دانشگاه تربیت معلم سبزوار
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه ارائه شده به تحصیلات تکمیلی
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

روابطی چند روی نیم‌گروه‌های کاملاً منظم

استاد راهنما:

دکتر غلامرضا مقدسی

استاد مشاور:

دکتر علی‌اکبر استاجی

نگارش:

سعید رحیمی ژیان

مهر ماه ۱۳۸۹

تقدیم به

همسر مهربانم

تشکر و قدردانی

به نام آن آغاز می‌کنم که شیرین‌ترین عطاها در دل من رجای اوست و خوش‌ترین سخن‌ها بر زبان آدمی ثنای اوست و دوست‌ترین وقتها لقای اوست.

خداوند بزرگ را شاکرم که توانستم مرحله ای دیگر از مراتب علمی خود را پشت سر بگذارم و تلاشهایم برای گذر از این مرحله و ورود به مقطعی دیگر از زندگی، بی‌ثمر نماند. کسب این موفقیت و قدم گذاشتن در راهی نو به سوی کسب دانش فراتر را مدیون زحمات بی‌دریغ عزیزانی هستم که بر خود واجب می‌دانم از آنها تشکر کنم. در ابتدا از جناب آقای دکتر غلامرضا مقدسی که در تمام طول دوره از تجربه های ارزشمندشان بهره مند شدم و استاد راهنمای من در این رساله بودند و با راهنمایی های به جای خود من را در رسیدن به این موفقیت یاری کردند، کمال تشکر وقدردانی رامی‌نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر علی‌اکبر استاجی که در طول این دوره مرا در امر تحصیل و تحقیق یاری کردند و مشاوره این رساله را پذیرفتند تشکر می‌نمایم. باعث افتخار و مباهات این حقیر است که اساتید بزرگوار و ارجمند جناب آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی و سرکار خانم دکتر مژگان محمودی قبول زحمت فرموده و داوری این رساله را به عهده گرفتند و از ایشان کمال تشکر و قدردانی را دارم. همچنین از خانواده عزیزم، به خصوص پدر و مادر و همسرم که در تمامی مراحل زندگی راهنما و مشوق من بوده‌اند، به خاطر تمام فداکاری ها و زحماتشان، سپاسگزارم. امیدوارم به فضل و یاری ایزد متعال و حمایت اساتید گرامی و خانواده عزیزم بتوانم مراحل دیگری از زندگی خود را نیز با موفقیت پشت سر بگذارم.

پیشگفتار

در این پایان‌نامه دو رابطه هم ارزی $\mathcal{V}$ و ξ را روی نیم‌گروه‌های کاملاً منظم مورد بررسی قرار داده و ارتباط بین آن‌ها را مشخص می‌کنیم. نیم‌گروه‌های کاملاً منظم یکی از وسیع‌ترین رده‌های نیم‌گروه‌ها به شمار می‌آیند. اولین مقاله مهم در زمینه نیم‌گروه‌های کاملاً منظم توسط کلیفورد [۱] در سال ۱۹۴۱ تحت عنوان

Semigroup admitting relative inverse

به چاپ رسید. او در این مقاله یک اساس برای توصیف نیم‌گروه‌های کاملاً منظم مطرح کرد که چندین سال بعد تحت عنوان " نیم‌مشبکه‌هایی از نیم‌گروه‌های کاملاً ساده " پیکربندی شد. نام نیم‌گروه کاملاً منظم از کتاب لیاپین [۲] که در سال ۱۹۶۰ به چاپ رسید گرفته شده است. ایده اصلی این پایان‌نامه که روابط $\mathcal{V}$ و ξ روی نیم‌گروه‌های کاملاً منظم می‌باشد از مقاله

Some relations on completely regular semigroups

که توسط جیانگانگ ژانگ [۳] و ران شن [۴] در سال ۲۰۰۹ به چاپ رسیده گرفته شده است. این پایان‌نامه شامل سه فصل می‌باشد. در فصل اول مفاهیم و تعاریف اولیه آورده شده است. فصل دوم به معرفی نیم‌گروه‌های کاملاً منظم و نیم‌گروه‌های کاملاً ساده اختصاص دارد و در فصل سوم که مهمترین فصل این نوشته می‌باشد، به معرفی روابط $\mathcal{V}$ و ξ روی نیم‌گروه‌های کاملاً منظم و بررسی ارتباط بین آن‌ها می‌پردازیم. در پایان با طرح چند مثال ساختارهای مذکور را به صورت دقیق‌تر بررسی می‌کنیم.

