بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

منظم سازی روش‌های کرانک-نیکلسون و بررسی روش تجزیه دامنه غیر هم پوشان برای حل معادله حرارت

پژوهشگر

نگین احمدی هفشجانی

استاد راهنما

دکتر محمد شفیع دهاقین

استاد مشاور

دکتر رضا خوش سیر

مهر ۱۳۹۲

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است،

به پاس قلب های بزرگشان، که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید،

و به پاس ایثار و محبت های بی دریغشان، که هرگز فروکش نمی کند،

این مجموعه را به پدر و مادر و همسر عزیزم تقدیم می کنم.

اولین چکه ناودان بلند یک احساس را، در قالب کلامی از جنس تنفس با غنچه های معصوم یاس، به روی حجم سپید یک برگه می ریزم و آن را به لهجه های همه ی پروانه صفتهای این گیتی بی انتها به آستان نیلوفری دلهای زلال هدیه می کنم :

ای یزدان پاک تو را سپاس می گویم،

که به حکمت بی انتهایت مرا یاری کردی،

و به رحمت نعمتهایت را بر من تمام کردی،

خانواده ای خوب به من عطا کردی که در هر حال پشتیبانی ام کنند و استادانی سر راهم نهادی تا دانش و علمشان را بی ریا در اختیارم بگذارند.

بر خود لازم می دانم از همه عزیزانی که در جهت به سرانجام رساندن این رساله مرا یاری نمودند، قدردانی نمایم . مراتب قدردانی و سپاس خود را از زحمات بی دریغ استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر محمد شفیع دهاقین ابراز می نمایم . همچنین از استادان گرانقدر، دکتر مهدی

قاسمی و دکتر علیرضا انصاری که داوری این رساله را بر عهده داشتند و نیز دکتر رضا خوش سیر که سمت مشاور را به عهده داشتند، قدردانی می نمایم.

با آرزوی موفقیت برای تمام عزیزان

نگین احمدی
مهر ۱۳۹۲

چکیده

در این پایان نامه به بیان روش‌های عددی برای حل معادله‌ی حرارت پسرو - پیشرو می‌پردازیم. برای این منظور از دو تکنیک تنظیم و تجزیه‌ی دامنه‌ی غیر هم پوشان استفاده می‌کنیم. روش تنظیم با اضافه کردن عباراتی، جهت منظم سازی معادله‌ی حرارت پسرو بدحالت مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش تجزیه‌ی دامنه‌ی غیر هم پوشان بر پایه‌ی یک فرآیند تکراری با در نظر گرفتن حدس اولیه استوار است.

کلمات کلیدی: روش تنظیم، روش تجزیه‌ی دامنه‌ی غیر هم پوشان، معادله‌ی حرارت پسرو- پیشرو، فرآیند تکراری.

