بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

حل عددی معادله‌های تحولی غیرخطی براساس طرح‌های نیمه-لاگرانژی

سخنران: الهام فیض‌اللهی

زمان: سه‌شنبه ۲/ ۱۰/ ۹۱ ساعت ۹ صبح

مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱- دکتر رضا مختاری

۲- دکتر مهدی تاتاری

۳- دکتر داوود میرزایی

۴- دکتر حمیدرضا مرزبان

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا طرح‌های نیمه-لاگرانژی و معادله تغییریافته برای حل معادله تحولی غیرخطی برگرز بررسی شده و آنالیز خطای این معادله را ارزیابی می‌کنیم. سپس این روش را روی برخی معادله‌های تحولی غیرخطی دیگر از جمله معادله دو بعدی برگرز و معادله‌های KdV و mKdV مورد بررسی قرار می‌دهیم و در پایان هر بخش یک مجموعه نتایج عددی را برای بررسی دقت و کارایی این روش ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: معادله تغییریافته؛ روش‌های نیمه-لاگرانژی؛ معادله برگرز

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

حل عددی معادله‌های تحولی غیرخطی براساس طرح‌های نیمه-لاگرانژی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

الهام فیض اللهی

استاد راهنما
دکتر رضا مختاری

دی ۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی خانم الهام فیض‌اللهی
تحت عنوان

حل عددی معادله‌های تحولی غیرخطی براساس طرح‌های نیمه-لاگرانژی

در تاریخ ۲ /۱۰/ ۹۱ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱- استاد راهنما	دکتر رضا مختاری
۲- استاد مشاور	دکتر مهدی تاتاری
۳- استاد داور۱	دکتر داوود میرزایی
۴- استاد داور۲	دکتر حمیدرضا مرزبان

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس پروردگاری را سزاست که نعمتش فراوان است و رحمتش بی کران. بخشنده بی منت و کارگشای با حکمت

ستایش پروردگاری راکه زبانم قاصر است از ثنای او و وجودم ناتوان بر شکر گزاریش. حمد و سپاس به خاطر زیباترین نعمت دو عالم ، پدر و مادر عزیزم که عشق خدا در وجودشان تجلی یافته و همه هستی شان را فدایم کردند. با من ماندند تا یاورم باشند و همراهم شدند تا امید بخشم باشند. در تاریکی ها چراغ راهم شدند و در لحظه های تنهایی بهترین دوست و همنفسم . و امروز از صمیم دلم به پاس همه مهر و محبتشان، عشق و از خودگذشتگی شان و به پاس لحظه لحظه هایی که جلوه حقیقی زندگی ام شدند عاشقانه بر دستان پر محبتشان بوسه میزنم.

صمیمانه ترین و خالصانه ترین سپاسم تقدیم به استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر رضا مختاری که شاگردی در محضرشان افتخار بزرگ زندگیم بوده و هست. همچنین از استاد مشاور عالی قدرم جناب آقای دکتر مهدی تاتاری که مرا در این پایان نامه راهنمایی و همراهی کردند تشکر می کنم . مراتب سپاس خود را از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر داوود میرزایی و جناب آقای دکتر حمیدرضا مرزبان که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را متقبل شدند اعلام میدارم .

در پایان قدردان همه دوستان عزیزم که زیباترین لحظه ها را در کنارشان سپری کردم هستم .

۱۳۹۱

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا طرح‌های نیمه-لاگرانژی و معادله تغییریافته برای حل معادله تحولی غیرخطی برگرز بررسی شده و آنالیز خطای این معادله را ارزیابی می‌کنیم. سپس این روش را روی برخی معادله‌های تحولی غیرخطی دیگر از جمله معادله دو بعدی برگرز و معادله‌های KdV و mKdV مورد بررسی قرار می‌دهیم و در پایان هر بخش یک مجموعه نتایج عددی را برای بررسی دقت و کارایی این روش ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: معادله تغییریافته؛ روش‌های نیمه-لاگرانژی؛ معادله برگرز

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ پیشگفتار

به تازگی، چند طرح تفاضل متناهی نیمه-لاگرانژی به کمک یک الگوریتم براساس ترفند معادله تغییریافته به دست آمده است و از آن‌ها برای حل برخی معادله‌های تحولی غیرخطی مانند معادله برگرز استفاده شده است [۳۶]. دقت این روند نه تنها به خطای برش کلی که به کمک آنالیز معادله تغییریافته به دست می‌آید وابسته است بلکه به طور غیریکنوایی به اندازه گام زمانی نیز بستگی دارد.