---

[۱] *Clifford*

[۲] *Lyapin*

[۳] *Jiangang Zhang*

[۴] *Ran Shen*

فهرست مندرجات

علایم و نشانه‌ها

$\wedge$	**مقطع**
$\in$	**عضو**
$\subseteq$	**زیرمجموعه**
$\vee$	**اتصال**
$\emptyset$	**مجموعه تهی**
$Mor(A,B)$	**مجموعه‌ی ریخت‌ها از** A **به توی** B
$\leq$	**ترتیب جزئی**
$(X,\leq)$	**مجموعه مرتب جزئی**
$\simeq$	**معادل**
$\cong$	**یکریخت**
$[A]$	**زیرنیم‌گروه تولید شده توسط** A
$X \times X$	**حاصل ضرب دکارتی** $X \times X$
ρ	**رابطه‌ی دوتایی**
ρ^{-1}	**معکوس رابطه** ρ
ρ^{t}	**بستار متعدی** ρ
ρ^{e}	**رابطه هم ارزی تولید شده توسط** ρ
ρ^{*}	**همنهشتی تولید شده توسط** ρ
$\varphi\|_X$	**تحدید** φ **روی** X
$[s]_\rho$	**کلاس هم ارزی شامل عضو** s

S/ρ .... مجموعه‌ی کلاسهای هم ارزی $[s]_\rho$ که در آن $s \in S$

K_a .... $\mathcal{K}$−کلاس شامل عضو a

(Y, S_α) .... نیم‌مشبکه Y از نیم‌گروه‌های S_α

$C(S)$ .... مرکز S

$E(S)$ .... مجموعه‌ی عناصر خودتوان S

$V(a)$ .... مجموعه تمام وارون‌های عضو a

$S^۱$ .... نیم‌گروه با عضو همانی الحاقی ۱

$\mathcal{M}(I, G, \Lambda; P)$ .... نیم‌گروه ماتریس ریس

$< P >$ .... زیرگروه تولید شده توسط درایه‌های ماتریس P

σ_S .... کوچکترین همنهشتی گروهی روی نیم‌گروه S

ν_S .... کوچکترین همنهشتی کلیفورد روی نیم‌گروه S

$\mathcal{N}(G)$ .... مشبکه زیرگروه‌های نرمال G

$(\varphi, u, \omega, v, \psi)$ .... همریختی پنج‌تایی

ι_A .... نگاشت همانی روی مجموعه A

Imf .... نقش f

λ_a .... انتقال درونی چپ القاء شده توسط a روی S

ρ_a .... انتقال درونی راست القاء شده توسط a روی S

$\bigcap_{i \in I} A_i$ .... اشتراک مجموعه‌های A_i که در آن $i \in I$

$\bigcup_{i \in I} A_i$ .... اجتماع مجموعه‌های A_i که در آن $i \in I$

$\mathbb{Z}$ .... مجموعه‌ی اعداد صحیح

$\dot{\bigcup}_{i \in I} A_i$ .... اجتماع مجزای مجموعه‌های A_i که در آن $i \in I$

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

این فصل دربرگیرنده تعاریف مورد نیاز است که در چهار بخش می‌آوریم. در بخش اول تعاریف مربوط به مشبکه‌ها و نیم‌گروه‌ها را را بیان می‌کنیم. بخش دوم شامل تعاریف مربوط به همنهشتی‌ها می‌باشد. در بخش سوم تعاریف مقدماتی در باره‌ی ایده‌آل‌های اصلی، روابط گرین و مفاهیم رسته‌ها آورده شده‌است و بخش چهارم به تعاریف مربوط به نیم‌گروه‌های کاملاً منظم و نیم‌گروه‌های کلیفورد اختصاص دارد.