فهرست مطالب

مقدمه

حل عددی معادله‌ی حرارت، مسئله‌ای است که از دیرباز مورد توجه محققان بوده است. معادله‌ی حرارت، یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی با شرایط مرزی مختلف است. دما در این سیستم تابعی با دو متغیر زمان و مکان است. به طور مثال جسمی با دمای اولیه یا دمای نهایی داریم و بررسی می‌کنیم با گذشت زمان دمای هر نقطه چه میزان تغییر خواهدکرد. مسئله‌ی مطرح شده در بسیاری از کاربردها، مانند مسئله‌ی ذره‌ی شتاب‌دار تصادفی [۲] ، مدل لوبیای الکترون لاروزا [۶] ، جریان سیال دو بعدی و...دیده می‌شود. این مسائل اغلب در ریاضی فیزیک [۲، ۵، ۱۰، ۱۱، ۱۵، ۱۶]، با روش کمترین مربعات در [۴] ، روش‌های استفاده از تبدیلات بر روی سیستم‌ها در [۳] ، روش المان محدود پیوسته و گسسته‌ی گالرکین در [۱۲، ۱۳] ، قابل حل است. روش المان گالرکین برای مسائل غیر خطی در [۲۲، ۲۳] مورد بررسی قرار گرفته است.
معادله‌ی حرارت بنابر شرایط اولیه به دو نوع پسرو و پیشرو تقسیم می‌شود. مسئله‌ی پسرو نسبت به سه حالت وجود، یکتایی و وابستگی پیوسته‌ی جواب روی اطلاعات اولیه‌ی دلخواه بدحالت است، [۱۷، ۱۹، ۲۶، ۲۸] . اگرچه این مسئله می‌تواند روی اطلاعات اولیه‌ی خاص، خوش حالت باشد و جواب یکتا داشته باشد، اما محاسبه‌ی چنین جوابی با روش‌های پایدار برای زمان‌های طولانی با چالش‌های زیادی رو به رو است [۹، ۱۹، ۲۹] .
در این پایان‌نامه از دو روش تنظیم و تجزیه‌ی دامنه‌ی غیرهم پوشان برای به دست آوردن حل عددی معادله‌ی حرارت استفاده می‌کنیم. جالب خواهد بود که بدانیم آیا این نتایج را می‌توان با روش‌های موجود در [۷، ۸، ۱۸، ۲۰، ۲۱، ۲۴، ۳۰، ۳۲] محاسبه کرد یا نه؟
این رساله شامل چهار فصل است. در فصل اول به معرفی معادله‌ی حرارت پسرو و پیشرو و نحوه‌ی تبدیل دو معادله می‌پردازیم. فصل دوم، به دو روش تفاضل متناهی به نام‌های اویلر و کرانک نیکلسون برای حل مسئله‌ی مقدار مرزی اولیه اختصاص داده شده است. در این فصل دقت دو روش برای زمان و مکان متفاوت سنجیده می‌شود و برای مقایسه‌ی کارایی دو روش مثال‌هایی را مطرح می‌کنیم.

در فصل سوم راجع به روش تنظیم و مثال‌های قابل اجرا با این روش بحث می‌کنیم. اساس تکنیک تنظیم، اضافه کردن عبارتی به معادله‌ی حرارت به منظور منظم کردن آن است.
در فصل چهارم به بررسی روش تجزیه‌ی دامنه‌ی غیر هم پوشان خواهیم پرداخت. در این فصل ضمن شرح روش ذکر شده به بیان و اثبات چند لم مرتبط با همگرایی روش می‌پردازیم و همگرایی و پایداری روش را اثبات می‌کنیم.

فصل ۱
مقدمه

مساله‌ی هدایت گرما از طریق یک رسانای متوسط که یک فضای Ω را اشغال می‌کند، با این شرط که هیچ جریان گرمایی روی مرز ناحیه وجود نداشته باشد، به صورت

$$\begin{cases} u_t - \nu u_{xx} = \circ & , \quad x \in \Omega \quad t > \circ \\ u_x|_{\partial\Omega} = \circ & , \quad t > \circ \\ u(x, \circ) = u_\circ(x) & , \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{۱.۱}$$

فرمول‌بندی می‌شود. که در آن $u(x,t)$ دما، $u_\circ(x)$ دمای اولیه‌ی توزیعی و $\nu > \circ$ ضریب هدایت گرما نامیده می‌شوند. این مسئله به دلیل وجود، یکتایی و وابستگی پیوسته‌ی جواب به داده‌های مرزی، به عنوان مسئله‌ای خوش-طرح شناخته می‌شود. مساله‌ی (۱.۱) معمولا به عنوان یک مساله‌ی پیشرو در زمینه‌ی معادله‌ی حرارت مطرح می‌شود. مساله‌ی پسرو مربوط به معادله‌ی حرارت، به مساله‌ی یافتن دمای اولیه‌ی توزیعی مساله‌ی پیشرو با دانستن دمای نهایی توزیعی$v_\circ(x)$ در زمان T به صورت زیر اشاره دارد:

$$\begin{cases} u_t - \nu u_{xx} = \circ & , \quad x \in \Omega, t \in [\circ, T] \\ u_x|_{\partial\Omega} = \circ \\ u(x, T) = v_\circ(x) & , \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{۲.۱}$$

