إنه من سليمان وإنه

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

پایان نامه

دکتری رشته ریاضی محض

عنوان:
ابرگروه‌ها، ابرحلقه‌ها و روابط اساسی

استاد راهنما:

دکتر بیژن دواز

استاد مشاور:

دکتر محمد علی ایرانمنش

پژوهش و نگارش:

سعید میروکیلی

تیر ماه ۱۳۸۷

به نشانه‌ی سپاسی ژرف و خالصانه،

تقدیم به

پدر و مادرم که مظهر عشق و استقامت در زندگی من هستند.

و تقدیم به

همسرم و تمام کسانی که دوستشان دارم.

تقدیر و تشکر

در اینجا بر خود لازم می‌دانم از کلیه کسانی که من را در انجام این رساله یاری و همراهی کرده‌اند، تشکر نمایم و خوشحالم که از آن‌ها یاد گرفتم و با آن‌ها کار کردم.

در ابتدا از استادان گرامی؛

جناب آقای دکتر بیژن دواز به عنوان استاد راهنما که با قبول راهنمایی این رساله و در نهایت دلسوزی و همیاری، با کمک‌ها و پیشنهادات ارزشمندشان در طول این سال‌ها افتخار بزرگی را نصیب اینجانب کردند و دقت نظر ایشان که باعث شد در مسیر درست گام بردارم.

جناب آقای دکتر محمد علی ایرانمنش به عنوان استاد مشاور، به خاطر راهنمایی و زحماتی که برای اینجانب کشیدند.

داوران محترم آقایان دکتر علی ایرانمنش، دکتر رضا عامری، دکتر سید محمد صادق مدرس مصدق و دکتر سید محمد مشتاقیون به خاطر پذیرش مسئولیت داوری این پایان نامه از سوی ایشان و توفیق بزرگی که نصیب اینجانب نموده‌اند.

جناب آقای دکتر سید محمد انوریه که مانند یک معلم و برادر بزرگتر و به عنوان همکار و همکلاسی در این راه کمک شایانی به اینجانب نموده‌اند.

سرکار خانم عابدینی و خانم عباسی‌زاده به خاطر دلسوزی‌ها و زحمات بی دریغشان.

از تمام **معلمان و استادان بزرگم** که باعث پیشرفت اینجانب بوده‌اند.

همچنین از همراهی و همقدمی؛ **همسرم** که این دوران را تحمل نموده و همواره مشوق اینجانب بوده‌اند.

در پایان با تشکر عاشقانه از **پدر، مادر، برادران و خواهرانم** که بدون پشتیبانی و راهنمایی‌هایشان امکان به پایان رساندن این رساله برای اینجانب امری غیر ممکن بود.

بسمه تعالی

دانشگاه یزد

مدیریت تحصیلات تکمیلی

صورتجلسه دفاعیه پایان نامه دوره دکتری

جلسه دفاعیه پایان نامه تحصیلی آقای سعید میروکیلی
دانشجوی دکترای دانشکده ریاضی دانشگاه یزد در رشته ریاضی محض (جبر)
تحت عنوان : ابرگروه‌ها، ابرحلقه‌ها و روابط اساسی
و تعداد واحد ۲۰ در تاریخ ۸۷/۴/۱۹

باحضور اعضای هیات داوران متشکل: از نام و نام خانوادگی امضا

۱. استادان راهنما : دکتر بیژن دواز

۲. استاد مشاور: دکتر محمد علی ایرانمنش

۳. داوران خارج از گروه : الف) دکتر علی ایرانمنش
ب) دکتررضا عامری

۴. داوران داخل گروه : الف) دکتر سید محمد صادق مدرس مصدق
ب) دکتر سید محمد مشتاقیون

تشکیل گردید و پس از ارزیابی پایان نامه توسط هیات داوران با درجه عالی و نمره :
به عدد ......۲۰........ به حروف ......بیست............ مورد تصویب قرار گرفت.

