ارنز.

فهرست مطالب

پیشگفتار

این پایان‌نامه شامل سه فصل است. که در فصل اول تعاریف و مفاهیمی که مورد نیاز است، آورده شده و همچنین قضیه‌ای در ارتباط با فضای ℓ_p بیان شده است.
در فصل دوم مفهوم اشتقاق و میانگین‌پذیری و میانگین‌پذیری ضعیف، بیان شده و ثابت شده است به ازای هر $1 \leq p < \infty$، ℓ_p با ضرب نقطه به نقطه میانگین‌پذیر ضعیف است، اما میانگین‌پذیر نیست. بنابراین میانگین‌پذیری ضعیف میانگین‌پذیری را نتیجه نمی‌دهد. همچنین ثابت شده است که $L^1(G)$ میانگین‌پذیر ضعیف است. این مطلب که آیا میانگین‌پذیری ضعیف A^{**} میانگین‌پذیری ضعیف A را نتیجه می‌دهد یا نه هنوز اثبات یا رد نشده است ولی برای برخی از فضاها مانند جبر گروهی $L^1(G)$، جبر فوریه $A(G)$، وقتی که G میانگین‌پذیر است و جبر باناخ ارنز منظم A، ثابت شده است. در بخش دوم نشان داده شده که اگر A^{**} میانگین‌پذیر ضعیف باشد و $\hat{A}$ یک ایده‌ال چپ در A^{**} باشد آنگاه A نیز میانگین‌پذیر ضعیف است. همچنین ثابت شده که اگر A، یک جبر باناخ ارنز منظم باشد و A^{**}، میانگین‌پذیر ضعیف باشد و هر اشتقاق از A به A^* ضعیفاً فشرده باشد آنگاه، A نیز میانگین‌پذیر ضعیف است. همچنین این موضوع که آیا میانگین‌پذیری ضعیف ، میانگین‌پذیری را نتیجه می‌دهد یا نه؟ در مورد جبر باناخ A که در آن $WAP(A) \subseteq A^*$ و جبر باناخ A که یک ایده‌ال راست در A^{**} است و در شرط $A^{**}A = A^{**}$ صدق می‌کند و همچنین برای جبر فیگا — تالامانکا — هرز $A_p(G)$ وقتی G میانگین‌پذیر است، ثابت شده است.

در فصل سوم به مفهوم $n-$میانگین‌پذیری ضعیف واحددارشده جبر باناخ A پرداخته شده است. در این فصل ثابت شده اگر A، یک جبر جابه‌جایی باشد، آنگاه $A^\sharp$، $n-$میانگین‌پذیر ضعیف است اگر و فقط اگر A، $n-$میانگین‌پذیر ضعیف باشد. در نهایت ثابت شده است که اگر A یک جبر باناخ میانگین‌پذیر ضعیف باشد، یا تقریب همانی کراندار داشته باشد، آنگاه، به ازای هر $n \geq 1$، $A^\sharp$، $n-$میانگین‌پذیر ضعیف است اگر و فقط اگر A، $n-$میانگین‌پذیر ضعیف باشد.

این مطالب برگرفته از مقاله‌های زیر است.

•M. Despic and F. GHaramani, Weak amenability of group algebras of locally compact groups, Canad. Math. Bull. Vol. 37(2), 1994, pp. 165-167.

•M. Eshaghi Gordji and M. Filali, Weak amenability of the second dual of a Banach algebra. Studia Mathematica. 182. No. 3 (2007)

•Yong Zhang, Weak amenability of unitization of Banach algebras. preprint.

فصل ۱

تعاریف و قضایای اولیه

۱.۱ آنالیزتابعی

قرارداد: X یک فضای برداری روی میدان F است، که در آن F میدان اعداد حقیقی یا میدان اعداد مختلط است.

۱.۱.۱ تعریف : فرض کنید X یک فضای برداری باشد. یک نیم نرم روی X عبارت است از تابع $P : X \longrightarrow [0, \infty)$ به طوری که

الف : به ازای هر $x, y \in X$، $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$.

ب : به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in F$، $P(\alpha x) = |\alpha| P(x)$.

