دانشگاه یزد

دانشکده‌ی ریاضی

گروه علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد علوم کامپیوتر

عنوان:

روش‌های تقریبی با زمان چندجمله‌ای برای حل مسائل پوشش با کم‌ترین تعداد دیسک

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا هوشمنداصل

استاد مشاور:

دکتر محمد فرشی

پژوهش‌گر:

نجمه حیدرنژاد

اسفند ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

چکیده

یکی از انواع شبکه‌های بی‌سیم، **شبکه‌های بی‌سیم اد- هاک متحرک** است. این شبکه، مجموعه‌ی گره‌هایی است که به صورت بی‌سیم و بدون نقطه دسترسی با یک‌دیگر ارتباط برقرار می‌کنند. گره‌ها می‌توانند کامپیوتر **میزبان** یا مسیریاب باشند. گره میزبان، کامپیوتری است که منابع، سرویس‌ها و برنامه‌های کاربردی را در اختیار دیگر گره‌های شبکه می‌گذارد. در این شبکه‌ها، گره‌ها مکان ثابتی ندارند. هر میزبان به منظور انتقال داده در یک ناحیه پوشش دایره‌ای که با یک **دیسک** نشان داده می‌شود، به فرستنده و گیرنده‌های فرکانس رادیویی (RF) مجهز است. با توجه به تحرک بالای میزبان‌ها، هر میزبان باید به طور مداوم با گره‌هایی از شبکه که در ناحیه پوشش آن قرار دارند، هم‌گام شود. به منظور ذخیره انرژی و کاهش حجم انتقال داده، به دنبال کم‌ترین تعداد میزبان‌ها هستیم، به طوری‌که همه گره‌های شبکه پوشش داده شوند. این مسئله که **پوشش دیسک کمینه** نامیده می‌شود، یکی از مسائل مهم در طراحی شبکه‌های بی‌سیم می‌باشد که به رده مسائل $\mathbf{NP}$-سخت تعلق دارد [۲۳]. در این پایان‌نامه، الگوریتمی بررسی می‌شود که در زمان $\mathcal{O}(mn^{\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon^2}\log^2\frac{1}{\epsilon})})$ پوشش دیسکی با حداکثر $(1+\epsilon)$ برابر تعداد دیسک‌های پوشش دیسک بهینه (پوشش با کم‌ترین تعداد دیسک) به دست می‌آورد، که n تعداد میزبان‌ها و m تعداد گره‌های دیگر شبکه هستند [۲۲].

فهرست مطالب

لیست الگوریتم‌ها

لیست تصاویر

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ پیشگفتار

شبکه‌های بی‌سیم امروزه به سرعت وارد زندگی ما شده‌اند و کاربردهای زیادی دارند. اندازه وسایل در این شبکه‌ها هر روز کوچک‌تر شده و در نقاط دور از چشم قرار می‌گیرند و تنها تأثیرات آن‌ها بر امور روزمره محسوس است. گره‌های این شبکه، کامپیوتر میزبان[۱] یا مسیریاب هستند که از طریق گیرنده و فرستنده‌های رادیویی تبادل اطلاعات می‌کنند. در شبکه‌های بی سیم اد-هاک متحرک[۲]، گره‌ها به طور پیوسته موقعیت خود را تغییر می‌دهند و سازمان‌دهی ثابتی ندارند.

ناحیه پوشش هر گره، ناحیه‌ی جغرافیایی محدودی است که آن گره می‌تواند با دیگر گره‌های این ناحیه، ارتباط برقرار کند. این ناحیه یک محدوده دایره‌ای است و با یک دیسک[۳] نشان داده می‌شود. هر میزبان، به گره‌هایی که در ناحیه پوشش آن قرار دارند، سرویس می‌دهد.