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)
نام و نام خانوادگی : احمد سوهانکار
امضا

چکیده

از مهمترین ابزارها در نظریه ابرساختارهای جبری، روابط اساسی می‌باشند. در واقع رابطه اساسی کوچکترین رابطه هم‌ارزی روی یک ابرساختار جبری است به‌طوری‌که رده‌های خارج‌قسمتی آن به‌وسیله رابطه هم‌ارزی داده شده یک ساختار جبری تشکیل دهد. ابرگروه‌های $n-$ تایی تعمیمی از گروه‌ها، ابرگروه‌های از نوع مارتی و گروه‌های $n-$ تایی هستند. در این رساله به بررسی شرایطی می‌پردازیم که رابطه β روی نیم‌ابرگروه‌های $n-$ تایی یک رابطه هم‌ارزی باشد.

همچنین رابطه اساسی γ^* روی ابرگروه‌های $n-$ تایی معرفی و سپس با استفاده از مفهوم فضاهای هندسی به‌طور قوی انتقالی ثابت می‌کنیم که روابط β و γ روی ابرگروه $n-$ تایی دلخواه روابط هم‌ارزی هستند. همچنین نتایجی جدید در زمینه ابرگروه‌های $n-$ تایی ارائه می‌دهیم.

در بخش دوم این پایان نامه، رابطه اساسی Γ^* و رابطه اساسی جابجایی α^* روی ابرحلقه‌ها را مورد بررسی قرار داده و نشان می‌دهیم که روی ابرمیدان دلخواه، روابط Γ و α روابط انتقالی هستند، یعنی $\Gamma = \Gamma^*$ و $\alpha = \alpha^*$. همچنین قضایا و نتایج جدید را با استفاده از روابط اساسی روی ابرحلقه چندجمله‌ای‌ها و ابرحلقه‌های کراسنر به‌دست خواهیم آورد.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تاریخچه و مقدمه

۱.۱ تاریخچه و مقدمه

ای صاحب حمد و ثنا، با تمام وجود به درگاهت سجده شکر می‌گذارم که توفیق نگارش این پایان‌نامه را به من عطا فرمودی.

در آغاز تاریخچه کوتاهی از نظریه ابرساختارها بیان می‌شود. در سال ۱۹۳۴ در هشتمین کنگره ریاضی‌دانان اسکاندیناوی، مارتی[۱] برای اوّلین بار مفهوم ابرگروه را در حوزه‌های مختلفی همچون توابع جبری، توابع گویا و گروه‌های ناجابجایی استفاده نمود. این اولین گام در تاریخ ریاضیات در نظریه ابرساختارهای جبری بود. از آن زمان به بعد نظریه ابرساختارهای جبری در سرتاسر جهان از جمله اروپا (فرانسه، ایتالیا، یونان، رومانی و ...)، استرالیا، آمریکا، کانادا و کمی دیرتر در آسیا و در کشورهای جمهوری اسلامی ایران، چین، تایلند، ژاپن، کره و اردن گسترش یافت. در ابتدا این نظریه در راستای ارتباط بین گروه‌ها و کاربردهای مختلف آن در هندسه (هندسه کروی و هندسه تصویری) و با استفاده از مفهوم ابرگروه‌ها به کار گرفته می‌شد.

این نظریه، توسعهٔ خود را از سال ۱۹۶۰، زمانی که محدوده تحقیق و پژوهش گسترش یافت، شروع کرد. در فرانسه، کراسنر[۲]، کوس‌کاس[۳] و سورآ[۴] تحقیقات خود را در نظریه نیم‌ابرگروه‌ها و نظریه روابط روی ابرساختارها و ابرحلقه‌های کراسنر شروع کردند. در یونان، میتاس[۵]، استراتی‌گوپولوس[۶]، کونستانتینیدو[۷]، سرافیمیدیس[۸] و ماسوروس[۹] ابرگروه‌های کانونی، ابرحلقه‌ها و ابرمدول‌ها، ابرشبکه‌ها و کاربرد ابرمیدان‌ها در نظریه اتوماتا را مورد مطالعه قرار دادند. وجیوک‌لیس[۱۰] به آنالیز ابرگروه‌های دوری، $P-$ ابرساختارها و نمایش H_v- گروه‌ها پرداخت.