مسئله‌ی پسرو بر خلاف مسئله‌ی پیشرو، نسبت به سه حالت وجود، یکتایی و وابستگی پیوسته‌ی جواب به داده‌های مرزی دلخواه بدحالت است. اعمال تغییر متغیر $s = T - t$ ، مساله‌ی پسرو فوق را به مساله‌ی

$$\begin{cases} v_s + \nu v_{xx} = \circ & , \quad x \in \Omega, s \in [\circ, T] \\ v_x|_{\partial\Omega} = \circ \\ v(x, \circ) = v_\circ(x) & , \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{۳.۱}$$

تبدیل می‌کند که در آن، $v(x,s)=u(x,T-t)$. برای اثبات این مطلب به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} v_s(x,s) &= \frac{\partial v(x,s)}{\partial s} = \frac{\partial v(x,T-t)}{\partial (T-t)} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \times \frac{dt}{d(T-t)} \\ &= = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u_t(x,t) \\ v_x(x,s) &= \frac{\partial v(x,s)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,T-t)}{\partial x} = u_x(x,t) \\ v_{xx}(x,s) &= \frac{\partial^{2} v(x,s)}{\partial x^{2}} = \frac{\partial^{2} u(x,t)}{\partial x^{2}} = u_{xx}(x,t) \end{aligned}$$

با جای‌گذاری روابط فوق در دستگاه (۲.۱) ، دستگاه (۳.۱) نتیجه می‌شود.

۱.۱ طرح های عددی ونتایج آن‌ها

دامنه‌ی تک بعدی داده شده‌ی $\Omega=[0,1]$ را به M زیر بازه با طول‌های برابر $\Delta x=\frac{1}{M}$ تقسیم می‌کنیم و نقاط شبکه‌ای را با x_m ، $m=0,1\dots M$ نشان می‌دهیم. همچنین زمان T را به N زیربازه به صورت $t_n=n\times\Delta t$، $n=0,1\dots N$ با طول گام $\Delta t=\frac{T}{N}$ تقسیم می‌کنیم. مقدار جواب دقیق در (x_m,t_n) با $v(x_m,t_n)$ ومقدار جواب عددی با v_m^n نشان داده می‌شود. شرایط مرزی صفر نیومن در هر دو نقطه‌ی انتهایی بازه‌ی $[0,1]$ برای $t>0$ با دقت مرتبه‌ی (۳) به صورت

$$v(0,t) = \frac{4v(\Delta x,t)-v(2\Delta x,t)}{3} + o((\Delta x)^{3}) \tag{۴.۱}$$

$$v(1,t) = \frac{4v(1-\Delta x,t)-v(1-2\Delta x,t)}{3} + o((\Delta x)^{3}) \tag{۵.۱}$$

قابل محاسبه است. برای به‌دست آوردن رابطه‌ی (۴.۱) بسط سری تیلور توابع $v(\Delta x,t)$ و $v(2\Delta x,t)$ را حول نقطه‌ی صفر به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} v(\Delta x,t) &= v(0,t)+\Delta x v_x(0,t)+\frac{(\Delta x)^{2}}{2!}v_{xx}(0,t)+o(\Delta x)^{3} \\ v(2\Delta x,t) &= v(0,t)+2\Delta x v_x(0,t)+\frac{(2\Delta x)^{2}}{2!}v_{xx}(0,t)+o(\Delta x)^{3}. \end{aligned}$$

از ترکیب روابط فوق و با در نظر گرفتن شرط $v_x(0,t)=0$ از معادله‌ی حرارت، رابطه‌ی

$$4v(\Delta x,t)-v(2\Delta x,t)=3v(0,t)+3o(\Delta x)^{3}$$

و یا به طور معادل

$$v(0,t)=\frac{4v(\Delta x,t)-v(2\Delta x,t)}{3}+o(\Delta x)^3$$

نتیجه می‌شود. برای به‌دست آوردن رابطه‌ی (۵.۱) ابتدا بسط سری تیلور توابع $v(1-\Delta x,t)$ و $v(1-2\Delta x,t)$ را حول نقطه‌ی یک به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} v(1-\Delta x,t) &= v(1,t)-\Delta x v_x(1,t)+\frac{(\Delta x)^2}{2!}v_{xx}(1,t)+o(\Delta x)^3 \\ v(1-2\Delta x,t) &= v(1,t)-2\Delta x v_x(1,t)+\frac{(2\Delta x)^2}{2!}v_{xx}(1,t)+o(\Delta x)^3 \end{aligned}$$