از شرط (ب) نتیجه می‌شود $P(0) = 0$. نیم‌نرم P یک نرم است در صورتی که از $x \neq 0$ نتیجه شود $P(x) \neq 0$. فضای نرم دار X با متر $d(x, y) = \|x - y\|$، تبدیل به فضای متری می‌شود. فضای نرم‌دار X که در آن هر دنباله کوشی با متر بالا همگرا باشد فضای نرم‌دار (نرمیده) کامل یا فضای باناخ نامیده می‌شود.

۲.۱.۱ تعریف : فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. یک توپولوژی روی X یک زیر مجموعه τ از $P(X)$ است به طوری که $\emptyset, X \in \tau$ و τ تحت اجتماع دلخواه و اشتراک

متناهی بسته باشد. اعضای τ مجموعه های باز X هستند. زوج (X, τ) یک فضای توپولوژی است.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد فضاهای توپولوژی به مرجع [۱۸] مراجعه نمایید.

۳.۱.۱ تعریف: فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژی باشد. X هاسدورف نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x, y \in X$ با $x \neq y$ مجموعه‌های باز U, V وجود داشته باشند به طوری که $x \in U$ و $y \in V$ و $U \cap V = \emptyset$.

اگر به مفهوم فشردگی در فضاهای توپولوژی مراجعه کنید، فرمول بندی‌های مختلفی از مفهوم فشردگی وجود دارد که اغلب در بررسی مسائل آنالیز مفیدند و یادآوری می‌کنیم فضای X فشرده است در صورتی که هر پوشش باز آن دارای زیر پوشش متناهی باشد. اینک فرمول بندی‌های دیگری از فشردگی را در اینجا بیان می‌کنیم.

۴.۱.۱ تعریف: الف) فضای توپولوژی X را فشرده بر حسب نقطه حدی خوانیم در صورتی که هر زیر مجموعه نامتناهی آن دارای یک نقطه حدی در X باشد.

ب) فضای X را فشرده دنباله‌ای خوانیم در صورتی که هر دنباله در آن دارای زیر دنباله همگرا باشد.

پ) فضای X را فشرده شمارشی خوانیم در صورتی که هر پوشش باز شمارای X حاوی یک زیر گردایه متناهی باشد که X را می‌پوشاند.

فشرده شمارشی مستلزم فشرده بر حسب نقطه حدی است و اگر فضای X هاسدورف باشد عکس آن نیز برقرار است [۱۸ بخش ۲۸ تمرین ۴]. همچنین در هر فضای توپولوژی فشردگی مستلزم فشردگی بر حسب نقطه حدی است. ولی عکس آن برقرار نیست. فشردگی بر حسب نقطه حدی مفهومی ضعیف‌تر از فشردگی است. مثال زیر این موضوع را نشان می‌دهد.

مثال: فرض کنید که $Y = \{a, b\}$ یک فضای توپولوژی با توپولوژی ناگسسته باشد.

یعنی، $\tau_Y = \{Y, \emptyset\}$ حال فرض کنید که $X = N \times Y$ که در آن N مجموعه اعداد طبیعی با توپولوژی گسسته

$$\tau_N = \{ \ \{n\} \ \mid \ n \in N \ \}$$

یعنی، مجموعه‌های یکانی در آن باز باشند. اگر $a_n = (n, a)$ و $b_n = (n, b)$ آنگاه،

$$X = \{a_۱, a_۲, \ldots, b_۱, b_۲, \ldots\}$$

پس مجموعه‌های باز در X به صورت $\{n\} \times Y$ هستند که می‌توان آن را به صورت Y_n نمایش داد. X فشرده بر حسب نقطه حدی است. زیرا، هر مجموعه ناتهی X، دارای یک نقطه حدی است؛ فرض کنید که $A = \{a_n\} \subseteq X$ در این صورت b_n یک نقطه حدی A است. زیرا،

$$Y_n \bigcap (A - \{b_n\}) \neq \emptyset$$

در حالیکه فضای X فشرده نیست. زیرا، $X = \bigcup_{n=۱}^{\infty} Y_n$. پس $\{Y_n \ \mid \ n \in N\}$ یک پوشش باز X است ولی دارای زیر پوشش متناهی نیست.

در فضاهای متریک‌پذیر، فرمولبندیهای فشردگی معادلند. قضیه جالبی در این زمینه وجود دارد [۱۸ قضیه ۲.۲۸].