معادله تغییریافته به طور نه چندان دقیق توسط دالی معرفی شد و به دنبال آن نه و پوتر، یاننکو و شاکین و همچنین هیرت فعالیت‌هایی در این زمینه انجام دادند. این ترفند عددی توسط مؤلفین بسیاری مورد مطالعه قرار گرفته است [۴، ۱۹، ۳۲، ۳۳]، اما در اصل توسط هیت و وارمینگ [۱۷، ۳۴] به عنوان ابزاری برای پایداری و دقت روش‌های تفاضل متناهی برای معادله‌های با مشتق‌های پاره‌ای تحولی خطی مانند معادله‌های سهموی و هذلولوی معرفی شد ه‌است [۲۱].

علت استفاده از معادله تغییریافته آن است که این ترفند در بهبود روش‌های تفاضل متناهی در راستای برخورداری از ویژگی‌های مطلوبی مانند دقت بالا و پراکندگی/پراکنش کم، مؤثر است [۱]. یک ویژگی منحصربه‌فرد معادله‌های تغییریافته آن است که تنها مشتق‌های مکانی در جمله باقیمانده ظاهر می‌شوند و سپس طی یک روند تقارنی می‌توان مشتق‌های زمانی را حذف کرد [۳۴].

از طرف دیگر ایده اصلی در طرح‌های نیمه-لاگرانژی، ترکیب ویژگی‌های مناسب در طرح‌های اویلری و طرح‌های لاگرانژی است. در طرح‌های اویلری یک بیننده جهان اطراف خود را در یک نقطه‌ی جغرافیایی

استنتاج می‌کند. در واقع در این طرح‌ها سرعت جریان در یک زمان خاص اندازه‌گیری می‌شود. به عبارتی طرح‌هایی که جریان را از یک دیدگاه اویلری مورد بررسی قرار می‌دهند ،می‌توانند از یک شبکه ثابت استفاده کنند که در آن هر نقطه شبکه به مقدارهایی برای متغیرهای مشخص، وابسته است. سرعت جریان در این طرح‌ها را با نماد $v(x,t)$ نمایش می‌دهند. این طرح‌ها ناپایدار بوده و برای گام‌های زمانی بزرگ با دقت پایین عمل می‌کنند. اما در طرح‌های لاگرانژی یک بیننده جهان اطراف خود را در حالی که با یک ذره متحرک در حال حرکت است، استنتاج می‌کند. به این معنی که ذره‌های سیال در طول زمان دنبال می‌شوند و در یک چارچوب بازگشتی با جریان حرکت می‌کنند. طرح‌های لاگرانژی برای گام‌های زمانی بزرگ‌تری نسبت به طرح‌های اویلری پاسخگو هستند، اما مشکل این طرح‌ها این است که آن‌ها از یک مجموعه ذره‌های مکانی در یک شبکه منظم، یک مجموعه ذره‌های مکانی نامنظم تولید می‌کنند و ممکن است ویژگی‌های مهم جریان به خوبی حفظ نشوند. جریان در این طرح‌ها را با نماد $X(a,t)$ نمایش می‌دهند که a در این نماد نشان دهنده ذره مشخصی است که در طول زمان در حال حرکت است. این دو طرح به کمک رابطه

$$V(X(a,t),t) = \frac{\partial X(a,t)}{\partial t}$$

که همان رابطه سرعت است با هم در ارتباط هستند. به این ترتیب در طرح‌های نیمه-لاگرانژی مانند طرح‌های اویلری از یک شبکه ثابت استفاده شده در حالی که پایداری برای گام‌های زمانی بزرگ را با توجه به طرح‌های لاگرانژی دارا است.