با ترکیب دو رابطه‌ی فوق و با در نظر گرفتن شرط $v_x(0,t)=0$ از معادله‌ی حرارت، به رابطه‌ی

$$4v(1-\Delta x,t)-v(1-2\Delta x,t)=3v(1,t)+3o(\Delta x)^3$$

می‌رسیم و این رابطه با رابطه‌ی (۵.۱) معادل است.

فصل ۲
معرفی دو روش تفاضل متناهی

۱.۲ طرح اویلر

در این فصل به معرفی دو روش تفاضل متناهی برای حل مسئله‌ی اولیه می‌پردازیم. فرض کنید عملگرهای تفاضلات متناهی پسرو و پیشرو را به ترتیب با نمادهای D^+ و D^-نشان دهیم. معادله‌ی تفاضلات متناهی برای معادله‌ی حرارت پسرو با روش اویلر به صورت

$$\frac{D_t^+ v_m^n}{\Delta t} = -\nu \frac{D_x^+ D_x^- v_m^n}{(\Delta x)^۲} \qquad \forall m \neq ۰, M \tag{۱.۲}$$

مطرح می‌شود. رابطه‌ی (۱.۲) هم ارز معادله‌ی زیر است:

$$\frac{v_m^{n+۱} - v_m^n}{\Delta t} = -\nu \frac{D_x^+ (v_m^n - v_{m-۱}^n)}{(\Delta x)^۲} = -\nu \frac{v_{m+۱}^n - ۲ v_m^n + v_{m-۱}^n}{(\Delta x)^۲}. \tag{۲.۲}$$

برای ساختار عددی جواب، انتخاب مقادیر مناسب Δx و Δt حائز اهمیت است. در صورت انتخاب مناسب Δx و Δt جواب های عددی و دقیق خیلی از هم فاصله ندارند. با جای‌گذاری جواب پیشنهادی $v_m^n = \rho^n e^{i\xi m}$ که در آن $\xi = k\pi\Delta x$ و $\rho = e^{\beta\Delta t}$،در رابطه‌ی (۲.۲)، داریم:

$$\frac{\rho^{n+۱} e^{i\xi m} - \rho^n e^{i\xi m}}{\Delta t} = -\nu \frac{\rho^n e^{i\xi(m+۱)} - ۲\rho^n e^{i\xi m} + \rho^n e^{i\xi(m-۱)}}{(\Delta x)^۲}.$$

با فاکتورگیری عبارت $\rho^n e^{i\xi m}$ از دو طرف تساوی بالا رابطه‌ی

$$\frac{\rho^n e^{i\xi m}(\rho-۱)}{\Delta t}=-\nu\frac{\rho^n e^{i\xi m}(e^{i\xi}-۲+e^{-i\xi})}{(\Delta x)^۲}$$

به‌دست می‌آید که با حذف عبارت $\rho^n e^{i\xi m}\neq ۰$ از دو طرف آن نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\rho-۱}{\Delta t}=-\nu\frac{e^{i\xi}-۲+e^{-i\xi}}{(\Delta x)^۲}.$$

با به کار گرفتن رابطه‌ی دمواور $e^{i\xi}=\cos\xi+i\sin\xi$ در تساوی فوق داریم:

$$\frac{\rho-۱}{\Delta t}=-\nu\frac{(\cos\xi+i\sin\xi-۲+\cos\xi-i\sin\xi)}{(\Delta x)^۲}$$