۱.۱ مشبکه‌ها و نیم‌گروه‌ها

در این بخش به اختصار به مطالعه تعاریف اولیه در رابطه با مشبکه‌ها، مجموعه‌های مرتب جزئی و نیم‌گروه‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱ : فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد.

یک **رابطه دوتایی** ρ روی X، یک زیر مجموعه از حاصلضرب دکارتی $X \times X$ می‌باشد.

برای عضویت در ρ می‌نویسیم $(x, y) \in \rho$ و یا $x\rho y$.

تعریف ۲.۱.۱ : رابطه دوتایی ρ روی مجموعه X:

۱) **انعکاسی** است اگر به ازای هر $x \in X$، $x\rho x$.

۲) **متقارن** است اگر به ازای هر $x, y \in X$، $x\rho y$ نتیجه دهد $y\rho x$.

۳) **پادمتقارن** است اگر به ازای هر $x, y \in X$، $x\rho y$ و $y\rho x$ نتیجه دهد $x = y$.

۴) **متعدی** است اگر به ازای هر $x, y, z \in X$، $x\rho y$ و $y\rho z$ نتیجه دهد $x\rho z$.

تعریف ۳.۱.۱ : یک **رابطه هم ارزی** روی مجموعه X، یک رابطه دوتایی انعکاسی، متقارن و متعدی روی X است.

تعریف ۴.۱.۱ : فرض کنیم X یک مجموعه و ρ یک رابطه هم ارزی روی مجموعه X باشد. به ازای هر $x \in X$، مجموعه

$$[x]_\rho = \{y \in X \ ; \ x\rho \ y\}$$

را $\rho-$**کلاس** x می‌نامیم. مجموعه تمام $\rho-$کلاس‌های X با X/ρ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱ : اگر ρ یک رابطه دوتایی روی X باشد، آن‌گاه **معکوس** ρ را با ρ^{-1} نمایش می‌دهیم و آن را به ازای هر $x, y \in X$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$y \ \rho \ x \ \text{اگر و تنها اگر} \ x \ \rho^{-1} y$$

رابطه $\rho^t = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$ را **بستار متعدی** ρ می‌نامیم. به طور صریح $x\rho^t y$ اگر و تنها اگر به ازای $i = 0, 1, ..., n-1$، $z_i \in X$ به قسمی وجود داشته باشند که

$$x = z_o, \ z_i\rho z_{i+1}, \ z_n = y$$

رابطه $\rho^e = (\rho \bigcup \rho^{-1} \bigcup \varepsilon)^t$ را **رابطه هم‌ارزی تولید شده توسط** ρ می‌نامیم.

تعریف ۶.۱.۱ : یک **مجموعه مرتب جزئی** زوجی مانند $(X, \leqslant)$ می‌باشد که در آن $\leqslant$ یک رابطه دوتایی روی X است که دارای خواص انعکاسی ، پاد تقارنی و تعدی روی X باشد.

تعریف ۷.۱.۱ : فرض کنیم $(X, \leqslant)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد و $Y \subseteq X$. عضو $y \in Y$ را **مقطع**[۱] یا بزرگترین کران پایین Y گوییم، اگر

۱) y یک کران پایین برای Y باشد، یعنی؛ برای هر $x \in Y$، $y \leq x$.

۲) برای هر کران پایین a از Y داشته باشیم، $a \leq y$.

علاوه بر این، مقطع Y در صورت وجود یکتا می‌باشد و با $\bigwedge Y$ نشان داده می‌شود.

به طور مشابه، عنصر $y \in P$ را **اتصال**[۲] یا کوچکترین کران بالا برای Y گوییم، هرگاه

۱) y یک کران بالا برای Y باشد، یعنی؛ برای هر $x \in X$، $x \leq y$.

۲) برای هر کران بالای a از y داشته باشیم، $y \leq a$.