تعریف ۱.۱.۱ *در شبکه‌های متحرک، مفهوم **انتشار**[۴]، انتقال هم‌زمان یک بسته داده به گره‌ها است. از آن‌جا که سیگنال‌های رادیویی یک محدوده جغرافیایی، به احتمال زیاد با یک‌دیگر هم‌پوشانی دارند،*

---

[۱] Host

[۲] Mobile ad-hoc wireless networks

[۳] Disk

[۴] Broadcast

انتشار، بسیار پر هزینه است و منجر به پدیده‌های برخورد[۵] و افزونگی [۶] خواهد شد. این مشکل ***مسئله انتشار طوفانی*** *[۷] نامیده می‌شود.*

تعریف ۲.۱.۱ *در یک شبکه، میزبان‌ها باید به طور مداوم، به گره‌هایی که در ناحیه پوشش آن‌ها قرار دارند، سرویس دهند. به منظور ذخیره انرژی و جلوگیری از مسئله انتشار طوفانی، باید تا حد امکان از حجم داده‌های انتقالی، کاسته شود.* ***مسئله پوشش دیسک کمینه*** *[۸]، این مشکل را با به حداقل رساندن تعداد میزبان‌ها [۵]، به طوری‌که همه گره‌های شبکه هم‌زمان پوشش داده شوند، حل می‌کند.*

مسئله پوشش دیسک کمینه، که در این پایان‌نامه بررسی خواهد شد، به صورت زیر تعریف می‌شود:
مجموعه $\mathcal{D}$ شامل n دیسک و مجموعه $\mathcal{P}$ شامل m نقطه در صفحه اقلیدسی داده شده است. اگر فاصله بین مرکز دیسک D و نقطه $p \in \mathcal{P}$ از شعاع D بزرگ‌تر نباشد، دیسک D نقطه p را می‌پوشاند و هر دیسک یک زیرمجموعه از نقاط $\mathcal{P}$ را می‌پوشاند. مجموعه دیسک‌های $\mathcal{D}$، مجموعه نقاط $\mathcal{P}$ را می‌پوشانند، اگر هر نقطه $p \in P$ با حداقل یک دیسک $D \in \mathcal{D}$ پوشانده شود.

در سراسر پایان‌نامه، اندازه مجموعه $\mathcal{A}$، که با $|\mathcal{A}|$ نشان داده می‌شود، تعداد اعضای مجموعه را بیان می‌کند.

اگر فرض شود که مراکز دیسک‌های مجموعه $\mathcal{D}$، بیان‌گر میزبان‌های شبکه و نقاط مجموعه $\mathcal{P}$، بیان‌گر گره‌های دیگر شبکه باشند که توسط میزبان‌ها پوشانده می‌شوند، مسئله پوشش دیسک کمینه، به دنبال یک زیرمجموعه از دیسک‌ها از $\mathcal{D}$ با کم‌ترین تعداد برای پوشاندن همه نقاط $\mathcal{P}$ است.

الگوریتمی که در این پایان‌نامه، برای مسئله پوشش دیسک کمینه بررسی می‌شود، بر پایه یکی از **روش‌های تقریبی**[۹] به نام **روش‌های تقریبی بر پایه همسایگی محلی**[۱۰] است که در برخی مسائل

[۵] Collision

[۶] Redundancy، افزونگی، کیفیت سیستم را نشان می‌دهد که منابع پشتیبان همراه است، یعنی منابعی که به طور اضافی به همراه داده‌ها حمل می‌شوند.

[۷] Broadcast storm problem

[۸] Minimum disk cover problem

[۹] Approximation schemes

[۱۰] Local Neighborhood-Based Approximation Schemes

پرکاربرد مربوط به گراف به‌کار می‌رود و در سال ۲۰۰۸ توسط نیبرگ و همکاران[۱۱] مطرح شده است [۲۵] (در ۳.۲ این روش به طور مفصل شرح داده می‌شود). از این رو، در ادامه فصل ابتدا تعاریف مورد نیاز در زمینه گراف، بیان می‌شود، سپس به مفاهیم و تعاریف مورد نیاز در زمینه روش‌های تقریبی پرداخته می‌شود.

۲.۱ مفاهیم و تعاریف

۱.۲.۱ تعاریف مربوط به گراف

گراف $G = (V, E)$ با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E مفروض است. برای $V' \subseteq V$، گراف القایی توسط V' با $G[V']$ نمایش داده می‌شود، به‌طوری‌که $G[V']$ زیرگرافی از G با رئوس V' است و مجموعه یال‌ها، همان یال‌های بین این رئوس در گراف G هستند.