فرض کنیم S یک نیم‌گروه و τ یک توپولوژی روی S باشد. در این صورت (S, τ) یک نیم‌گروه توپولوژی است اگر τ هاسدورف و نگاشت ضربی $(s, t) \mapsto st$ از $S \times SS$ پیوسته باشد. یک گروه توپولوژی، گروهی مانند G است که یک نیمگروه توپولوژی باشد به طوری که نگاشت $S \mapsto S^{-۱}$ از G به توی G پیوسته باشد. اگر در گروه توپولوژی G، هر نقطه همسایگی داشته باشد که بستار آن فشرده باشد، آنگاه G را یک گروه موضعاً فشرده می‌نامیم.

۵.۱.۱ تعریف: فرض کنیم X, Y دو فضای نرمیده باشند. یک نگاشت خطی یا عملگر

خطی عبارت است از تابع $T: X \longrightarrow Y$ که به ازی هر $\alpha, \beta \in F$ و به ازای هر $a, b \in X$،

$$T(\alpha a + \beta b) = \alpha T(a) + \beta T(b)$$

هرگاه $Y = F$ گوییم T یک تابعک خطی است.

به راحتی می‌توان ثابت کرد که اگر $T: X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی باشد. شرایط زیر معادلند.

الف) T پیوسته است.

ب) عدد مثبتی مانند c وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in X$، $\|Tx\| \leq c\|x\|$.

حال اگر $B(X,Y)$ را مجموعه همه نگاشت های خطی پیوسته از X به توی Y تعریف کنیم، بنابر مطالب بالا، برای $T \in B(X,Y)$، نرم T به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\|T\| = sup \{ \|Tx\| \quad | \quad \|x\| \leq ۱ \} < \infty$$

اگر به جای Y، میدان F را قرار دهیم، آنگاه $B(X,F)$، گردایه همه تابعک‌های خطی پیوسته است که آن را با X^* یا X' نمایش می‌دهیم و فضای دوگان X می‌نامیم. فضای دوگان $(n+۱)$ ام نیز که با $X^{(n+۱)}$ نمایش داده می‌شود، به استقرا تعریف می‌شود. داریم، $X^{(۰)} = X$ و $X^{(n+۱)} = (X^n)^*$.

$B(X,Y)$ با نرم تعریف شده در بالا یک فضای نرم‌دار تشکیل می‌دهد. در این صورت $B(X,Y)$ باناخ است اگر وفقط اگر Y باناخ باشد. به ویژه، $X^{(n)}$، به ازای هر $n \geq ۱$، باناخ است.

قرارداد: فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. برای $x^* \in X^*$ و $x \in X$، $x^*(x)$ را با نماد $< x, x^* >$ نیز نمایش می‌دهیم.

۱.۱.۶ تعریف: اگر X یک فضای برداری توپولوژی باشد. آنگاه توپولوژی ضعیف W_k یا $\delta(X, X^*)$ توپولوژی روی X است، که به وسیله آن خانواده نیم‌نرم‌های $\{P_{x^*} \quad | \quad x^* \in X^*\}$،

پیوسته‌اند. که در آن،

$$P_{x^*}(x) = | < x, x^* > |.$$

به عبارت دیگر تور $\{x_i\}$ به $x_\circ$ میل می‌کند اگر و فقط اگر به ازای هر $x^* \in X^*$،

$$\lim_i < x_i, x^* > = < x_\circ, x^* > .$$

توپولوژی ضعیف ستاره که با نماد W_k^* یا $\delta(X^*, X)$ نمایش داده می‌شود، یک توپولوژی روی X^* است، که به وسیله آن خانواده نیم‌نرم‌های $\{P_x \mid x \in X\}$، پیوسته‌اند. که در آن،

$$P_x(x^*) = | < x, x^* > | .$$

یعنی اگر تور $\{x_i^*\}$ در X^* به $x_\circ^* \in X^*$ میل کند آنگاه به ازای هر $x \in X$،

$$\lim_i < x, x_i^* > = < x, x_\circ^* > .$$

۷.۱.۱ تعریف: فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژی با توپولوژی τ باشد. در این صورت، X موضعاً کراندار است اگر صفر یک همسایگی کراندار داشته باشد. X یک F—فضاست اگر توپولوژی τ آن به وسیله یک متر پایای تام مانند d القا شده باشد. یادآوری می‌کنیم، یک متریک پایا متریکی مانند d است که به ازای هر $x, y, z \in X$،

$$d(x+z, y+z) = d(x, y).$$

۸.۱.۱ تعریف: فرض کنیم X و Y دو فضای برداری و $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی باشد. نماد Y^* را برای مجموعه تابعکهای خطی روی Y اختیار می‌کنیم. فرض کنید $y^* \in Y^*$، در این صورت تابع $y^* oT : X \longrightarrow F$ به X^* تعلق دارد. با این روش تابع T^* را به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$T^* : Y^* \longrightarrow X^*$$

$$< x, T^*(y^*) >=< T(x), y^* >$$

T^* را نگاشت الحاقی T می نامیم.