علاوه بر این، اتصال Y در صورت وجود یکتا می‌باشد و با $\bigvee Y$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۸.۱.۱ : مجموعه مرتب جزئی P را $\wedge-$ **نیم‌مشبکه** گوییم، اگر برای هر زیرمجموعه متناهی Y از P، $\bigwedge Y$ وجود داشته باشد. $\vee-$ **نیم‌مشبکه** به صورت مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۹.۱.۱ : مجموعه مرتب جزئی L را یک **مشبکه** گوییم، در صورتی که برای هر $a, b \in L$، $\bigvee\{a, b\} = a \vee b$ و $\bigwedge\{a, b\} = a \wedge b$ در L وجود داشته باشند و آن را با $(L, \leq, \vee, \wedge)$ نشان می‌دهیم و چنانچه ابهامی پیش نیاید به اختصار L را مشبکه می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۱.۱ : فرض کنیم $(X, \leqslant)$ یک مجموعه مرتب جزئی و Y یک زیر مجموعه ناتهی از X باشد. اگر مقطع هر جفت از اعضای Y در Y قرار داشته باشد، آن‌گاه Y یک $\wedge-$ **زیرنیم‌مشبکه** از X نامیده می‌شود. $\vee-$ **زیرنیم‌مشبکه** به صورت مشابه تعریف می‌شود.

---

[۱] $meet$

[۲] $join$

تعریف ۱۱.۱.۱ : زیر مجموعه ناتهی Y از L که برای هر جفت از اعضای آن، مقطع و اتصال آن‌ها نیز در Y قرار داشته باشد، یک **زیر مشبکه** از L نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۱.۱ : اگر S مجموعه‌ای ناتهی باشد، یک **عمل دوتایی** بر S تابعی است مانند $\star : S \times S \to S$.

تعریف ۱۳.۱.۱ یک **نیم‌گروه** [۳] عبارت است از مجموعه‌ای ناتهی مانند S همراه با عملی دوتایی بر S با خاصیت شرکت پذیری، یعنی؛ به ازای هر $a, b, c \in S$ داشته باشیم $a(bc) = (ab)c$.

زیر مجموعه ناتهی T از نیم‌گروه S یک **زیرنیم‌گروه** S نامیده می‌شود اگر T تحت ضرب S بسته باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱ : فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد در این صورت

۱) عضو $e \in S$ را **همانی چپ** نامیم هرگاه برای هر $s \in S$، $es = s$.

۲) عضو $e \in S$ را **همانی راست** نامیم هرگاه برای هر $s \in S$، $se = s$.

۳) عضو $e \in S$ را **همانی** نامیم هرگاه برای هر $s \in S$، $es = se = s$.

عضو همانی نیم‌گروه S معمولاً با 1_S نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۵.۱.۱ برای نیم‌گروه S،

۱) عضو $z \in S$ را **صفر چپ** نامیم هرگاه برای هر $s \in S$، $zs = z$.

۲) عضو $z \in S$ را **صفر راست** نامیم هرگاه برای هر $s \in S$، $sz = z$.

۳) عضو $z \in S$ را **صفر** نامیم هرگاه برای هر $s \in S$، $zs = sz = z$.

---

[۳] $semigroup$

عضو صفر در یک نیم‌گروه معمولاً با ۰ نمایش داده می‌شود.

ساختار ۱.۱.۱۶ : به هر نیم‌گروه S بدون عضو همانی، می‌توانیم یک عضو همانی ۱ الحاق کنیم و ضرب روی $S\bigcup\{1\}$ را به ازای هر $s \in S\bigcup\{1\}$ به صورت زیر تعریف کنیم

$$1.1 = 1 \text{ و } s.1 = 1.s = s$$

در این صورت $S\bigcup\{1\}$ را با S^1 نمایش می‌دهیم و آن را یک **نیم‌گروه با عضو همانی الحاقی** می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۷ : فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد و$a, x \in S$. عنصر x را **وارون** a می‌نامیم هر گاه $a = axa$ و $x = xax$.

مجموعه تمام وارون‌های a را با $V(a)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۸ : یک **گروه**، یک نیم‌گروه مانند G با عنصر همانی ۱ و وارون a^{-1} برای هر عضو $a \in G$ می‌باشد.