تعریف ۱.۲.۱ *گراف $G = (V, E)$ با مجموعه رئوس V را k-* ***همبند*** *گویند، اگر اندازه کوچک‌ترین زیرمجموعه از رئوس، که گراف با حذف آن‌ها ناهمبند می‌شود، k باشد.*

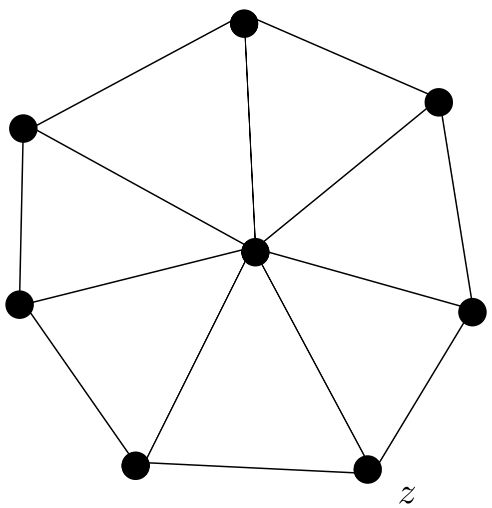
تعریف ۲.۲.۱ *دو رأس در گراف،* ***مستقل***[۱۲] *هستند، اگر با یک‌دیگر مجاور نباشند. $I \subseteq V$ را یک زیرمجموعه مستقل گویند، اگر هر جفت رأس از I مستقل باشند. به عبارت دیگر، $I \subseteq V$ مستقل است اگر $G[I]$ شامل هیچ یالی نباشد.*

در شکل ۱.۱، دو رأس u و v از هم مستقل هستند و مجموعه $I = \{z, u, v\}$، یک زیرمجموعه مستقل است.

تعریف ۳.۲.۱ *در گراف $G = (V, E)$،* ***مجموعه مستقل بیشینه***، *زیرمجموعه‌ی مستقل $I \subseteq V$ با بیش‌ترین اندازه است.*

[۱۱] Nieberg

[۱۲] Independent



شکل ۱.۱: مجموعه‌ی $\{z, u, v\}$ مثالی از یک مجموعه مستقل است.

تعریف ۴.۲.۱ *گراف $G = (V, E)$ داده شده است. مسئله مجموعه مستقل بیشینه[۱۳]، به دنبال مجموعه مستقل بیشینه است.*

تعریف ۵.۲.۱ *در گراف $G = (V, E)$، یک زیرمجموعه از V، **مجموعه مستقل بیشین**[۱۴] است، اگر مجموعه مستقل دیگری شامل این زیرمجموعه وجود نداشته باشد.*

یک گراف می‌تواند دارای چندین مجموعه مستقل بیشین، با اندازه‌های متفاوت باشد. مجموعه مستقل بیشین با بزرگ‌ترین اندازه، همان مجموعه مستقل بیشینه است.

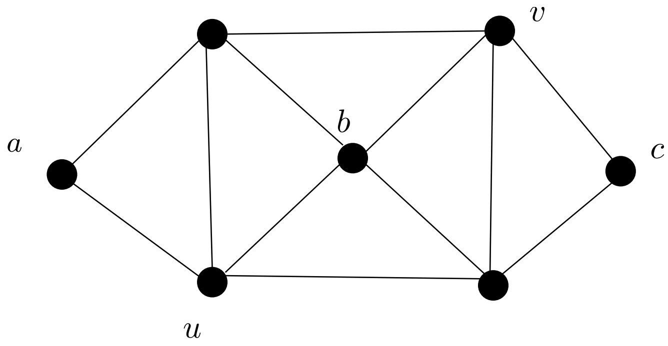
در شکل ۲.۱، هر دو مجموعه $\{a, b, c\}$ و $\{u, v\}$ مستقل بیشین هستند، اما مجموعه $\{a, b, c\}$، مجموعه مستقل بیشینه است.