که از آن ρ به صورت

$$\rho=۱-\nu\frac{\Delta t}{(\Delta x)^۲}(-۲+۲\cos\xi)$$

به‌دست می‌آید. با اعمال رابطه‌ی مثلثاتی $\cos\xi=۱-۲\sin^۲\frac{\xi}{۲}$ درعبارت فوق داریم:

$$\rho=۱-\nu\frac{\Delta t}{(\Delta x)^۲}[-۴\sin^۲(\frac{\xi}{۲})].$$

که با جای‌گذاری $r=\frac{\Delta t}{(\Delta x)^۲}$ و $\xi=k\pi\Delta x$ در آن، رابطه‌ی

$$\rho=۱+۴\nu r\sin^۲(\frac{k\pi\Delta x}{۲}). \qquad (۳.۲)$$

به‌دست می‌آید. معادله‌ی بالا رابطه‌ی پراکندگی برای روش اویلر است. اگر در معادله‌ی (۳.۲)، Δx را به صفر میل دهیم آنگاه به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\longrightarrow ۰}[۱+۴\nu\frac{\Delta t}{(\Delta x)^۲}sin^۲(\frac{k\pi\Delta x}{۲})] &= ۱+\lim_{\Delta x\longrightarrow ۰}۴\nu\frac{\Delta t}{(\Delta x)^۲}\times\frac{k^۲\pi^۲(\Delta x)^۲}{۴}\times\frac{\sin^۲(\frac{k\pi\Delta x}{۲})}{\frac{k^۲\pi^۲(\Delta x)^۲}{۴}}\\ &= ۱+\nu\Delta t(k\pi)^۲.\end{aligned}$$

درعبارت $\beta = \frac{\ln|\rho|}{\Delta t}$ که در آن $\rho = ۱ + \nu\Delta t(k\pi)^۲$، اگر Δt را به صفر میل دهیم آنگاه

$$\lim_{\Delta t \longrightarrow ۰} \beta = \lim_{\Delta t \longrightarrow ۰} \frac{\ln|۱ + \nu\Delta t(k\pi)^۲|}{\Delta t} = \frac{۰}{۰}.$$

برای رفع ابهام حد فوق از قاعده‌ی هوپیتال به شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{\Delta t \longrightarrow ۰} \frac{\nu(k\pi)^۲}{۱ + \nu\Delta t(k\pi)^۲} = \nu(k\pi)^۲. \qquad (۴.۲)$$

به عبارت به‌دست آمده در (۴.۲) سرعت رشد دقیق گوییم.

۲.۲ طرح کرانک نیکلسون

روش کرانک نیکلسون را به طور مختصر به صورت CN نشان می‌دهیم. در این روش، معادله‌ی حرارت پسرو به صورت

$$\frac{D_t^+ v_m^n}{\Delta t} = -\frac{\nu}{۲(\Delta x)^۲}(D_x^+ D_x^- v_m^{n+۱} + D_x^+ D_x^- v_m^n) \qquad (۵.۲)$$

تقریب زده می‌شود. معادله‌ی (۵.۲) هم ارز رابطه‌ی زیر است:

$$\frac{v_m^{n+۱} - v_m^n}{\Delta t} = -\frac{\nu}{۲(\Delta x)^۲}(v_{m+۱}^{n+۱} - ۲v_m^{n+۱} + v_{m-۱}^{n+۱} + v_{m+۱}^n - ۲v_m^n + v_{m-۱}^n). \qquad (۶.۲)$$

با جای‌گذاری جواب پیشنهادی $v_m^n = \rho^n e^{i\xi m}$ که در آن $\xi = k\pi\Delta x$ و $\rho = e^{\beta\Delta t}$ در رابطه‌ی (۶.۲) داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\rho^{n+۱}e^{i\xi m} - \rho^n e^{i\xi m}}{\Delta t} &= -\frac{\nu}{۲(\Delta x)^۲}(\rho^{n+۱}e^{i\xi(m+۱)} - ۲\rho^{n+۱}e^{i\xi m} + \rho^{n+۱}e^{i\xi(m-۱)} \\ &+ \rho^n e^{i\xi(m+۱)} - ۲\rho^n e^{i\xi m} + \rho^n e^{i\xi(m-۱)}).\end{aligned}$$