اگر زیرنیم‌گروه T از نیم‌گروه S تحت عمل القاء شده یک گروه باشد، آن‌گاه T یک **زیرگروه** از S نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱۹ : عضو e از نیم‌گروه S **خودتوان** نامیده می‌شود هرگاه $e^2 = e$. مجموعه تمام اعضای خودتوان S با $E(S)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۲۰ : فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد. اگر به ازای هر $e \in E(s)$، زیرنیم‌گروه eSe گروه باشد آن‌گاه S یک **گروه موضعی** نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۲۱ : می گوییم اعضای b و a از نیم‌گروه S **جابجا می‌شوند** هرگاه $ab = ba$. نیم‌گروه S را **جابجایی** می‌نامیم هرگاه هر دو عضو آن جابجا شوند.

تعریف ۲۲.۱.۱ : اگر تمام اعضای نیم‌گروه S خودتوان باشند آن‌گاه S یک **دسته** [۴] نامیده می‌شود. اگر زیرنیم‌گروه T از نیم‌گروه S فقط شامل اعضای خودتوان باشد، آن‌گاه T یک **زیردسته** [۵] از S نامیده می‌شود.

تعریف ۲۳.۱.۱ : فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد. اگر A یک زیر مجموعه ناتهی از S باشد آن‌گاه اشتراک تمام زیرنیم‌گروه‌های S شامل A را زیرنیم‌گروه **تولید شده توسط** A می‌نامیم و آن را با $[A]$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۴.۱.۱ : اگر نیم‌گروه S توسط مجموعه اعضای خودتوان خود تولید شده باشد، آن‌گاه S را **تولید شده توسط خودتوان‌ها** [۶] می‌نامیم.

تعریف ۲۵.۱.۱ : فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد. در این صورت

۱) S را **حذف شدنی چپ** می‌نامیم اگر به ازای هر $a, b, c \in S$، $ca = cb$ نتیجه دهد $a = b$.

۲) S را **حذف شدنی راست** می‌نامیم اگر به ازای هر $a, b, c \in S$، $ac = bc$ نتیجه دهد $a = b$.

۳) S را **حذف شدنی** می‌نامیم اگر حذف شدنی چپ و حذف شدنی راست باشد.

۴) S را **حذف شدنی ضعیف** می‌نامیم اگر به ازای هر $a, b, c \in S$، $ca = cb$ و $ac = bc$ نتیجه دهد $a = b$.

۲.۱ همنهشتی‌ها

در این بخش ابتدا مفهوم همنهشتی را بیان نموده، سپس به معرفی چند نوع خاص از همنهشتی‌ها می‌پردازیم و در انتها همنهشتی تولید شده توسط یک رابطه هم ارزی را تعریف و برخی خواص آن

[۴] *band*

[۵] *subband*

[۶] *idempotent generated*

را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ : رابطه دوتایی ρ روی مجموعه X:

۱) **سازگار چپ** است اگر به ازای هر $a, b, c \in X$، $a\rho b$ نتیجه‌دهد $ca\rho cb$.

۲) **سازگار راست** است اگر به ازای هر $a, b, c \in X$، $a\rho b$ نتیجه دهد $ac\rho bc$.

۳) **سازگار** است هرگاه سازگار چپ و سازگار راست باشد.

تعریف ۲.۲.۱ : یک رابطه هم‌ارزی سازگار چپ (سازگار راست)، یک **همنهشتی چپ (همنهشتی راست)** نامیده می‌شود.

رابطه دوتایی ρ روی X یک **همنهشتی** روی X است اگر یک همنهشتی چپ و همنهشتی راست باشد.

تعریف ۳.۲.۱ : همنهشتی $\omega = X \times X$ ، **همنهشتی جامع** [۷] یا عمومی روی X و همنهشتی $\varepsilon = \{(x, x); x \in X\}$ ، **همنهشتی همانی** [۸] روی X نامیده می‌شوند.