تعریف ۶.۲.۱ *گراف $G = (V, E)$ مفروض است. اگر با هر رأس $v \in V$، عدد مثبت W_v همراه باشد، که وزن رأس v را نشان دهد، گراف را **گراف وزن‌دار** می‌نامند.*

در مورد گراف‌های وزن‌دار، وزن زیرمجموعه V' از مجموعه رئوس گراف برابر با $W(V') := \sum_{v \in V'} W_v$ است.

[۱۳] Maximum independent set (MIS)

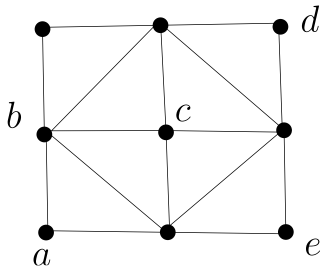
[۱۴] Maximal independent set



شکل ۲.۱: مثالی از مجموعه مستقل بیشینه.

در حالتی که گراف G وزن‌دار است، مسئله **مجموعه مستقل (وزن‌دار) بیشینه**[۱۵]، به دنبال زیرمجموعه مستقل $I \subseteq V$، با بیش‌ترین وزن است.

تعریف ۷.۲.۱ *زیرمجموعه* $V'' \subseteq V$، ***احاطه‌گر***[۱۶] *است اگر هر رأس* V، *یا درون این زیرمجموعه باشد یا با حداقل یک رأس در* V'' *مجاور باشد.*



شکل ۳.۱: مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$، مثالی از مجموعه احاطه‌گر است.

در گراف شکل ۳.۱، مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$، یک مجموعه احاطه‌گر گراف است.

یک مجموعه مستقل بیشین، احاطه‌گر نیز هست. زیرا اگر در گراف $G = (V, E)$، مجموعه‌ی $V' \subseteq V$، مستقل بیشین باشد اما احاطه‌گر نباشد، بنابراین رأس $v \in V$ وجود دارد که $v \notin V'$ و با هیچ یک از رئوس V' مجاور نیست و با مستقل بیشین بودن مجموعه V' در تناقض است.

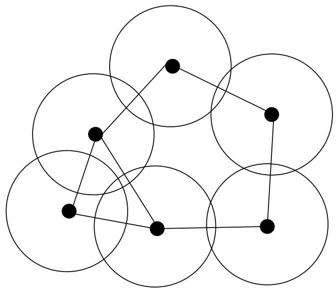
تعریف ۸.۲.۱ *در گراف* $G = (V, E)$، *مجموعه احاطه‌گر با کم‌ترین اندازه (تعداد)،* ***کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر*** *است.*

[۱۵] Maximum (weight) independent set (MIS)

[۱۶] Dominating

تعریف ۹.۲.۱ *مسئله‌ای که به دنبال کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر است، مسئله کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر[۱۷] نامیده می‌شود.*

تعریف ۱۰.۲.۱ *گرافی که همه رئوس آن به صورت دیسک‌های واحد (دیسک با قطر یک) هستند و بین دو رأس آن یال وجود دارد اگر و تنها اگر دیسک‌های متناظر آن‌ها با هم برخورد داشته باشند را یک **گراف دیسک واحد**[۱۸] گویند.*



شکل ۴.۱: مثالی از گراف دیسک واحد.

شکل ۴.۱، یک گراف دیسک واحد را نشان می‌دهد.

۲.۲.۱ تعاریف مربوط به الگوریتم‌های تقریبی

تعریف ۱۱.۲.۱ *یک مسئله **بهینه‌سازی**[۱۹] $\mathcal{F}$، با چهارتایی $(I_{\mathcal{F}}, sol_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{F}}, goal_{\mathcal{F}})$، مشخص می‌شود، به طوری‌که،*

۱. *$I_{\mathcal{F}}$، مجموعه نمونه‌های $\mathcal{F}$ است.*

۲. *$sol_{\mathcal{F}}$، تابعی است که به هر نمونه ورودی $x \in I_{\mathcal{F}}$، مجموعه جواب‌های شدنی را می‌دهد.*