طرح نیمه-لاگرانژی ابتدا در سال (۱۹۵۲) توسط فیورتف معرفی شد و به دنبال او وین-نیلسن (۱۹۵۹)، کریشنامورتی (۱۹۶۲)، سایر (۱۹۶۳) و پورنل (۱۹۷۶) کار در این زمینه را ادامه دادند [۳۰]. آنچه که پورنل درباره‌ی طرح‌های نیمه-لاگرانژی معرفی کرد، بیشترین شباهت را به طرح‌های لاگرانژی که در زمان حاضر استفاده می‌شود، دارد. با این تفاوت که طرح‌های او تنها برای عدد کورانت ($C = |U|\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$) کوچک‌تر از یک معتبر هستند.

یکی از کاربردهای مهم روش‌های لاگرانژی و به دنبال آن روش‌های نیمه لاگرانژی بررسی وضعیت آب و هوا است. دقت و زمان در پیش‌بینی وضع هوا برای اقتصاد و امنیت عمومی بسیار مهم و حساس است. در زمان حاضر پیش‌بینی وضع هوا به طور اساسی به پیش‌گویی عددی آب‌وهوا (NWP) وابسته است. یک زنجیره از رایانه‌های پرقدرت با مجموعه‌ای از اطلاعات آب‌وهوایی شروع به کار کرده و وضعیت آب‌وهوا را در بهترین شکل ممکن ترسیم می‌کنند و به رایانه‌های مرکزی انتقال می‌دهند. سپس پردازنده مرکزی داده‌ها را تخمین زده و وضعیت آب‌وهوا را در آینده پیش‌بینی می‌کنند. دقت پیش‌بینی‌ها با توجه به افزایش تفکیک‌پذیری و محدودیت زمانی، تنها با موثرترین روش‌های عددی روی پرقدرت‌ترین رایانه‌ها با مناسب‌ترین ترفندهای

عددی امکان‌پذیر است.

در طرح‌های نیمه-لاگرانژی به کمک روش مشخصه‌ها و امتداد آن‌ها از یک سطح زمانی به سطح زمانی قبلی، یک مجموعه از نقطه‌های بیرون از شبکه به دست می‌آیند که با درونیابی در این نقطه‌ها طرح‌های نیمه-لاگرانژی شکل می‌گیرند. هر نوعی از درونیابی می‌تواند برای ارزیابی در این نقطه‌های بیرونی استفاده شود. اما در عمل انتخاب درونیاب اثر مهمی روی دقت و کارایی روش دارد. به عنوان مثال در سال (۱۹۹۰) بیتز نشان داد که یک درونیابی خطی کافی است تا طرح‌های نیمه-لاگرانژی یک دقت مورد قبول داشته باشند. همچنین در مطالعه‌های اخیر، درونیابی درجه دو همواره از اعتبار کافی برخوردار بوده است. در حالی که پورل نشان داد که درونیاب درجه سه یک رابطه خوب بین دقت و هزینه محاسبات ایجاد می‌کند [۳۰].

قابل توجه است که روش‌های عددی مختلفی را می‌توان با طرح‌های نیمه-لاگرانژی همراه کرد. به عنوان مثال روش مشخصه‌های گالرکین یا روش ذره در سلول برمجو در سال (۱۹۹۹)، همچنین روش معادله تغییریافته توسط ونگ و لی‌تون (۲۰۱۰) با طرح‌های نیمه-لاگرانژی ادغام شده‌اند و نتایج قابل توجهی دربرداشته‌اند. از لحاظ پایداری و دقت، طرح‌های نیمه-لاگرانژی و روش‌های عددی که از آن‌ها استفاده می‌کنند به خوبی توانایی رقابت با سایر روش‌های عددی را دارند و در بسیاری موارد دارای مرتبه همگرایی بالایی هستند.