همچنین یک همنهشتی متفاوت با ω را یک **همنهشتی اکید** و یک همنهشتی متفاوت با ε را یک **همنهشتی غیر بدیهی** می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۱ : فرض کنیم ρ یک رابطه دوتایی روی S باشد. به ازای هر $a, b \in S$، رابطه ρ^c را روی S بدین گونه تعریف می‌کنیم که

$a \ \rho^c \ b$ **اگرو تنها اگر** $x, y \in S^1$ **و** $c, d \in S$ **به قسمی**

وجود داشته باشند که $a = xcy$، $b = xdy$ **و** $c \ \rho \ d$

در این صورت رابطه $\rho^* = (\ (\rho \bigcup \rho^{-1} \bigcup \varepsilon)^c)^t$ را **همنهشتی تولید شده توسط** ρ می‌نامیم.

---
[۷] $universal$
[۸] $identity$

لم ۵.۲.۱ : به ازای هر رابطه دوتایی ρ، ρ^* کوچکترین همنهشتی روی S شامل ρ می‌باشد.

برهان: به مرجع [۴] لم I.۵.۲ مراجعه شود.

■

تعریف ۶.۲.۱ : فرض کنیم ρ یک همنهشتی روی S باشد. در این صورت به ازای $s \in S$، $\rho-$ کلاس شامل s را با $[s]_\rho$ نمایش می‌دهیم. مجموعه تمام $\rho-$ کلاس‌های S همراه با ضرب $(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho$ به ازای هر $a, b \in S$، یک نیم‌گروه است که **نیم‌گروه خارج قسمتی القاء شده توسط** ρ نامیده می‌شود و آن را با S/ρ نمایش می‌دهیم.

۳.۱ ایده‌آل‌های اصلی، روابط گرین و رسته‌ها

در این بخش ابتدا مفهوم ایده‌آل را تعریف می‌کنیم و سپس به مطالعه ایده‌آل اصلی تولید شده توسط یک عضو و مفاهیم مربوط به روابط گرین می‌پردازیم. در انتها رسته را تعریف نموده و سپس رسته متقابل یا دوگان یک رسته را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱ : زیرمجموعه ناتهی I از نیم‌گروه S یک **ایده‌آل چپ** (**راست**) نامیده می‌شود اگر $a \in I$ و $s \in S$ نتیجه دهد $sa \in I$ $(as \in I)$. زیر مجموعه I یک **ایده‌آل** از S است اگر ایده‌آل چپ و ایده‌آل راست از S باشد. ایده‌آل I از S **اکید** یا سره نامیده می‌شود اگر $I \neq S$.

تعریف ۲.۳.۱ : اگر نیم‌گروه S ایده‌آل اکید نداشته باشد در این صورت S را یک **نیم‌گروه ساده** می‌نامیم.

لم ۳.۳.۱ : نیم‌گروه S ساده است اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in S$، $SaS = S$.

برهان: به مرجع [۴] لم I.۶.۱ مراجعه شود.

■

تعریف ۴.۳.۱ : فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد و $s \in S$. اشتراک تمام ایده‌آل‌های چپ S شامل s را ایده‌آل اصلی چپ تولید شده توسط s روی S می‌نامیم و آن را با $L(s) = S^1 s$ نمایش می‌دهیم. به طور مشابه ایده‌آل اصلی راست و ایده‌آل اصلی دو طرفه تولید شده توسط s روی S تعریف می‌شوند و به ترتیب با $R(s) = sS^1$ و $J(s) = S^1 s S^1$ نمایش داده می‌شوند.

تعریف ۵.۳.۱ : روابط $\mathcal{R}$ ، $\mathcal{L}$، $\mathcal{J}$، $\mathcal{H}$ و $\mathcal{D}$ را که به صورت زیر تعریف می‌شوند، **روابط گرین** [9] روی S می‌نامیم.

به ازای هر $a, b \in S$، $a \ \mathcal{L} \ b$ اگر $L(a) = L(b)$.

به ازای هر $a, b \in S$، $a \ \mathcal{R} \ b$ اگر $R(a) = R(b)$.

به ازای هر $a, b \in S$، $a \ \mathcal{J} \ b$ اگر $J(a) = J(b)$.