۳. *$m_{\mathcal{F}}$، تابع اندازه است که بر روی زوج‌های (x, y) تعریف می‌شود، به‌طوری‌که $x \in I_{\mathcal{F}}$ و $y \in sol_{\mathcal{F}}$ است. برای هر زوج (x, y)، $m_{\mathcal{F}}(x, y)$ یک عدد صحیح مثبت را که مقدار جواب شدنی y است، ایجاد می‌کند.*

---

[۱۷] Minimum dominating set (MDS)

[۱۸] Unik disk graph

[۱۹] Optimization problem

۴. $goal_{\mathcal{F}} \in \{Min, Max\}$، مشخص می‌کند که $\mathcal{F}$، کمینه‌سازی یا بیشینه‌سازی است.

مثال ۱۲.۲.۱ گراف $G = (V, E)$، داده شده است. مسئله کم‌ترین پوشش رأس[۲۰]، مسئله‌ای است که پوشش رأس با کم‌ترین تعداد را که مجموعه رئوس U، با کم‌ترین اندازه است، به‌طوری‌که برای هر یال (v_i, v_j)، یا $v_i \in U$ یا $v_j \in U$، بدست می‌آورد. این مسئله بهینه‌سازی را می‌توان به صورت زیر نوشت،

۱. $I = \{G = (V, E)\}$.

۲. $sol(G) = \{U \subseteq V | \forall (v_i, v_j) \in E[v_i \in U \vee v_j \in U]\}$.

۳. $m(G, U) = |U|$.

۴. $goal = Min$.

تعریف ۱۳.۲.۱ یک **مسئله تصمیم‌گیری**[۲۱]، یک سؤال با جواب "بله" یا "خیر"، وابسته به مقادیر ورودی است. برای مثال، مسئله "دو مقدار x و y داده شده، آیا x بر y تقسیم‌پذیر است؟"، یک مسئله تصمیم‌گیری است.

تعریف ۱۴.۲.۱ یک مسئله بهینه‌سازی، $\mathcal{F} = (I, sol, m, goal)$، داده شده است. یک الگوریتم $\mathcal{A}$، یک **الگوریتم تقریبی**[۲۲] برای $\mathcal{F}$ است، اگر برای هر نمونه $x \in I$، یک جواب تقریبی برگرداند، که یک جواب شدنی $\mathcal{A}(x) \in sol(x)$ است.

تعریف ۱۵.۲.۱ یک الگوریتم تقریبی را، برای عدد ثابت c، الگوریتم c-تقریبی می‌نامند، اگر ثابت شود که جواب الگوریتم، حداکثر c برابر جواب بهینه است. به عدد c، **نسبت تقریبی**[۲۳] گویند.

تعریف ۱۶.۲.۱ برای تابع f، $DTIME[f(n)]$، شامل همه مسائلی است که به ازای هر مسئله L، یک ماشین تورینگ قطعی M، وجود دارد به‌طوری‌که به ازای اندازه ورودی مسئله، مانند n، M مسئله را در زمان $\mathcal{O}(f(n))$ محاسبه می‌کند.

---

[۲۰] Minimum Vertex Cover

[۲۱] Decision problem

[۲۲] Approximation algorithm

[۲۳] Approximation ratio

در تعریف قبل، اگر $f(n)$، یک چندجمله‌ای باشد، مسئله را از نوع P، می‌نامند.

تعریف ۱۷.۲.۱ *برای تابع f، $NTIME[f(n)]$، شامل همه مسائلی است که به ازای هر مسئله L، یک ماشین تورینگ غیر قطعی M، وجود دارد به‌طوری‌که به ازای اندازه ورودی مسئله، مانند n، M مسئله را در زمان $\mathcal{O}(f(n))$ محاسبه می‌کند.*

در تعریف قبل، اگر $f(n)$، یک چندجمله‌ای باشد، مسئله را از نوع NP، می‌نامند.

$P \subseteq NP$ است، ولی $P = NP$ یا $P \neq NP$ هنوز ثابت نشده است.

