بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و رایانه
گروه ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه دکترا
رشته ریاضی محض گرایش جبر

ایده‌ال‌های فیتینگ

استاد راهنما

دکتر سینا هدایت

نگارش

سمیه حاجی رضایی

شهریور ماه ۱۳۹۱

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه دکترا به

بخش ریاضی- دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: سمیه حاجی رضایی	امضاء:
استاد راهنما: دکتر سینا هدایت	امضاء:
استاد مشاور:	امضاء:
داور اول :	امضاء:
داور دوم:	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی:	امضاء:

تقدیم به

همسر مهربانم

تشکر و قدردانی

سپاس بیکران بر همدلی و همراهی و همگامی پدر و مادر دلسوز و مهربانم که سجده ی ایثارشان گل محبت را در وجودم پروراند و دامان گهربارشان لحظه های مهربانی را به من آموخت و با تقدیر و تشکر شایسته از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر هدایت که با نکته های دلاویز و گفته های بلند ، صحیفه های سخن را علم پرور نمود و همواره راهنما و راه گشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان نامه بوده است.

معلما مقامت ز عرش برتر باد همیشه توسن اندیشه ات مظفر باد

و با تشکر خالصانه خدمت همه کسانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده اند.

چکیده

هدف از نگارش این رساله، مشخص کردن ساختار مدول‌های باتولیدمتناهی روی حلقه‌های نوتری، در حالتی است که اولین ایده‌آل فیتینگ ناصفر آن‌ها حاصلضرب ایده‌ال‌های بیشین است.

در فصل اول تعاریف و قضایایی که زیربنای مطالب بعدی را تشکیل می‌دهند، بیان شده است.

در فصل دوم یک قضیه اساسی در توصیف ساختار مدول‌های باتولیدمتناهی که اولین ایده‌ال فیتینگ ناصفر آن‌ها بیشین است، روی یک دامنه تجزیه یکتای موضعی بیان و اثبات شده است. در ادامه فصل سعی کرده‌ایم این قضیه را به حالت سرتاسری تعمیم دهیم.

در فصل سوم این شرط را که $T(M)$ جمعوند مستقیم M است، جایگزین شرط UFD بودن R در فصل دوم کرده ایم و ساختار R-مدول‌های باتولیدمتناهی را در این حالت مشخص کرده‌ایم.

در فصل چهارم ساختار مدول باتولیدمتناهی M روی دامنه نوتری R را در حالتی مشخص کرده‌ایم که اولین ایده‌ال فیتینگ M حاصلضرب ایده‌ال‌های بیشین R از ارتفاع حداکثر دو و شامل عنصری اول است.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

در این رساله حلقه‌ها جابجایی و یکدار و مدول‌ها یکانی هستند.

۱.۱ بُعد تصویری

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. دنباله دقیق

$$\cdots P_n \xrightarrow{\varphi_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

را یک تجزیه تصویری برای M می‌نامیم هرگاه P_i ها R -مدول‌های تصویری باشند. گوییم تجزیه تصویری فوق از طول n است هرگاه $P_n \neq 0$ و برای هر $i > n$ ، $P_i = 0$. بُعد تصویری M را طول کوتاهترین تجزیه تصویری M تعریف کرده و آن را با $pd_R(M)$ نمایش می‌دهیم. اگر M تجزیه تصویری از طول متناهی نداشته باشد دراین‌صورت قرار می‌دهیم $pd_R(M) = \infty$.

اگر در تجزیه فوق P_i ها آزاد باشند، تجزیه فوق را یک تجزیه آزاد و اگر P_i ها هموار باشند، تجزیه را یک تجزیه هموار برای M می‌گوییم.

بُعد سرتاسری R را با $gldim(R)$ نمایش می‌دهیم و به صورت $gldim(R) = \sup\limits_{M} pd_R(M)$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. بُعد همواری M را طول کوتاهترین تجزیه هموار M تعریف می‌کنیم و آن‌را با $fd_R(M)$ نمایش می‌دهیم. اگر M تجزیه هموار از طول متناهی نداشته باشد، دراین‌صورت قرار می‌دهیم $fd_R(M) = \infty$.

حکم ۳.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. دراین‌صورت $fd_R(M) = pd_R(M)$.*

برهان. [۹، قضیه ۸-۲۷]. □

حکم ۴.۱.۱. *فرض کنید M و N دو R-مدول باشند. دراین‌صورت برای هر ایده‌آل اول P از R و هر عدد صحیح نامنفی n، $Tor_n^{R_P}(M_P, N_P) = [Tor_n^R(M,N)]_P$.*

برهان. [۹، گزاره ۷-۱۷]. □

حکم ۵.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. دراین‌صورت برای هر عدد صحیح نامنفی n، شرایط زیر معادلند.*

۱) $fd_R(M) \leq n$.