[۱] Marty
[۲] Krasner
[۳] Koskas
[۴] Sureau
[۵] Mittas
[۶] Stratigopoulos
[۷] Konstantinidou
[۸] Serafimidis
[۹] Massouros
[۱۰] Vougiouklis

مقالات پر ارزش در زمینه ابرگروه‌های منظم، ابرگروه‌های کامل، قلب ابرگروه‌ها و کاربردهای آن در نظریه ترکیبیات و هندسه توسط گروهی از محققین ایتالیایی از جمله، کورسینی[۱۱]، دی سالوو[۱۲]، میگلیوراتو[۱۳]، دی ماریا[۱۴] و فرنی[۱۵] به جهان ریاضیات ارائه شدند.

در شروع دهه ۹۰ میلادی، ریاضی‌دانان رومانیایی در پنجمین کنفرانس ابرساختارهای جبری و کاربردهای آن در سال ۱۹۹۳ وارد این نظریه شدند که می‌توان به نام‌هایی همچون استفانسکو[۱۶]، لئوریانو[۱۷]، پلِ‌آ[۱۸] و گوتان[۱۹] اشاره نمود که رساله‌های دکترای خود را در این زمینه نگارش کردند. همچنین ایرانیان نیز مطالعات و تحقیقات خود را در زمینه ابرساختارهای جبری از دهه ۹۰ شروع کردند و می‌توان به زاهدی، دواز، عامری، ایرانمنش، برزویی، اشرفی و غیره اشاره کرد.

همچنین، ریاضی‌دانان آمریکایی مقالات ارزشمندی در زمینه ابرگروه‌ها، پلی‌گروه‌ها و فضاهای الحاقی به رشته تحریر در آورده‌اند که از آن جمله می‌توان به کومر[۲۰] و جان‌توشیاک[۲۱] اشاره کرد.

تا اکنون نظریه ابرساختارهای جبری کاربردهای فراوانی در علوم مختلف از جمله هندسه، توپولوژی، آنالیز و سیستم‌های محدب، گروه‌های متناهی، رمزنگاری و نظریه کدینگ، نظریه اتوماتا، گراف‌ها و ابرگراف‌ها، نظریه مجموعه‌های فازی، نظریه روابط دوتایی و احتمالات داشته است.

از مهمترین مباحث در نظریه ابرساختارها ارتباط بین ابرساختارهای جبری و ساختارهای جبری به وسیله روابط هم‌ارزی می‌باشد. در این رساله به بررسی این نوع روابط، که به روابط اساسی مشهورند، روی ابرگروه‌های $n-$ تایی و ابرحلقه‌ها پرداخته شده است.

در فصل ۲، تعاریف و قضایای مقدماتی در زمینه ابرگروه‌ها آورده شده و سپس انواع روابط

---

[۱۱] Corsini

[۱۲] De Salvo

[۱۳] Migliorato

[۱۴] De Maria

[۱۵] Freni

[۱۶] Stefanescu

[۱۷] Leoreanu

[۱۸] Pelea

[۱۹] Gutan

[۲۰] Commer

[۲۱] Jantociak

روی آنها را معرفی و در انتها به معرفی فضاهای هندسی به‌طور قوی انتقالی، که در بررسی هم‌ارزی بودن روابط به ما کمک زیادی خواهد کرد، می‌پردازیم.