تعریف ۱۸.۲.۱ *یک **مسئله قابل تقریب**[۲۴]، یا به اختصار، APX، یکی از مسائل بهینه‌سازی از نوع NP است که برای هر $c \geq ۱$، یک الگوریتم c-تقریبی با زمان چندجمله‌ای برای آن وجود دارد.*

تعریف ۱۹.۲.۱ *برای یک مسئله بهینه‌سازی NP، یک **روش تقریبی با زمان چندجمله‌ای**[۲۵]، یا به اختصار $PTAS$، الگوریتمی است که جواب بهینه را با ضریب $(۱ + \epsilon)$ برای هر $\epsilon > ۰$ در زمان چندجمله‌ای بر حسب n (اندازه ورودی)، یعنی $\mathcal{O}(n^k)$، برای عدد ثابت k، بدست می‌آورد.*

تعریف ۲۰.۲.۱ *برای یک مسئله بهینه‌سازی NP، یک **روش تقریبی با زمان شبه چندجمله‌ای**[۲۶]، یا به اختصار $QPTAS$، الگوریتمی است که جواب بهینه را با ضریب $(۱ + \epsilon)$ برای هر $\epsilon > ۰$ در زمان اجرای $\mathcal{O}(n^{polylog(n)})$ بر حسب اندازه ورودی n تقریب می‌زند، که $polylog(n)$، چندجمله‌ای بر حسب $\log n$ است.*

مسائل $PTAS$، در دسته مسائل APX قرار دارند.

تعریف ۲۱.۲.۱ *در نظریه محاسباتی، **کاهش**[۲۷]، تبدیل یک مسئله به مسئله دیگر است. در واقع، مسئله A به مسئله B **کاهش‌پذیر**[۲۸] است، اگر یک الگوریتم برای حل مسئله B، بتواند به طور کارا برای حل مسئله A به‌کار رود.*

---

[۲۴] Approximable problem

[۲۵] Polynomial time approximation scheme

[۲۶] Quasi polynomial time approximation scheme

[۲۷] Reduction

[۲۸] Reducible

تعریف ۲۲.۲.۱ *یک **کاهش** $PTAS$، کاهشی است که اغلب در مسائل بهینه‌سازی به‌کار می‌رود. در این کاهش، یک روش تقریبی با زمان چندجمله‌ای ($PTAS$) برای مسئله B، در زمان چندجمله‌ای به یک $PTAS$ برای مسئله A تبدیل می‌شود.*

تعریف ۲۳.۲.۱ *یک مسئله را APX **- سخت**[۲۹] گویند، اگر یک کاهش $PTAS$ از هر مسئله APX به آن وجود داشته باشد.*

مسئله‌ای که $QPTAS$ باشد، APX- سخت نیست، مگر این‌که $NP \subseteq DTIME[n^{polylog(n)}]$. از طرفی، $P \neq NP$ نتیجه می‌دهد که مسئله‌ای که APX- سخت نیست، $PTAS$ است، بنابراین یک مسئله $QPTAS$ حتماً یک جواب $PTAS$ دارد [۲۲].

تعریف ۲۴.۲.۱ *یک مسئله $\mathcal{L}$، NP **- کامل**[۳۰] است، اگر در دسته مسائل NP باشد و هر مسئله NP بتواند در زمان چندجمله‌ای به $\mathcal{L}$ کاهش یابد.*

تعریف ۲۵.۲.۱ *یک مسئله $\mathcal{H}$، NP **- سخت**[۳۱] است، اگر هر مسئله NP بتواند در زمان چندجمله‌ای به مسئله $\mathcal{H}$ کاهش یابد.*

اگر یک مسئله بهینه‌سازی $\mathcal{H}$، دارای یک نمونه تصمیم‌گیری NP- کامل $\mathcal{L}$ باشد، پس مسئله $\mathcal{H}$، NP- سخت است.