هدف از این پایان‌نامه بیان و بررسی طرح‌های نیمه-لاگرانژی و همچنین روش معادله تغییریافته در حل عددی معادله‌های با مشتق‌های پاره‌ای تحولی است. در ادامه ساختار پایان‌نامه به شرح زیر است.

در فصل اول یک مجموعه از پیشنیازهای لازم مانند معادله تغییریافته، درونیابی بی-اسپلاین و توضیح مختصری از روند مشخصه‌ها و روش LOD برای درک بهتر مفاهیم اصلی پایان‌نامه آورده شده است.

در فصل دوم ابتدا طرح‌های نیمه-لاگرانژی روی معادله غیرخطی برگرز توضیح داده شده و سپس به کمک معادله تغییریافته، خطا برای طرح‌های نیمه-لاگرانژی، بررسی می‌شود.

در فصل سوم طرح‌های نیمه-لاگرانژی روی معادله غیرخطی دو بعدی برگرز پیاده‌سازی شده و سپس به کمک معادله تغییریافته حل عددی این معادله دنبال می‌شود.

در پایان، فصل چهارم به حل عددی معادله‌های تحولی Kdv و mKdv به کمک طرح‌های نیمه-لاگرانژی اختصاص داده شده است.

۲.۱ معادله تغییر یافته

معادله تغییریافته در بررسی پایداری و دقت تقریب‌های تفاضلی متناهی برای معادله‌های با مشتق‌های پاره‌ای خطی و ساده استفاده می‌شود. این روش ویژگی‌های مختلف یک طرح تفاضلی مانند دقت، سازگاری، پایداری و پراکندگی و آشفتگی را بررسی می‌کند [۳۳].
برای به‌دست آوردن معادله تغییریافته از یک معادله خطی، ابتدا معادله تفاضل متناهی متناظر با آن را در نظر گرفته و هر جمله آن را در یک سری تیلور بسط می‌دهیم، سپس مشتق‌های زمانی بالاتر از مرتبه اول را حذف کرده و بنابر آنچه توضیح می‌دهیم معادله تغییریافته را تولید می‌کنیم.
یک معادله با مشتق‌های پاره‌ای خطی به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = L\tilde{u} \tag{۱.۱}$$

که در آن t متغییر زمان و L یک چندجمله‌ای از مشتق‌های مکانی $\frac{\partial}{\partial x}$ است، به عبارتی

$$L = \sum c_m \frac{\partial^m}{\partial x^m}. \tag{۲.۱}$$

برای محاسبه یک جواب از معادله (۱.۱) با استفاده از روش تفاضل متناهی یک شبکه روی صفحه xt با نمو Δt و Δx به صورت $x = x_j = j\Delta x$ و $t = t_n = n\Delta t$ تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $u(x_j, t_n) = u_j^n$.
حال طرح تفاضلی متناظر با معادله (۱.۱) را در نظر گرفته، فرض می‌کنیم طرح تفاضلی مورد نظر به صورت زیر باشد

$$u_j^{n+۱} = \sum_{m\neq ۰} d_m u_{j+m}^{n+۱} + \sum_k c_k u_{j+k}^n \tag{۳.۱}$$

که در آن اندیس پایین برای مکان و اندیس بالا برای زمان در نظر گرفته شده است. این طرح در حالت کلی ضمنی است مگر اینکه برای هر m داشته باشیم $d_m = ۰$. حال با فرض اینکه تابع $u(x,t)$ به اندازه کافی هموار بوده و در نقطه‌های شبکه بر جواب دقیق معادله تفاضلی منطبق باشد، هر جمله از طرح تفاضلی (۳.۱) را حول نقطه (x_j, t_n) بسط می‌دهیم. پس از بسط دادن و جمع جمله‌های مشابه، معادله زیر به دست می‌آید

$$u_t + \gamma_{۱۱}u_x + \gamma_{۲۰}u_{tt} + \gamma_{۲۱}u_{tx} + \gamma_{۲۲}u_{xx} + \cdots + \gamma_{m۰}\frac{\partial^m u}{\partial t^m} + \cdots + \gamma_{mm}\frac{\partial^m u}{\partial x^m} + \cdots = ۰ \tag{۴.۱}$$