می‌گوییم نگاشت خطی $T : X \longrightarrow Y$ فشرده است اگر بستار $T(Ball(X))$ در Y فشرده باشد. که در آن،

$$Ball(X) = \{x \in X \ \ | \ \ \|x\| \leq ۱\}.$$

و نگاشت خطی را ضعیفاً فشرده می‌نامیم هرگاه $T(Ball(X))$ در Y ضعیفاً فشرده باشد. یعنی با توپولوژی ضعیف روی Y فشرده باشد. $W(X)$ را مجموعه همه عملگرهای ضعیفاً فشرده از X به توی X تعریف می‌کنیم.

۹.۱.۱ تعریف: یک فضای برداری جزئاً مرتب X یک فضای برداری حقیقی است که یک رابطه ترتیب $\leq$ دارد که به ازای هر $x, y, z \in X$، در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱) اگر $x \leq y$ آنگاه $x + z \leq y + z$،

۲) اگر $x \leq y$ به ازای هر عدد حقیقی مثبت α، $\alpha x \leq \alpha y$.

یک فضای برداری جزئاً مرتب X یک مشبکه برداری نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x, y \in X$، $sup\{x, y\}$ و $inf\{x, y\}$ وجود داشته باشد.

۲.۱ آنالیز هارمونیک

۱.۲.۱ تعریف: الف) گردایه $\mathcal{M}$ از زیر مجموعه‌های مجموعه X را یک $\sigma-$جبر در X نامیم، اگر $\mathcal{M}$ دارای خواص زیر باشد؛

۱$-$ $X \in \mathcal{M}$.

۲− اگر $A \in \mathcal{M}$، آنگاه $A^c \in \mathcal{M}$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است.

۳− اگر $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای هر n، $A_n \in \mathcal{M}$، آنگاه $A \in \mathcal{M}$.

ب) یک اندازه مثبت تابعی است مانند μ که بر یک σ−جبر مانند $\mathcal{M}$ تعریف شده است، و به توی بازه $[0, \infty]$ است و جمعی شمارش‌پذیر می‌باشد؛ یعنی؛ اگر، $\{A_i\}$ گردایه‌ای شمارش‌پذیر از مجموعه‌های دو به دو از هم جدا از اعضای $\mathcal{M}$ باشد، آنگاه،

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \mu\{A_i\}$$

پ) اگر $\mathcal{M}$ یک σ−جبر در X باشد، آنگاه X یک فضای اندازه‌پذیراست و اعضای $\mathcal{M}$ مجموعه‌های اندازه‌پذیری در X نسبت به اندازه μ هستند.

ت) هر اندازه مختلط یک تابع جمعی شمارش‌پذیر مختلط بریک σ−جبر می‌باشد. مجموعه اندازه‌های مختلط روی فضای توپولوژی X را با $M(X)$ نمایش می‌دهیم.

ث) اگر X یک فضای توپولوژی باشد. کوچکترین σ−جبر شامل مجموعه‌های باز وجود دارد، که اعضای آن را مجموعه بورل می‌نامند. اندازه μ که بر σ−جبر تمام مجموعه‌های بورل در فضای هاسدورف به طور موضعی فشرده X تعریف شده است، یک اندازه بورل نام دارد. اگر μ مثبت باشد، مجموعه بورل $E \subset X$ را به ترتیب منظم خارجی یا منظم داخلی گوییم، در صورتی که، به ازای هر $E \in \mathcal{M}$،

$$\mu(E) = inf\{ \ \mu(U) \ | \ E \subset U \quad \text{و باز است} \quad U \ \}$$

و به ازای هر مجموعه باز U و $U \in \mathcal{M}$ به طوری که $\mu(U) < \infty$،

$$\mu(U) = sup\{ \ \mu(K) \ | \ K \subset U \quad \text{و فشرده است} \quad K \ \}$$

اگر هر مجموعه بورل در X هم منظم خارجی و هم منظم داخلی باشد، آنگاه μ−منظم نام دارد.