در **فصل ۳**، ابرگروه‌های $n-$ تایی به‌طور جامع مورد مطالعه قرار می گیرند. ابرگروه‌های $n-$ تایی تعمیمی از گروه‌ها، ابرگروه‌ها، و گروه‌های $n-$ تایی هستند. گروه‌های $n-$ تایی برای اوّلین دفعه حدود هشتاد سال پیش توسط دورنت[۲۲](۱۹۲۸) به جهان ریاضیات هدیه شد و از آن زمان کاربردهای وسیعی در علوم مختلف مثل فیزیک کوانتوم، رمزنگاری، توپولوژی، ترکیبیات و علوم کامپیوتر داشته است. اخیراً، دواز و وجیوک‌لیس ابرگروه‌های $n-$ تایی را معرفی کردند. در **بخش ۱.۳**، تعاریف و قضایای متنوعی از ابرگروه‌های $n-$ تایی و نیم‌ابرگروه‌های $n-$ تایی ارائه شده و مثال‌هایی در این زمینه آورده شده است. در **بخش ۲.۳**، با معرفی روابط همساز و به‌طور قوی همساز روی ابرگروه‌های $n-$ تایی زمینه را برای ارتباط بین ابرگروه‌های $n-$ تایی و گروه‌های $n-$ تایی مهیا می‌سازیم. در **بخش ۳.۳ و ۴.۳**، روابط اساسی روی این نوع ابرساختارها معرفی و خواص آن مورد بررسی قرار می‌گیرند. همچنین زیرگروه $n-$ تایی مشتق یک گروه $n-$ تایی با استفاده از رابطه اساسی جابجایی γ^* بیان می‌شود. در انتها در **بخش ۵.۳ و ۶.۳**، با استفاده از فضاهای هندسی به طور انتقالی ثابت می‌کنیم روابط β و γ روابط هم‌ارزی هستند. همچنین مثال‌های متنوع در رابطه با این موضوعات آورده شده است.

فصل ۴، را به ابرحلقه‌ها و حلقه‌های اساسی اختصاص داده‌ایم. در **بخش ۱.۴**، مقدمات مورد نیاز برای مطالعه ابرحلقه‌ها و همچنین با چند مثال طریق ساختن ابرحلقه‌ها و ابرمیدان‌ها را بیان می‌کنیم. کراسنر(۱۹۴۴) ابرمیدان‌ها را به عنوان مفهوم تعمیم یافته میدان‌ها معرفی و آن را کوروپوید[۲۳] نامید. بیست سال بعد (۱۹۶۶) کراسنر از نظریه ابرمیدان‌ها در تقریب میدان‌های با مشخصه مثبت به‌وسیله میدان‌های با مشخصه صفر استفاده و ابرحلقه‌ها را در همان سال‌ها معرفی کرد. کورسینی، دواز، وجیوک‌لیس، روتا [۲۴]، ماسوروس و کمپراسیت[۲۵] و ... از دیگر

---

[۲۲] Dornte

[۲۳] Coropoid

[۲۴] Rota

[۲۵] Kemprasit

اشخاصی هستند که در این زمینه فعالیت کرده‌اند. در **بخش ۲.۴**، رابطه Γ را که برای اولین بار وجیوک‌لیس معرفی کرد به طور کامل مورد مطالعه قرار داده‌ایم. مهمترین قضیه این بخش به ما می‌گوید که رابطه Γ رابطه هم‌ارزی روی ابرمیدان‌ها است. رابطه اساسی جابجایی α^* که توسط دواز و وجیوک‌لیس (۲۰۰۷) تعریف شد را در **بخش ۳.۴**، کاملاً بررسی کرده و شرایطی را که رابطه α انتقالی می‌شود بیان شده و سپس در **بخش ۴.۴**، با استفاده از رابطه اساسی جابجایی α^* ابرحلقه‌های α_n– کامل معرفی می‌شوند. **بخش ۵.۴** ابرحلقه‌های کراسنر، که دسته خاصی از ابرحلقه‌ها هستند و ساختار آن‌ها به حلقه‌ها نزدیک‌تر است مورد مطالعه قرار گرفته و قضایای جالبی در مورد آن‌ها آورده شده است. کاربردهایی از روابط اساسی روی ابرحلقه چندجمله‌ای‌ها در **بخش ۶.۴**، آورده و در پایان در **بخش‌های ۷.۴ و ۸.۴**، با استفاده از روابط اساسی α^* و Γ^* روی ابرحلقه‌های کراسنر نتایج جدیدی در نظریه ابرحلقه‌ها بیان می‌شود.