که در آن $\gamma_{i,j}$ها به صورت ترکیب خطی از d_m و c_kها هستند. باید توجه داشت که هرچند معادله تغییریافته می‌تواند تعداد جمله‌های نامتناهی را شامل شود اما در عمل چند جمله مرتبه پایین‌تر مورد نیاز است. در گام بعدی همه مشتق‌های زمانی ظاهر شده در عبارت (۴.۱) به جز u_t را حذف می‌کنیم. در روند حذف کردن مشتق‌های t توجه به این نکته الزامی است که چون معادله تغییریافته در واقع مبین معادله تفاضلی است و چون لزومی ندارد که جواب (۱.۱) در معادله تفاضلی صدق کند، معادله (۱.۱) نباید در حذف مشتق‌های زمانی نقش داشته باشد. همچنین برای جلوگیری از تکرار عملیات حذف، ترتیب حذف مشتق‌های زمانی باید به همان ترتیب که در معادله (۴.۱) آمده است پیش رود. یعنی ابتدا u_{tt} و سپس u_{tx} و به همین ترتیب پیش رفته تا تمام مشتق‌های زمانی بالاتر از مرتبه یک حذف شوند. در ادامه، برای درک بهتر روند حذف مشتق‌های زمانی، دو مثال آورده‌ایم.

مثال ۱.۲.۱

فرض کنیم معادله با مشتق‌های پاره‌ای به صورت زیر انتخاب شود

$$\tilde{u}_t + c\tilde{u}_x = 0 \qquad (۵.۱)$$

و طرح تفاضلی متناظر به آن را به عنوان مثال طرح لکس–وندروف مرتبه دوم [۲۵] در نظر می‌گیریم. دراین‌صورت

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{c\Delta t}{\Delta x}(\mu\delta)u_j^n - \frac{1}{2}(\frac{c\Delta t}{\Delta x})^2(\delta^2)u_j^n = 0 \qquad (۶.۱)$$

که در آن عملگرهای تفاضلی زیر به کار رفته است

$$\begin{aligned}(\mu\delta)u_j^n &= \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2},\\ (\delta^2)u_j^n &= u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n.\end{aligned} \qquad (۷.۱)$$

عملگرهای μ و δ به طور منحصربه‌فرد به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\mu u_j^n = (u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n)^2, \qquad \delta u_j^n = u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n.$$

حال هر جمله از طرح تفاضلی (۶.۱) را در یک سری تیلور حول (x_j, t_n) بسط می‌دهیم، که دراین‌صورت

داریم

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\Delta t}{۲}\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}+\frac{\Delta t^۲}{۶}\frac{\partial^۳ u}{\partial t^۳}+c\frac{\Delta x^۲}{۶}\frac{\partial^۳ u}{\partial x^۳}+\frac{\Delta t^۳}{۲۴}\frac{\partial^۴ u}{\partial t^۴}-\frac{c^۲\Delta t\Delta x^۲}{۲۴}\frac{\partial^۴ u}{\partial x^۴}+\cdots=۰. \quad (۸.۱)$$

روند حذف مشتق‌های زمانی با استفاده مکرر از معادله (۸.۱) انجام می‌شود، به این ترتیب که برای حذف جمله $\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}$ عملگر $-(\Delta t/۲)\partial/\partial t$ را در معادله (۸.۱) ضرب کرده و سپس نتیجه را به معادله (۸.۱) اضافه می‌کنیم. معادله نتیجه عبارت است از