ح) فرض کنیم $\mathcal{M}$ یک σ−جبر روی X و μ یک اندازه مثبت باشد. تابع $f : X \longrightarrow F$ را اندازه‌پذیر می‌گوییم هرگاه برای هر مجموعه باز U در F ، $f^{-1}(U)$ در X مجموعه‌ای

اندازه‌پذیر باشد. فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف باشد. $C_\circ(X)$ عبارت است از مجموعه توابع پیوسته $f : X \longrightarrow F$ به طوری که به ازای هر $\varepsilon > \circ$ یک مجموعه فشرده K موجود باشد که به ازای هر $x \in K^c = X - K$ داشته باشیم.

$$|f(x)| \leq \varepsilon$$

همچنین $C_{\circ\circ}(X)$ را مجموعه توابع پیوسته $f : X \longrightarrow F$ در نظر می‌گیریم به طوری که یک مجموعه فشرده K موجود باشد. که به ازای هر $x \in K^c = X - K$ داشته باشیم $f(x) = \circ$.

$C_\circ(X)$ با نرم زیر تشکیل یک فضای باناخ می دهد.

$$\|f\|_u = sup\ \{\ |f(x)|\ \ |\ \ x \in X\ \}$$

فرض کنیم μ یک اندازه مثبت روی فضای X باشد و $۱ \leq p < \infty$. فضای $L^p(X,\mu)$ را چنین تعریف می‌کنیم؛

$$L^p(X,\mu) = \{\ f\ \ |\ \ \|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{۱/p} < \infty \text{ و } f \text{ اندازه پذیراست } \}$$

$$L^\infty(X,\mu) = \{\ f\ \ |\ \ \|f\|_\infty = essup(|f|) < \infty \text{ و } f \text{ اندازه پذیراست } \}$$

که در آن اگر $f \geq \circ$ آنگاه،

$$essup(f) = inf\{\ M\ \ |\ \ \mu(\{\ x\ \ |\ \ f(x) > M\ \}) = \circ\ \}.$$

می‌گوییم μ، σ—متناهی است هرگاه X اجتماع شمارایی از مجموعه‌های با اندازه متناهی باشد.

۲.۲.۱ قضیه: فرض کنیم μ یک اندازه σ—متناهی روی X باشد و $۱ \leq p < \infty$ در این صورت، $L^p(X,\mu)$ با نرم بالا تشکیل یک فضای باناخ می‌دهد و

$$L^p(X,\mu)^* = L^q(X,\mu).$$

که در آن اگر $p > ۱$ آنگاه $۱/p + ۱/q = ۱$؛ اگر $p = ۱$ آنگاه $q = \infty$ [۱].

۳.۱ جبر باناخ

۱.۳.۱ تعریف: الف) جبر مختلط یک فضای برداری، مانند A است که روی میدان اعداد مختلط تعریف می‌شود و دارای یک عمل ضرب است که شرکت‌پذیر و توزیع‌پذیر، نسبت به عمل جمع فضای برداری است و ضرب اسکالر در هر عضو جبر A واجد خاصیت جابه‌جایی است. علاوه بر این A یک فضای باناخ است اگر به ازای هر $x, y \in A$، نامساوی ضربی زیر برقرار باشد.

$$\|xy\| \leq \|x\| \ \ \|y\|.$$

جبر باناخ A یکدار است در صورتی که عضوی مانند e موجود باشد به طوری که، $\|e\| = ۱$ و به ازای هر $x \in A$، $xe = ex = x$.