همچنین مقالات استخراج شده از این رساله به شرح زیر می‌باشند:

[1] S. Mirvakili and B. Davvaz, *γ^*-relation on n-ary hypersemigroups and commutative fundamental n-ary semigroups,* (2007) (Submitted).

[2] S. Mirvakili and B. Davvaz, *n-ary hypergroups and strongly transitive geometric spaces*, Ars combinatoria, (2008) (To appear).

[3] S. Mirvakili, S. M. Anvariyeh and B. Davvaz, *On α-relation and transitivity conditions of α*, Comm. Algebra, 36(05) (2008) 1695-1703.

[4] S. Mirvakili, S. M. Anvariyeh and B. Davvaz, *Transitivity of Γ-relation on hyperfields*, Bull. Math. Soc. Math. Roumanie, Tome 51(99) No. 3, (2008) (To appear).

[5] S. Mirvakili and B. Davvaz, *Applications of α^*-realtion to Krasner hyperrings,* (2007) (Submitted).

[6] S. Mirvakili and B. Davvaz, *Commutative n-ary groups obtained from n-ary Hypergroups*, Extended Abstracts of 19^{th} Algebra Seminar, Semnan University, Iran, (2008) 105-108.

[7] S. Mirvakili and B. Davvaz, *Transitivity conditions of α-relation on hyperrings*, Extended Abstracts of the 38^{th} Annual Iranian Mathematics confrence, University of Zanjan, Iran, (2007) 465-465.

مقالات [۱] و [٦] از بخش‌های ۲.۳ و ۴.۳، مقاله [۲] از بخش‌های ۲.۳، ۵.۳ و ٦.۳ استخراج شده‌اند. همچنین از بخش ۲.۴، مقاله [۴]، از بخش‌های ۳.۴ و ۴.۴ مقالات [۳] و [۷] و از بخش ۸.۴ مقاله [۵] مستخرج شده است.

فصل ۲

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۲ ابرگروه‌ها

در این بخش تعاریف، نمادها و نتایج مهم در نظریه ابرگروه‌ها، همچنین روابط هم‌ارزی تعریف شده روی ابرگروه‌ها آورده می‌شوند. تعاریف و قضایای مرتبط به این بخش مربوط به مرجع [۷] می‌باشد. همچنین برای مطالعه بیشتر می‌توان به منابع [۲، ۶، ۹، ۱۰، ۱۳، ۲۷، ۳۸، ۴۸، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۱، ۶۲، ۶۳] مراجعه کرد. برای دیدن کاربردهایی از نظریه ابرگروه‌ها مرجع [۸] پیشنهاد می‌شود.

فرض کنید که H یک مجموعه ناتهی و $\mathcal{P}^*(H)$ خانواده‌ی همه زیرمجموعه‌های ناتهی H است.

تابع $\circ \;:\; H \times H \to \mathcal{P}^*(H)$ را یک ابرعمل دوتایی روی H و زوج مرتب $(H,\circ)$ را یک ابرگروه‌وار می‌نامند.

فرض کنید $\circ$ یک ابرعمل روی H و A و B زیرمجموعه‌های ناتهی H باشند، آنگاه قرارداد زیر را درنظر می‌گیریم:

$$A \circ B := \bigcup_{a\in A, b\in B} a \circ b.$$

همچنین $A \circ x := A \circ \{x\}$ و $x \circ A := \{x\} \circ A$ در نظر می‌گیریم.