۲) *برای هر R-مدول N*، $Tor^R_{n+1}(M,N) = 0$.

برهان. [۹، گزاره ۸-۱۷]. □

حکم ۶.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه موضعی و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. د شرایط زیر معادلند.*

۱) M *آزاد است.*

۲) M *تصویری است.*

۳) M *هموار است.*

برهان. [۵، نتیجه صفحه ۴۲]. □

حکم ۷.۱.۱. *فرض کنید M یک مدول با تولید متناهی روی حلقه نوتری R باشد. دراین‌صورت*

$$pd_R(M) = \sup_{P\in Spec(R)} pd_{R_P}(M_P) = \sup_{m\in Max(R)} pd_{R_m}(M_m).$$

برهان. نشان می‌دهیم $pd_R(M) = \sup_{m\in Max(R)} pd_{R_m}(M_m)$. اثبات حکم برای ایده‌آل‌های اول مشابه است. ابتدا نشان می‌دهیم برای هر ایده‌ال بیشین m، $pd_R(M) \geq pd_{R_m}(M_m)$. اگر $pd_R(M) = \infty$، آن‌گاه چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. فرض کنید

$$0 \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 \longrightarrow M$$

یک تجزیه تصویری برای M باشد. به ازای هر $i \geq 0$، $R_m \otimes_R X_i \cong (X_i)_m$ تصویری است. از آن‌جایی‌که R_m یک R-مدول هموار است، لذا

$$0 \longrightarrow R_m \otimes_R X_n \longrightarrow R_m \otimes_R X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_m \otimes_R X_0 \longrightarrow R_m \otimes_R M \longrightarrow 0$$

یک تجزیه تصویری برای R_m- مدول M_m است. پس $pd_{R_m}(M_m) \leq pd_R(M)$.

حال فرض کنید $\sup\limits_m pd_{R_m}(M_m) = n < \infty$. فرض کنید m ایده‌ال بیشین دلخواهی باشد. بنا به حکم ۳.۱.۱ و حکم ۵.۱.۱، برای هر R- مدول N، $Tor_{n+1}^{R_m}(M_m, N_m) = 0$. حال طبق حکم ۴.۱.۱، $[Tor_{n+1}^R(M, N)]_m = 0$. از آن‌جایی‌که تساوی برای هر ایده‌آل بیشین m برقرار است لذا $Tor_{n+1}^R(M, N) = 0$. مجدداً طبق حکم ۵.۱.۱، $fd_R(M) \leq n$. بار دیگر بنا به حکم ۳.۱.۱، $pd_R(M) \leq n$ و حکم اثبات می‌شود.

قضیه ۸.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک R- مدول با تولید متناهی باشد. دراین‌صورت شرایط زیر معادلند.*

۱) *M یک R- مدول تصویری است.*

۲) *به ازای هر ایده‌آل بیشین m، M_m یک R_m- مدول آزاد است.*

برهان. [۵، قضیه ۲-۴-۱]. □

حکم ۹.۱.۱. *فرض کنید M یک R- مدول با تولید متناهی و I ایده‌آلی از R باشد به طوری‌که $M = IM$. آن‌گاه عنصر $a \in I$ موجود است به طوری‌که $(1 + a)M = 0$.*

برهان. [۱، نتیجه ۲-۵]. □

۲.۱ کمپلکس کاژول[1] و عمق یک ایده‌آل

تعاریف، تا انتهای فصل، از مرجع [۴] آورده شده‌اند.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم N یک R- مدول باشد. قرار می‌دهیم $\wedge^0 N = R$ و برای هر عدد صحیح $m \geq 1$، $\wedge^m N$ را خارج قسمت مدول $N \otimes N \otimes \cdots \otimes N$، ($m$ مرتبه)، بر زیرمدول تولید شده توسط عناصر $x_1 \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_{m-1}$ و

$x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_m - (sgn\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(m)}$ به ازای هر $x_1, \ldots, x_m \in N$

[1] Koszul Complex

وبه ازای هر جایگشت σ از مجموعه $\{1, 2, \dots, m\}$، تعریف می‌کنیم. $\wedge^m N$ را mاُمین توان بیرونی N نامیده و هر عنصر آن را با نماد مجموع‌های متناهی $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_m$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید N یک R- مدول و $x \in N$ عنصری ثابت باشد. کمپلکس

$$K(x) : 0 \longrightarrow R \longrightarrow N \longrightarrow \wedge^2 N \longrightarrow \cdots \longrightarrow \wedge^i N \xrightarrow{d_x} \wedge^{i+1} N \longrightarrow \cdots$$

را که در آن d_x عنصر همگن $a \in \wedge^i N$ را به $x \wedge a$ می‌نگارد، یک کمپلکس کاژول می‌نامیم.