همچنین $\mathcal{H} = \mathcal{L} \bigcap \mathcal{R}$ و $\mathcal{D} = \mathcal{L} o \mathcal{R}$.

تعریف ۶.۳.۱ : به ازای هر عضو a از نیم‌گروه S و $\mathcal{K} \in \{\mathcal{H}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}, \mathcal{D}\}$، $\mathcal{K}-$کلاس شامل a را با K_a نمایش می‌دهیم. به علاوه می‌نویسیم $L_a \leqslant L_b$ اگر $L(a) \subseteq L(b)$، همچنین می‌نویسیم $R_a \leqslant R_b$ اگر $R(a) \subseteq R(b)$ و نیز $J_a \leqslant J_b$ اگر $J(a) \subseteq J(b)$.

تعریف ۷.۳.۱ : هر رسته رده ای است مانند $\mathcal{C}$ از اشیاء (که با $A, B, C ...$ نشان داده می‌شوند) به انضمام:

الف) به ازای هر دو شیئی مانند A و B، مجموعه‌ای متناظر می‌شود که با $Mor_{\mathcal{A}}(A, B)$ نشان می‌دهیم و هر عضو آن را یک ریخت می‌نامیم. به علاوه دارای این خاصیت است که به ازای هر چهار شیئی مثل A، B، C و D که $(A, B) \neq (C, D)$

$$Mor_{\mathcal{A}}(A, B) \bigcap Mor_{\mathcal{A}}(C, D) = \phi$$

[9] $Green`s \ relations$

ب) به ازای هر سه شیئی A، B و C تابع

$$*: Mor_{\mathcal{A}}(B,C) \times Mor_{\mathcal{A}}(A,B) \longrightarrow Mor_{\mathcal{A}}(A,C)$$

$$(g,f) \mapsto gof$$

موجود است که

i) به ازای هر چهار شیئی A، B، C و D اگر $f \in Mor_{\mathcal{A}}(A,B)$، $g \in Mor_{\mathcal{A}}(B,C)$ و $h \in Mor_{\mathcal{A}}(C,D)$ آن‌گاه $ho(gof) = (hog)of$.

ii) به ازای هر شیئی مانند A، عضوی از $Mor_{\mathcal{A}}(A,A)$ مثل ۱_A موجود است که به ازای هر عضو از $Mor_{\mathcal{A}}(A,B)$ مثل f و هر عضو از $Mor_{\mathcal{A}}(C,A)$ مثل g، $fo۱_A = f$ و $۱_Aog = g$.

تعریف ۸.۳.۱ : هرگاه $\mathcal{A}$ یک رسته باشد آن‌گاه **رسته متقابل** یا دوگان $\mathcal{A}$ که با $\mathcal{A}^{op}$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد:

اشیای $\mathcal{A}^{op}$ همان اشیای $\mathcal{A}$ هستند. مجموعه $Mor_{\mathcal{A}^{op}}(A,B)$ از ریخت‌ها در $\mathcal{A}^{op}$ از A به B مساوی مجموعه $Mor_{\mathcal{A}}(B,A)$ از ریخت‌ها در $\mathcal{A}$ از B به A تعریف می‌شود و عمل ترکیب بین ریخت‌ها:

$$Mor_{\mathcal{A}^{op}}(C,B) \times Mor_{\mathcal{A}^{op}}(B,A) \longrightarrow Mor_{\mathcal{A}^{op}}(C,A)$$

$$(g,f) \mapsto gof$$

که $f \in Mor_{\mathcal{A}}(A,B) = Mor_{\mathcal{A}^{op}}(B,A)$، $g \in Mor_{\mathcal{A}}(B,C) = Mor_{\mathcal{A}^{op}}(C,B)$ و $gof \in Mor_{\mathcal{A}}(A,C) = Mor_{\mathcal{A}^{op}}(C,A)$.

۴.۱ نیم‌گروه‌های کاملاً منظم و نیم‌گروه‌های کلیفورد

در این بخش نیم‌گروه کاملاً منظم، نیم‌گروه کلیفورد، نیم‌گروه اُرتودکس و گروه اُرتو را معرفی می‌کنیم. مفاهیم معرفی شده در این بخش در ادامه مورد استفاده فراوان قرار خواهند گرفت.