ب) فرض کنید A یک جبر باشد و T و S زیر مجموعه های ناتهی A باشند. در این صورت، $S.T$به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$S.T = \{ab \ \ | \ \ a \in S, b \in T\}.$$

همچنین مجموعه همه ترکیبات خطی $S.T$ را که با نماد ST نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$ST = lin(S.T) = \{ \ \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i a_i b_i \ \ | \ \ \alpha_i \in F \ , \ a_i \in S \ , \ b_i \in T \ , \ ۱ \leq i \leq n \ , \ n \in N \ \ \}$$

به سادگی ثابت می شود $a.A = aA$ که در آن $aA = \{a\}A$ ولی $A.a.A \neq AaA$ زیرا ممکن است تساوی زیر برقرار نباشد.

$$a_۱ab_۱ + a_۲ab_۲ = cad.$$

پ) فرض کنید که S زیر مجموعه ناتهی جبر A باشد و $n \in N$. در این صورت،

$$S^{[n]} = \{ \ \ a_۱a_۲ \ldots a_n \ \ | \ \ a_i \in S \ , \ ۱ \leq i \leq n \ \ \} \ .$$

همچنین، فرض کنید A یک جبر باشد.دراین صورت،

$$S^n = linS^{[n]} = \{ \ \sum \alpha_i a_1 \cdots a_n \ | \ a_i \in A \ , \ 1 \leq i \leq n \ \}$$

همچنین،

$$S^{(n)} = \{ \ (a_1, a_2, \dots, a_n) \ | \ a_i \in S \ , \ 1 \leq i \leq n \ \}$$

۲.۳.۱ تعریف: فرض کنید که E یک فضای باناخ یکدار باشد و $p \in [1, \infty)$ در این صورت $\ell^p(E)$ با ضابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\ell^p(E) = \{ \ (x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E \ \ | \ \ \| (x_n) \| = (\ \sum \| x_n \|^p \ )^{1/p} < \infty \ \}$$

فرض کنیم N مجموعه اعداد طبیعی باشد. $\ell^p(N)$ را به اختصار با ℓ^P نمایش می‌دهیم. فضای ℓ^p را، که در آن، $1 \leq p < \infty$ در نظر می‌گیریم. پایه استانده را با (e_n) نمایش می‌دهیم، که در آن e_n، دنباله‌ای است که همه جملات آن به جز مؤلفه n ام صفر هستند و مؤلفه n ام آن یک است. به عبارت دیگر $e_n = (\delta_{nm})_{m=1}^{\infty}$ که در آن δ_{mn} همان دلتای کرونکر[1] است. حال اگر $x \in \ell^p$ آنگاه،

$$x = (x_1, x_2, \dots) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = \lim_{n \to \infty} (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)$$

عنصر a از جبر A رایک عامل خوانیم، در صورتی که $a \in A^{[2]}$ و جبر A را عامل خوانیم در صورتی که $A = A^2 = linA^{[2]}$.

۳.۳.۱ تعریف: الف) فرض کنیم A یک جبر باشد. زیر فضای خطی I از A یک ایده‌ال چپ است اگر $A.I \subset I$ و یک ایده‌ال راست است اگر $I.A \subset I$ ویک ایده‌ال است اگر $A.I + I.A \subset I$.

[1] kronecker delta

ب) فرض کنیم A یک جبر یکدار روی میدان F باشد یک A —مدول چپ یک فضای خطی E روی F همراه با نگاشت دوخطی زیر است.

$$A \times E \longrightarrow E$$

$$(a, x) \mapsto a.x$$

به طوری که به ازای هر $x \in E$ و $a, b \in A$، $a.(b.x) = ab.x$. یک A—مدول راست هم یک فضای خطی E روی F همراه با نگاشت دوخطی زیر است.

$$A \times E \longrightarrow E$$

$$(a, x) \mapsto x.a$$

به طوری که به ازای هر $x \in E$ و $a, b \in A$ داریم، $(x.a).b = x.ab$.

یک A—دو مدول یک فضای خطی E است که هم A—مدول چپ و هم A—مدول راست باشد و بعلاوه به ازای هر $x \in E$ و $a, b \in A$ در شرط زیر نیز صدق کند.

$$a.(x.b) = (a.x).b$$

به وضوح فضای خطی F یک F—دومدول است. فضای $\{0\}$ یک A—دومدول است که با ۰ نشان داده می‌شود.

برای مثال، یک جبر A خودش یک A—دومدول است. با در نظر گرفتن نگاشت‌های داده شده به وسیله حاصل ضرب در A، هر ایده‌ال چپ در A یک A—مدول چپ است. اگر A یک زیر جبر از جبر B باشد. آنگاه، B با در نظر گرفتن حاصل ضرب در B یک A—دومدول است.

اگر A یک جبر جابه‌جایی باشد و E یک A—دو مدول باشد به طوری که $a.x = x.a$ آنگاه E یک A—مدول است.