با فاکتورگیری عبارت $\rho^n e^{i\xi m}$ از دو طرف تساوی بالا داریم:

$$\frac{\rho^n e^{i\xi m}(\rho - ۱)}{\Delta t} = -\frac{\nu\rho^n e^{i\xi m}}{۲(\Delta x)^۲}(\rho e^{i\xi} - ۲\rho + \rho e^{-i\xi} + e^{i\xi} - ۲ + e^{-i\xi}).$$

که با حذف عبارت $\rho^n e^{i\xi m} \neq 0$ از آن رابطه‌ی

$$\frac{\rho - 1}{\Delta t} = -\frac{\nu}{2(\Delta x)^2}(\rho e^{i\xi} - 2\rho + \rho e^{-i\xi} + e^{i\xi} - 2 + e^{-i\xi})$$

به‌دست می‌آید. با به کار گرفتن رابطه‌ی دمواور $e^{i\xi} = \cos\xi + i\sin\xi$ در تساوی بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{\rho - 1}{\Delta t} = -\frac{\nu}{2(\Delta x)^2}(\rho(2\cos\xi - 2) + (2\cos\xi - 2))$$

که با اعمال رابطه‌ی مثلثاتی $\cos\xi = 1 - 2\sin^2\frac{\xi}{2}$ درآن به رابطه‌ی

$$\rho = 1 + \frac{-\nu\Delta t}{2(\Delta x)^2}(-4\rho\sin^2(\frac{\xi}{2}) - 4\sin^2(\frac{\xi}{2}))$$

می‌رسیم. معادله‌ی بالا با معادله‌ی

$$\rho - \frac{2\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\rho\sin^2(\frac{\xi}{2}) = 1 + \frac{2\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(\frac{\xi}{2})$$

هم ارز است. با فاکتور گیری ρ از سمت چپ رابطه‌ی فوق داریم:

$$\rho(1 - \frac{2\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(\frac{\xi}{2})) = 1 + \frac{2\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(\frac{\xi}{2}).$$

به این ترتیب با جای‌گذاری $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ و $\xi = k\pi\Delta x$ در عبارت فوق رابطه‌ی پراکندگی روش کرانک نیکلسون به صورت :

$$\rho = \frac{1 + 2\nu r\sin^2(\frac{k\pi\Delta x}{2})}{1 - 2\nu r\sin^2(\frac{k\pi\Delta x}{2})} \tag{7.2}$$

به‌دست می‌آید. اگر در رابطه‌ی (۷.۲) Δx را به صفر میل دهیم آنگاه :

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\longrightarrow ۰}\rho &= \lim_{\Delta x\longrightarrow ۰}\frac{۱+۲\nu\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^{۲}}\sin^{۲}(\dfrac{k\pi\Delta x}{۲})}{۱-۲\nu\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^{۲}}\sin^{۲}(\dfrac{k\pi\Delta x}{۲})}\\
&= \lim_{\Delta x\longrightarrow ۰}\frac{۱+۲\nu\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^{۲}}\times\dfrac{(k\pi\Delta x)^{۲}}{۴}\times\dfrac{\sin^{۲}(\frac{k\pi\Delta x}{۲})}{\frac{(k\pi\Delta x)^{۲}}{۴}}}{۱-۲\nu\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^{۲}}\times\dfrac{(k\pi\Delta x)^{۲}}{۴}\times\dfrac{\sin^{۲}(\frac{k\pi\Delta x}{۲})}{\frac{(k\pi\Delta x)^{۲}}{۴}}}\\
&= \frac{۱+\nu(k\pi)^{۲}\dfrac{\Delta t}{۲}}{۱-\nu(k\pi)^{۲}\dfrac{\Delta t}{۲}}.
\end{aligned}$$