۳.۱ ساختار پایان‌نامه

در این پایان‌نامه، هدف بررسی الگوریتمی است که پوشش دیسک کمینه را با ضریب $(1+\epsilon)$ در زمان $\mathcal{O}(mn^{\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon^2}\log^2\frac{1}{\epsilon})})$ تقریب می‌زند، به طوری‌که m، تعداد نقاط و n، تعداد دیسک‌ها است. در فصل دوم برای حل دو مسئله پرکاربرد در گراف‌ها که عبارتند از کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر و مجموعه

[۲۹] APX-hard

[۳۰] NP-Complete

[۳۱] NP-Hard

مستقل بیشینه، روش‌های تقریبی ارائه می‌شود، و با ایده روش‌ها، در فصل سوم برای حل مسئله پوشش دیسک کمینه، یک روش تقریبی ارائه می‌شود.

در فصل سوم، NP-سخت بودن مسئله پوشش دیسک کمینه بررسی می‌شود، سپس انواع مختلف این مسئله بیان خواهند شد و برای حل آن‌ها الگوریتم‌های تقریبی با زمان چندجمله‌ای مطرح می‌شوند.

۴.۱ تاریخچه

در سال ۱۹۸۱، ماسویاما و همکاران[۳۲] ثابت کرده، که مسئله پوشش دیسک کمینه، NP-سخت است [۲۳] و بهترین الگوریتم تقریبی در سال ۱۹۹۵ توسط برونیمن[۳۳] و گودریچ [۳۴] [۴] مطرح شده که یک الگوریتم تقریبی با نسبت ثابت بزرگ (تعریف ۱۵.۲.۱ را ببینید) است و در زمان $\mathcal{O}(t^2 n \log(n) \log(\frac{n}{t}))$ که t اندازه پوشش دیسک بهینه است، اجرا می‌شود. در سال ۲۰۰۶ آمبوهل و همکاران[۳۵]، حالت وزن‌دار مسئله پوشش دیسک کمینه را که مسئله **پوشش دیسک کمینه وزن‌دار**[۳۶] نامیده می‌شود، مطرح کردند و یک الگوریتم ۷۲-تقریبی برای آن ارائه داده‌اند [۲].

تاکنون، بر روی مسئله پوشش دیسک کمینه، کارهای کمی صورت گرفته است. یکی از مسائل در زمینه گراف‌ها، که ارتباط نزدیکی با مسئله پوشش دیسک کمینه دارد و خیلی بیش‌تر مورد بررسی قرار گرفته است، مسئله کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر در گراف دیسک واحد است. گراف دیسک واحد، گرافی است که می‌توان همه رئوس آن را به صورت دیسک‌های واحد در صفحه در نظر گرفت و بین دو رأس آن یال وجود دارد، اگر و تنها اگر دیسک‌های متناظر این دو رأس با یک‌دیگر اشتراک داشته باشند [۹]. مسئله کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر در گراف دیسک واحد، به دنبال یک مجموعه احاطه‌گر با کم‌ترین اندازه در گراف دیسک واحد است. در ادامه برخی از کارهایی که روی این مسئله، صورت

---

[۳۲] Masuyama

[۳۳] Bronnimann

[۳۴] Goodrich

[۳۵] Ambuhl

[۳۶] Minimum weight disk cover problem، به ۲.۱.۳ رجوع شود.

گرفته، بیان می‌شوند.

در سال ۱۹۹۰، کلارک و همکاران[۳۷] ثابت کرده که مسئله کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر در گراف دیسک واحد، NP-سخت است [۹]. در سال ۱۹۹۸ هانت و همکاران[۳۸]، یک روش تقریبی با زمان چندجمله‌ای را با به‌کار بردن روش تغییر مکان[۳۹] [۱۵]، برای این مسئله مطرح کرده است [۱۷]. در سال ۲۰۰۸، نیبرگ[۴۰] روش همسایگی محلی را روی مسئله مشابه مطرح کرده [۲۵]، الگوریتمی که برای مسئله پوشش دیسک کمینه ارائه می‌شود از این روش ایده گرفته شده است و در فصل دوم، این روش به طور مفصل بررسی می‌شود.