تعریف ۱.۴.۱ : عضو a از نیم‌گروه S را **منظم** می‌نامیم اگر عضو $x \in S$ به قسمی وجود داشته باشد که $a = axa$. نیم‌گروه S را **نیم‌گروه منظم** می‌نامیم اگر تمام اعضای آن منظم باشند.

تعریف ۲.۴.۱ : یک نیم‌گروه منظم را **نیم‌گروه معکوس** می‌نامیم اگر اعضای خودتوان آن جابجا شوند.

تعریف ۳.۴.۱ : عضو a از نیم‌گروه S **کاملاً منظم** نامیده می‌شود اگر عضو $x \in S$ به قسمی وجود داشته باشد که $a = axa$ و $ax = xa$.

نیم‌گروه S را **نیم‌گروه کاملاً منظم** می‌نامیم اگر تمام اعضای آن کاملاً منظم باشند.

تعریف ۴.۴.۱ : یک نیم‌گروه ساده کاملاً منظم را **نیم‌گروه کاملاً ساده** می‌نامیم.

تعریف ۵.۴.۱ : نیم‌گروه S را **کلیفورد** می‌گوییم هرگاه کاملاً منظم باشد و اعضای خودتوان آن با تمام اعضای S جابجا شوند. در این حالت می‌گوییم اعضای خودتوان S **مرکزی** هستند.

تعریف ۶.۴.۱ : یک نیم‌گروه منظم را **اُرتودکس** [۱۰] گوییم هرگاه اعضای خودتوان آن تشکیل یک زیرنیم‌گروه دهند.

یک نیم‌گروه کاملاً منظم که اُرتودکس باشد، یک **گروه اُرتو**[۱۱] نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۴.۱ : هر نیم‌گروه اُرتودکس کاملاً ساده را یک **گروه مستطیلی** [۱۲] می‌نامیم.

---

[۱۰] $orthodox$

[۱۱] $orthogroup$

[۱۲] $rectangular\ group$

تعریف ۸.۴.۱ : اگر نیم‌گروه S به ازای هر $a, x \in S$ در شرط $a = axa$ صدق کند، S را یک **دسته مستطیلی** [۱۳] می‌نامیم.

تعریف ۹.۴.۱ : همنهشتی ρ روی نیم‌گروه S یک **همنهشتی گروهی** روی S نامیده می‌شود هرگاه S/ρ یک گروه باشد. کوچکترین همنهشتی ρ روی S به قسمی که S/ρ یک گروه باشد، **کوچکترین همنهشتی گروهی** روی S نامیده می‌شود و با σ_S نمایش داده می‌شود.

همچنین همنهشتی ρ روی نیم‌گروه S یک **همنهشتی کلیفورد** روی S نامیده می‌شود هرگاه S/ρ یک نیم‌گروه کلیفورد باشد. کوچکترین همنهشتی ρ روی S به قسمی که S/ρ یک نیم‌گروه کلیفورد باشد، کوچکترین همنهشتی کلیفورد روی S نامیده می‌شود و با ν_S نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۰.۴.۱ : نیم گروه S را یک نیم‌مشبکه Y از نیم‌گروه‌های S_α می‌نامیم هرگاه:

۱) Y یک نیم‌مشبکه باشد.

۲) $S = \dot{\bigcup}_{\alpha \in Y} S_\alpha$.

۳) $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$ که در اینجا $\alpha\beta$ مقطع α و β می‌باشد.

در این حالت معمولاً می‌نویسیم $S = (Y, S_\alpha)$. اگر تمام S_αها دارای ساختمان جبری از نوع $\mathcal{T}$ باشند در این صورت S را یک نیم‌مشبکه Y از نیم‌گروه‌های از نوع $\mathcal{T}$ می‌نامیم. مثلاً اگر تمام S_α ها نیم‌گروه کاملاً ساده باشند در این صورت S یک نیم‌مشبکه Y از نیم‌گروه‌های کاملاً ساده نامیده می‌شود.

---

[۱۳] $rectangular band$