ابرعمل $\circ$ را شرکت‌پذیر می‌نامند هرگاه برای هر $(x,y,z) \in H^3$، $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. هرگاه ابرعمل $\circ$ شرکت‌پذیر باشد آنگاه $(H,\circ)$ یک نیم‌ابرگروه نامیده می‌شود.

ابرعمل $\circ$ را شرکت‌پذیر ضعیف می‌نامند هرگاه برای هر $(x,y,z) \in H^3$، $(x \circ y) \circ z \cap x \circ (y \circ z) \neq \emptyset$. هرگاه ابرعمل $\circ$ شرکت‌پذیر ضعیف باشد آنگاه $(H,\circ)$ یک H_v- نیم‌گروه نامیده می‌شود.

ابرگروه‌وار H را شبه‌ابرگروه گویند هرگاه در خاصیت تکثیر صدق کند. یعنی برای هر $a \in H$ داشته باشیم:

$$a \circ H = H \circ a = H.$$

یک ابرگروه (H_v– گروه) یک نیم‌ابرگروه (H_v– نیم‌گروه) است که شبه‌ابرگروه نیز باشد.

فرض کنید $(H, \circ)$ یک ابرگروه‌وار است. عنصر $e \in H$ را عنصر همانی راست می‌نامند هرگاه برای هر $y \in H$ داشته باشیم $y \in y \circ e$، همانی چپ به طریق مشابه تعریف می‌شود. عنصر $e \in H$ را عنصر همانی گویند هرگاه همانی راست و همانی چپ باشد. بنابراین $e \in H$ عنصر همانی است اگر و تنها اگر برای هر $y \in H$ داشته باشیم $y \in y \circ e \cap e \circ y$.

ابرگروه‌وار $(H, \circ)$ را جابجایی می‌نامند هرگاه:

$$\forall x, y \in H, \quad x \circ y = y \circ x.$$

همچنین، ابرگروه‌وار $(H, \circ)$ را جابجایی ضعیف می‌نامند هرگاه:

$$\forall x, y \in H, \quad x \circ y \cap y \circ x \neq \emptyset.$$

$(H, \circ)$ را یک ابرگروه دارای حداقل یک عنصر همانی در نظر بگیرید. عنصر $a' \in H$ معکوس عنصر $a \in H$ نامیده می‌شود هرگاه عضو همانی $e \in H$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$e \in a \circ a' \cap a' \circ a.$$

مثال ۱.۱.۲ . فرض کنید A یک مجموعه‌ی ناتهی است. ابرعمل $\circ$ را روی G به‌صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\forall (x, y) \in A^{۲}, \quad x \circ y := A.$$

در این‌صورت ابرگروه $(A, \circ)$ را ابرگروه کلی می گوییم.

مثال ۲.۱.۲ . فرض کنید G یک گروه آبلی است. ابرعمل $\circ$ را روی G به‌صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\forall (x, y) \in G^{۲}, \quad x \circ y := < x, y > .$$

که در آن $< x, y >$ زیرگروه تولید شده توسط x و y می‌باشد. به آسانی دیده می‌شود که $(G, \circ)$ یک ابرگروه است.

مثال ۳.۱.۲. فرض کنید G یک گروه است و $H \trianglelefteq G$، ابرعمل $\circ$ را روی G به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall (x,y) \in G^{2}, \quad x \circ y := Hxy.$$

در این‌صورت $(G,\circ)$ یک ابرگروه است.