اکنون اگر در عبارت $\beta=\dfrac{\ln|\rho|}{\Delta t}$ که در آن $\rho\sim\dfrac{۱+\nu(k\pi)^{۲}\frac{\Delta t}{۲}}{۱-\nu(k\pi)^{۲}\frac{\Delta t}{۲}}$، Δt را به صفر میل دهیم آنگاه:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t\longrightarrow ۰}\beta &= \lim_{\Delta t\longrightarrow ۰}\frac{\ln\left|\dfrac{۱+\nu(k\pi)^{۲}\frac{\Delta t}{۲}}{۱-\nu(k\pi)^{۲}\frac{\Delta t}{۲}}\right|}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\longrightarrow ۰}\frac{\ln|۱+\nu(k\pi)^{۲}\frac{\Delta t}{۲}|-\ln|۱-\nu(k\pi)^{۲}\frac{\Delta t}{۲}|}{\Delta t}=\frac{۰}{۰}.
\end{aligned}$$

برای رفع ابهام حد فوق از قاعده‌ی هوپیتال به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{\Delta t\longrightarrow ۰}\beta=\lim_{\Delta t\longrightarrow ۰}\frac{\frac{۱}{۲}\nu(k\pi)^{۲}}{۱+\dfrac{\nu(k\pi)^{۲}\Delta t}{۲}}-\lim_{\Delta t\longrightarrow ۰}\frac{-\frac{۱}{۲}\nu(k\pi)^{۲}}{۱-\dfrac{\nu(k\pi)^{۲}\Delta t}{۲}}=\nu(k\pi)^{۲}. \tag{۸.۲}$$

به رابطه‌ی (۸.۲) سرعت رشد دقیق و یا رابطه‌ی پراکندگی دقیق برای روش کرانک نیکلسون می‌گوییم. در روش کرانک نیکلسون برای $r>\dfrac{۱}{۲\nu}$ رابطه‌ی پراکندگی یک رشد نامحدود (تکین) در $k=k_u$ به صورت زیر دارد:

$$k_u = \frac{۲}{\pi \Delta x} arcsin(\frac{\Delta x}{\sqrt{۲\nu\Delta t}}). \qquad (۹.۲)$$

برای نشان دادن این مطلب، کافی است مخرج کسر رابطه‌ی پراکندگی (۷.۲) را مساوی با صفر قراردهیم، در این صورت رابطه‌ی

$$۱ - ۲\nu\frac{\Delta t}{\Delta x^۲} sin^۲(\frac{k\pi\Delta x}{۲}) = ۰$$

و یا به طورمعادل رابطه‌ی

$$\frac{\Delta x^۲}{۲\nu\Delta t} = sin^۲(\frac{k\pi\Delta x}{۲})$$

به‌دست می‌آید. باجذر گرفتن از دو طرف تساوی فوق داریم:

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{۲\nu\Delta t}} = sin(\frac{k\pi\Delta x}{۲}).$$

با اعمال تابع $\sin^{-۱}$ بر دو طرف رابطه‌ی بالا عبارت :

$$\frac{k\pi\Delta x}{۲} = arcsin(\frac{\Delta x}{\sqrt{۲\nu\Delta t}})$$

به‌دست می‌آید و لذا رشد نامحدود رابطه‌ی پراکندگی به ازای

$$k_u = k = \frac{۲}{\pi\Delta x} arcsin(\frac{\Delta x}{\sqrt{۲\nu\Delta t}})$$

اتفاق می‌افتد .

درشکل های (۲ . ۱) و (۲ . ۲) رابطه‌ی پراکندگی دقیق وعددی به ازای مقادیر مختلفی از زمان و مکان در هر مرحله برای دو روش اویلر وCN مقایسه می‌شود. این نمودارها به واسطه‌ی مقادیر بزرگ سرعت رشد به صورت $log - log$ رسم شده‌اند.

نمودار پراکندگی عددی برای روش CN متناظر با $\Delta x = ۱۰^{-۳}$ و $\Delta t = ۱۰^{-۴}$به ازای $r > \frac{۱}{۲\nu}$ به وضوح تکین بودن در $k = k_u$ را نشان می‌دهد. این شکل ها نشان می‌دهد که اگر عدد موج تقریبا تا ۲۵ باشد دو روش مشابه هستند.