چنگ[۴۱] در سال ۲۰۰۳، یک نوع جالب از مسئله کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر در گراف دیسک واحد را با این شرط که مجموعه احاطه‌گر لزوماً همبند است، در نظر گرفته و یک روش تقریبی با زمان چندجمله‌ای برای آن داده است [۷]. آمبوهل و همکاران در سال ۲۰۰۶، این مسئله را به مسئله مجموعه احاطه‌گر همبند با کم‌ترین وزن تعمیم داده [۲]، که یک تقریب ثابت روی این مسئله داده است و هانگ[۴۲] در سال ۲۰۰۸، نسبت تقریبی را از طریق یک الگوریتم دو مرحله‌ای به $(10 + \epsilon)$ بهبود داده است[۱۶]. در سال‌های ۲۰۰۷ [۲۶] و ۲۰۰۸ [۲۷] توسط شانگ[۴۳]، الگوریتم‌هایی که کم‌ترین مجموعه k-احاطه‌گر m-همبند را محاسبه می‌کنند، داده شده‌اند. کم‌ترین مجموعه k-احاطه‌گر m-همبند، به دنبال مجموعه S در گراف است به‌طوری‌که، این مجموعه m- همبند است (به تعریف ۱.۲.۱ مراجعه شود) و هر $p \in P \backslash S$ با حداقل k رأس در S مجاور باشد.

مسئله پوشش دیسک کمینه می‌تواند به عنوان تعمیمی از مسئله **مجموعه حمل و نقل کمینه**[۴۴]،

---

[۳۷] Clark

[۳۸] Hunt

[۳۹] Shifting strategy

[۴۰] Nieberg

[۴۱] Cheng

[۴۲] Huang

[۴۳] Shang

[۴۴] Minimum forwarding set

در طراحی شبکه بی‌سیم اد-هاک در نظر گرفته شود. در شبکه‌ها، پرش[۴۵] واحدی برای شمارش تعداد واسطهای انتقال داده بین دو رأس در شبکه است، و منظور از مجموعه همسایه‌های k-پرش یک رأس مبدأ، مجموعه رئوسی است که تعداد واسطهای بین آن‌ها و رأس مبدأ، k است. در مسئله مجموعه حمل و نقل کمینه، $\mathcal{A}$ رأس مبدأ، $\mathcal{D}$ مجموعه همسایه‌های ۱-پرش رأس $\mathcal{A}$ و $\mathcal{P}$ مجموعه همسایه‌های ۲-پرش آن داده شده است، مسئله به دنبال محاسبه زیرمجموعه $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$ با کم‌ترین اندازه است به طوری‌که هر رأس $\mathcal{P}$، درون ناحیه پوشش حداقل یک رأس از $\mathcal{F}$ باشد. از نقطه نظر تئوری، مسئله مجموعه حمل و نقل کمینه، یک حالت خاص از مسئله پوشش دیسک کمینه است، به این صورت که در این مسئله، فرض شده است که همه رئوس ۲-پرش، بیرون دیسک واحد با مرکز رأس مبدأ $\mathcal{A}$ قرار دارند و همه رئوس ۱-پرش درون این دیسک هستند [۵]. در سال ۲۰۰۴، کالینسکو[۴۶] یک الگوریتم ۳-تقریبی با زمان اجرای $\mathcal{O}(n^{۲})$ برای آن داده است [۵].

در سال ۲۰۰۷، سان و همکاران[۴۷] برای مسئله پوشش دیسک کمینه، یک الگوریتم چندجمله‌ای بهینه مطرح کرده [۲۸]، در این مسئله، یک مجموعه از دیسک‌ها با شعاع ثابت $\mathcal{R}$ داده شده، یک زیرمجموعه از دیسک‌ها که اجتماع آن‌ها با اجتماع دیسک‌های داده شده برابر باشد، محاسبه می‌شود، که با مسئله پوشش دیسک کمینه در این پایان‌نامه که به دنبال دیسک‌ها با کم‌ترین تعداد است و از اجتماع دیسک‌ها مستقل است، متفاوت است.

[۴۵] hop

[۴۶] Clinescu

[۴۷] Sun