تعریف ۴.۱.۲. فرض کنید $(H,\circ)$ یک ابرگروه و K یک زیرمجموعه‌ی ناتهی H است، هرگاه $K \circ K \subseteq K$ آنگاه $(K,\circ)$ یک زیرابرگروه‌وار H است. زیرابرگروه‌وار K را یک زیرابرگروه گوییم در صورتی که داشته باشیم:

$$\forall a \in K, \quad K \circ a = a \circ K = K.$$

مثال ۵.۱.۲. مجموعه‌ی $H = \{u,v,z,w\}$ را با ابرعمل زیر در نظر بگیرید:

$\circ$	u	v	z	w
u	u	u	$\{u,v,z\}$	H
v	v	v	$\{u,z\}$	H
z	z	z	$\{u,v,z\}$	H
w	w	w	$\{u,v,z\}$	H

در این صورت $(H,\circ)$ یک ابرگروه و $K = \{u,v,z\}$ یک زیرابرگروه H است.

تعریف ۶.۱.۲. زیرابرگروه K از ابرگروه H، بسته از طرف راست نامیده می‌شود هرگاه

$$K \circ (H-K) = H-K.$$

زیرابرگروه بسته از طرف چپ به طریق مشابه تعریف می‌شود. همچنین اگر زیرابرگروه K از ابرگروه H، بسته از طرف راست و بسته از طرف چپ باشد، آنگاه به آن بسته می‌گویند.

تعریف ۷.۱.۲. زیرابرگروه K از ابرگروه H، معکوس‌پذیر از طرف راست نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in H$،

$$x \in y \circ K \quad \Rightarrow \quad y \in x \circ K.$$

به طریق مشابه زیرابرگروه معکوس‌پذیر از طرف چپ تعریف می‌شود. همچنین اگر زیرابرگروه K از ابرگروه H، معکوس‌پذیر از طرف راست و معکوس‌پذیر از طرف چپ باشد، آنگاه معکوس‌پذیر نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۱.۲. زیرابرگروه K از ابرگروه H، فرابسته از طرف راست نامیده می‌شود هرگاه

$$K \circ (H - K) \cap H - K \neq \emptyset.$$

زیرابرگروه فرابسته از طرف چپ به طریق مشابه تعریف می‌شود. همچنین اگر زیرابرگروه K ازابرگروه H، فرابسته از طرف راست و فرابسته از طرف چپ باشد، آنگاه آن را فرابسته می‌نامند.

فرض کنید H یک ابرگروه‌وار و $A, B \subseteq H$ است. هرگاه $A \cap B \neq \emptyset$ آنگاه گفته می‌شود A، B را ملاقات می‌کند و با $A \approx B$ نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که اگر $a \in H$ و $A \subseteq H$، آنگاه $a \approx A$ اگر و تنها اگر $a \in A$.

روی ابرگروه H ابرعمل‌های $\diagdown$ و $\diagup$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$b \diagdown a = \{x \in H | a \in b \circ x\} \qquad \text{و} \qquad a \diagup b = \{x \in H | a \in x \circ b\}،$$

به ابرعمل $\diagup$، ابرترکیب توسیعی راست و به ابرعمل $\diagdown$، ابرترکیب توسیعی چپ گفته می‌شود. حال $x \approx a \diagup b$ اگر و تنها اگر $a \approx x \circ b$، و $x \approx b \diagdown a$ اگر و تنها اگر $a \approx b \circ x$.

برای مجموعه‌های $A, B \subseteq H$، نمادهای $A \diagup B$ و $B \diagdown A$ به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$B \diagdown A = \bigcup \{b \diagdown a | b \in B,\ a \in A\} \qquad \text{و} \qquad A \diagup B = \bigcup \{a \diagup b | a \in A,\ b \in B\}،$$

بنابراین $A \approx B \diagup C$ اگر و فقط اگر $B \approx A \circ C$، و $A \approx C \diagdown B$ اگر و فقط اگر $B \approx C \circ A$. توجه کنید که اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آنگاه $AC \subseteq BD$ و از این رو $A \diagup C \subseteq B \diagup D$ و $C \diagdown A \subseteq D \diagdown B$.