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{c\Delta t}{۲}\frac{\partial^۲ u}{\partial t\partial x}-\frac{\Delta t^۲}{۴}\frac{\partial^۳ u}{\partial t^۳}+\frac{\Delta t^۲}{۶}\frac{\partial^۳ u}{\partial x^۳}+\cdots=۰. \quad (۹.۱)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود این معادله شامل جمله $-\frac{c\Delta t}{۲}\frac{\partial^۲ u}{\partial t\partial x}$ است و برای حذف این جمله عملگر $\frac{c\Delta t}{۲}\frac{\partial}{\partial x}$ را در معادله (۸.۱) ضرب کرده و نتیجه را به معادله (۹.۱) اضافه کرده این روند را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. این روند را می‌توان در جدول ۱.۱ سازمان‌دهی کرد.
توجه داشته باشیم که سطر اول این جدول مشتق‌های u نسبت به t و x را تا مرتبه چهارم نشان می‌دهد، سطر دوم ضریب‌های مشتق‌های سطر اول را در معادله (۸.۱) و سایر سطرها به جز سطر آخر ضریب‌های مشتق‌های سطر اول را پس اینکه عملگر معرفی شده در ستون اول روی معادله (۸.۱) اثر کرد، نشان می‌دهد. این جدول تا زمانی که مشتق‌های زمانی حذف شوند، ادامه دارد تا اینکه در سطر آخر همان‌طور که مشاهده می‌شود ضریب‌های تمام مشتق‌های زمانی به جز u_t صفر شده است. حال ضریب‌های غیرصفر در سطر آخر را در جمله مشتق مربوطه در سطر اول ضرب کرده و با هم جمع می‌کنیم.
بنابراین معادله تغییریافته برای معادله (۵.۱) عبارت است از

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-c}{۶}(\Delta x^۲-c^۲\Delta t^۲)\frac{\partial^۳ u}{\partial x^۳}-\frac{c^۲\Delta t}{۸}(\Delta x^۲-c^۲\Delta t^۲)\frac{\partial^۴ u}{\partial x^۴}+\cdots. \quad (۱۰.۱)$$

★

گرچه عملیات ریاضی قابل توجهی برای به دست آوردن معادله تغییریافته لازم است، اما این عملیات ساده و تکراری هستند. برای به دست آوردن معادله تغییریافته می‌توان از نرم‌افزارهایی مانند Mathematica و Maple که قابلیت کارهای نمادین دارند سود برد. به وضوح سمت راست معادله (۱۰.۱) تنها شامل مشتق‌های x است و این مهمترین مزیت معادله تغییریافته است [۳۳].

جدول ۱.۱: روند به دست آوردن معادله تغییریافته

مشتق‌های پاره‌ای	$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}$	$\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}$
ضریب‌های معادله (۸.۱)	1	c	$\frac{\Delta t}{2}$	0	$-\frac{c^2}{2}\Delta t$	$\frac{\Delta t^2}{6}$	0
$-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial t}$[معادله (۸.۱)]			$-\frac{\Delta t}{2}$	$-\frac{c}{2}\Delta t$	0	$-\frac{\Delta t^2}{4}$	0
$\frac{c}{2}\Delta t\frac{\partial}{\partial x}$[معادله (۸.۱)]				$\frac{c}{2}\Delta t$	$\frac{c^2}{2}\Delta t$	0	$\frac{c}{4}\Delta t^2$
$\frac{\Delta t^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$[معادله (۸.۱)]						$\frac{\Delta t^2}{12}$	$\frac{c}{12}\Delta t^2$
$-\frac{c}{3}\Delta t^2\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}$[معادله (۸.۱)]							$-\frac{c}{3}\Delta t^2$
$\frac{c^2}{12}\Delta t^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$[معادله (۸.۱)]							
$\frac{c}{12}\Delta t^3\frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x}$[معادله (۸.۱)]							
$-\frac{c}{12}\Delta t^3\frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2}$[معادله (۸.۱)]							
$\frac{c\Delta t}{12}(\Delta x^2 - c^2\Delta t^2)\frac{\partial^3}{\partial x^3}$[معادله (۸.۱)]							
...							
جمع ضریب‌های هر ستون	1	c	0	0	0	0	0

ادامه جدول (۱.۱)