پ) فرض کنیم A یک جبر باشد و E و F، A—مدول‌های چپ (راست) باشند. نگاشت $T \in L(E, F)$ یک A—مدول همومورفیسم چپ (راست) است. در صورتی که به ازای هر

$x \in E$ و $a \in A$،

$$T(a.x) = a.T(x) \qquad (T(x.a) = T(x).a)$$

فرض کنیم E و F، A—دومدول باشند. فرض کنیم $L(E,F)$ فضای همه نگاشت‌های خطی از E به توی F باشد. نگاشت $T \in L(E,F)$، A—دومدول همومورفیسم است اگر هم A—مدول همومورفیسم چپ و هم A—مدول همومورفیسم راست باشد.

فضاهای خطی چپ و راست A—مدول و A—دومدول همومورفیسم را به ترتیب با نمادهای $_AL(E,F)$، $L_A(E,F)$ و $_AL_A(E,F)$ نشان می‌دهند. همچنین $_AL(E,E)$ را با نماد $_AL(E)$ نمایش می‌دهند. توجه کنید که $_AL_A(E)$ یک زیر جبر یکدار از $L(E)$ است.

ت) فرض کنیم A یک جبر باشد و E یک A—مدول چپ (راست) باشد. پوچساز یک زیر مجموعه S از E عبارت است از؛

$$S^{\perp} = \{ a \in A \quad | \quad a \,.\, s = ۰ \quad ,s \in S \text{ برای هر } \}$$

$$S^{\top} = \{ a \in A \quad | \quad s \,.\, a = ۰ \quad ,s \in S \text{ برای هر } \}$$

۴.۳.۱ قضیه: اگر $۱ \leq p < q < \infty$ آنگاه $\ell^p \subseteq \ell^q$، بعلاوه، این جزئیت سره است.

برهان: اثبات این قضیه در مرجع [۱] آمده است. در اینجا تنها اثبات سره بودن جزئیت را می آوریم.

فرض کنیم $x_n = \frac{۱}{\sqrt[p]{n}}$. در این صورت، اگر $x = (x_n)$ آنگاه،

$$\|x\|_p = (\sum_{n=۱}^{\infty} (\frac{۱}{\sqrt[p]{n}})^p)^{۱/p} = (\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n})^{۱/p} = \infty$$

در نتیجه $x \notin \ell^p$ ولی

$$\|x\|_q = (\sum_{n=۱}^{\infty} (\frac{۱}{\sqrt[p]{n}})^q)\,۱/q = (\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{q/p}})^{۱/q} < \infty$$

بنابراین، $x \in \ell^q$. $\square$

۵.۳.۱ لم: اگر $0 < q < p$ آنگاه ℓ^q ایده‌الی در ℓ^p است و ℓ^p یک فضای باناخ موضعاً کراندار است.

برهان: $(\alpha_n) \in \ell^p$ اگر و فقط اگر $|\alpha_n|^p \in \ell^1$ در نتیجه از نامساوی کوشی شوارتز نتیجه می‌شود؛ اگر $x = (\alpha_n) \in \ell^p$ و $y = (\beta_n) \in \ell^p$ آنگاه $(\alpha_n\ \beta_n) \in \ell^{p/2}$ زیرا

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n\beta_n|^{p/2} &= \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^{p/2}|\beta_n|^{p/2}\\ &\leq (\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p)^{1/2}(\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^p)^{1/2}\\ &= \|x\|_p^{p/2}\ \|y\|_p^{p/2} < \infty\end{aligned}$$

همچنین، اگر $(\alpha_n) \in \ell^{p/2}$ آنگاه دنباله‌های (β_n) و (γ_n) وجود دارند به طوری که $(\alpha_n) = (\beta_n)(\gamma_n)$. کافی است به ازای هر $n \in N$،

$$|\beta_n| = |\gamma_n| = |\alpha_n|^{1/2}.$$

همچنین $(\alpha_n) \in (\ell^p)^{[2]}$ بنابراین داریم،

$$(\ell^p)^{[2]} = (\ell^p)^2 = \ell^{p/2}.$$

و همچنین طبق قضیه ۴.۳.۱ اگر $0 < p < q$ آنگاه $\ell^q \subset \ell^p$ است. پس $\ell^{p/2} \subset \ell^p$. و لذا $\ell^p.\ell^q \subset \ell^p$ پس ℓ^q ایده‌الی در ℓ^p است. □