$\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2}$	$\frac{\partial^3}{\partial x^3}$	$\frac{\partial^4}{\partial t^4}$	$\frac{\partial^4}{\partial t^3\partial x}$	$\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial x^2}$	$\frac{\partial^4}{\partial t\partial x^3}$	$\frac{\partial^4}{\partial x^4}$
0	$\frac{c}{6}\Delta x^2$	$\frac{\Delta t^3}{24}$	0	0	0	$-\frac{c^2}{24}\Delta t\Delta x^2$
$\frac{c^2}{4}\Delta t^2$	0	$-\frac{\Delta t^3}{12}$	0	0	$\frac{c}{12}\Delta t\Delta x^2$	0
0	$-\frac{c^3}{4}\Delta t^2$	0	$\frac{c}{12}\Delta t^3$	0	0	$\frac{c^2}{12}\Delta t\Delta x^2$
0	0	$\frac{\Delta t^3}{24}$	0	$-\frac{c^2}{24}\Delta t^3$	0	0
$-\frac{c^2}{3}\Delta t^2$	0	0	$-\frac{c}{6}\Delta t\Delta^3$	0	$\frac{c^3}{6}\Delta t^3$	0
$\frac{c^2}{12}\Delta t^2$	$\frac{c^3}{12}\Delta t^2$	0	0	$\frac{c^2}{24}\Delta t\Delta^3$	0	$-\frac{c^4}{24}\Delta t^3$
			$\frac{c}{12}\Delta t^3$	$\frac{c^2}{12}\Delta\Delta^3$	0	0
				$-\frac{c^2}{12}\Delta t^3$	$-\frac{c^3}{12}\Delta t^3$	0
					$\frac{c\Delta t}{12}(\Delta x^2 - c^2 - \Delta t^2)$	$\frac{c^2\Delta t}{12}(\Delta x^2 - c^2 - \Delta t^2)$
0	$\frac{c}{6}(\Delta x^2 - c^2 - \Delta t^2)$	0	0	0	0	$\frac{c^2\Delta t}{8}(\Delta x^2 - c^2 - \Delta t^2)$

مثال ۲.۲.۱

معادله گرما را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$u_t = bu_{xx} \tag{۱۱.۱}$$

که در آن b یک ثابت مثبت است. معادله (۱۱.۱) به کمک طرح پیشرو در زمان و مرکزی در مکان (FTCS) به صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = b\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

و از آنجا داریم

$$u_j^{n+1} = \frac{b\Delta t}{\Delta x^2}u_{j+1}^n + (1 - 2\frac{b\Delta t}{\Delta x^2})u_j^n + \frac{b\Delta t}{\Delta x^2}u_{j+1}^n. \tag{۱۲.۱}$$

حال هر یک از جمله‌های طرح تفاضلی (۱۲.۱) را حول (x_j, t_n) بسط داده، پس از مرتب‌سازی خواهیم داشت

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{6}\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{1}{24}\Delta t^3\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \frac{b}{12}\Delta x^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \cdots = 0. \tag{۱۳.۱}$$

بنابر آنچه بیان شد باید تمام مشتق‌های زمانی با مرتبه بالاتر از یک را حذف کنیم. به این منظور عملگر $-1/2\Delta t\frac{\partial}{\partial t}$ را روی طرح تفاضلی (۱۳.۱) اعمال کرده و نتیجه را به (۱۳.۱) اضافه می‌کنیم. بنابراین داریم

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{12}\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{b}{2}\Delta t\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2} - \frac{1}{24}\Delta t^3\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \frac{b}{12}\Delta x^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \cdots = 0. \tag{۱۴.۱}$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود عبارت (۱۴.۱) شامل جمله $-\frac{1}{12}\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}$ است. بنابراین عملگر $\frac{1}{12}\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}$ را در (۱۳.۱) ضرب کرده و نتیجه را به (۱۴.۱) اضافه کرده، در این صورت داریم

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{b}{2}\Delta t\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2} + \frac{b}{12}\Delta t^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2} - \frac{b}{12}\Delta x^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \cdots = 0. \tag{۱۵.۱}$$

عبارت (۱۵.۱) شامل $\frac{b}{2}\Delta t\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}$ است. پس برای حذف آن عملگر $-\frac{b}{2}\Delta t\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}$ را در (۱۳.۱) ضرب

کرده و نتیجه را به (۱۵.۱) اضافه می‌کنیم. با این روند در نهایت داریم

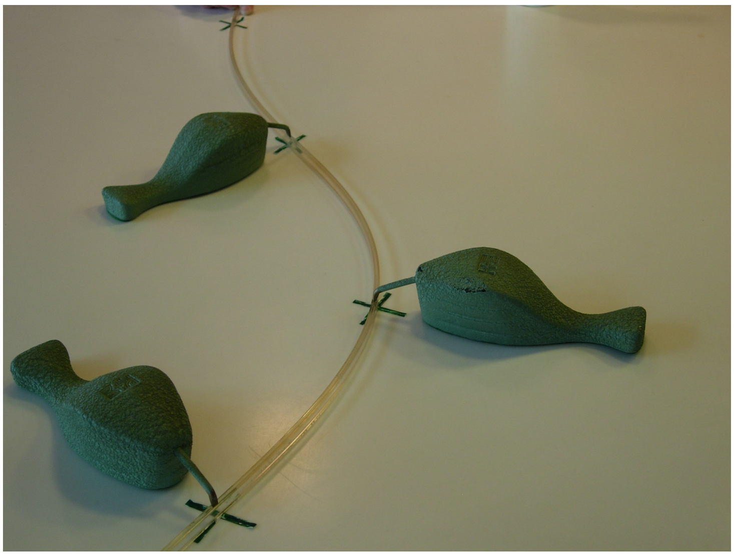
$$\frac{\partial u}{\partial t} - b\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} - \frac{b}{۱۲}(-۶b\Delta t + \Delta x^۲)\frac{\partial^۴ u}{\partial x^۴} + \cdots = ۰. \qquad (۱۶.۱)$$

(۱۶.۱) معادله تغییریافته معادله گرمای (۱۱.۱) بوده که به کمک (۱۲.۱) گسسته‌سازی شده است. ★

۳.۱ بی-اسپلاین‌ها

بر اساس مراجع [۵،۱۳،۲۴]، در اوایل قرن هجدهم، یکی از مسایلی که طراحان به خصوص در صنعت کشتی‌سازی، با آن مواجه بوده‌اند چگونگی رسم یک منحنی هموار به صورت دستی، از بین مجموعه‌ای از نقطه‌ها بود. یک راه حل ساده برای این مسئله به این صورت بوده است که وزنه‌های فلزی که داک نامیده می‌شدند، در محل مقادیر گره‌ای قرار داده، سپس نوار نازک و انعطاف‌پذیری را از بین داک‌ها عبور می‌دادند. منحنی به دست آمده بسیار هموار و از نظر زیبایی راضی‌کننده بود. این نوارهای نرم و انعطاف‌پذیر اسپلاین نامیده می‌شدند. شکل ۱.۱ را ببینید.

یک تابع اسپلاین از تکه-تکه چندجمله‌ای‌هایی بر روی زیربازه‌ها تشکیل می‌شود که با شرایط پیوستگی



شکل ۱.۱: داک‌ها و اسپلاین تولید شده به کمک نوارهای نازک و انعطاف‌پذیر

خاص به هم می‌پیوندند. به طور رسمی، فرض کنید $n+۱$ نقطه $t_۰, t_۱, \ldots, t_n$ مشخص شده باشند و در رابطه $t_۰ < t_۱ < \cdots < t_n$ صدق کنند. این نقطه‌ها، گره نامیده می‌شوند. همچنین فرض کنید یک عدد صحیح $k \geqslant ۰$ از قبل مشخص شده باشد. یک تابع اسپلاین از درجه k و دارای گره‌های $t_۰, t_۱, \ldots, t_n$ یک تابع S است به قسمی که