به ازای $1 \in R$ ، $d_x(1) = x \in N$.

اگر N یک R - مدول آزاد از رتبه n باشد و $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \cong N$ ، آن‌گاه بجای $K(x)$ می‌نویسیم $K(x_1, \dots, x_n)$.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم M یک R- مدول باشد. عنصر $x \in R$ را یک ناشمارنده صفر روی M می‌نامیم هرگاه به ازای هر $m \in M$، از $xm = 0$ نتیجه شود $m = 0$.

تعریف زیر مفهوم ناشمارنده صفر را تعمیم می‌دهد.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و M یک R- مدول باشد. یک دنباله از عناصر $x_1, \dots, x_n \in R$ را یک دنباله منظم روی M (یا یک M- دنباله) نامیده می‌شود، هرگاه

۱) $(x_1, \dots, x_n)M \neq M$.

۲) x_1 یک ناشمارنده صفر روی M و برای هر i، $2 \leq i \leq n$ ، x_i یک ناشمارنده صفر روی $\frac{M}{(x_1, \dots, x_{i-1})M}$ باشد.

M- دنباله $x_1, \dots, x_n$ را بیشین نامیده می‌شود، هرگاه با افزودن هر عنصر $x_{n+1} \in R$ به این M- دنباله، $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ یک M- دنباله نباشد.

ملاحظه ۵.۲.۱. *منظور از $H^j(M \otimes K(x))$ در قضیه زیر، j- امین مدول همولوژی کمپلکس $M \otimes K(x)$ است.*

قضیه ۱.۲.۶. *فرض کنید M یک R- مدول با تولید متناهی باشد و همچنین برای هر $j < r$، $H^j(M \otimes_R K(x_1, \dots, x_n)) = 0$ ولی $H^r(M \otimes_R K(x_1, \dots, x_n)) \neq 0$. دراین‌صورت هر M- دنباله بیشین در ایده‌آل $I = (x_1, \dots, x_n)$ قرار دارد و از طول r است.*

برهان. [۴، قضیه ۱۷-۴]. □

نتیجه ۱.۲.۷. *اگر $x_1, \dots, x_n$ یک M- دنباله باشد، آن‌گاه*
$$H^n(M \otimes_R K(x_1, \dots, x_n)) = \frac{M}{(x_1, \dots, x_n)M}.$$

برهان. [۴، نتیجه ۱۷-۵]. □

ملاحظه ۱.۲.۸. *اگر $I = (x_1, \dots, x_n)$ و، $M \neq IM$ ، آن‌گاه طبق نتیجه فوق $H^n(M \otimes_R K(x_1, \dots, x_n)) = \frac{M}{IM} \neq 0$. همچنین داریم $H^{-1}(M \otimes_R k(x_1, \dots, x_n)) = 0$. بنابراین همواره عدد صحیح مثبت r یافت می‌شود که برای آن قضیه ۱.۲.۶ برقرار باشد.*

تعریف ۱.۲.۹. فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه نوتری R و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد به طوری‌که $M \neq IM$. طبق قضیه ۱.۲.۶، طول همه M- دنباله‌های بیشین در I یکسان است. طول هر M- دنباله بیشین در I را عمق I روی M می‌نامیم و آن‌را با نماد $depth(I, M)$ نمایش می‌دهیم. اگر $M = R$، طول هر دنباله منظم بیشین در I را عمق I می‌نامیم. درصورتیکه $M = IM$، قرار داد می‌کنیم $depth(I, M) = \infty$.
اگر $M = R$ آن‌گاه $depth(I, R)$ را گاهی با $depth(I)$ نشان می‌دهیم.

توجه کنید که قضیه ۱.۲.۶ مشابهی برای قضیه ایده‌آل اصلی تعمیم یافته است، یعنی بیان می‌کند که عمق یک ایده‌آل که با r عنصر تولید شود، حداکثر r است.

حکم ۱.۲.۱۰. *فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه نوتری R باشد، دراین‌صورت*
$depth(I, M) = depth(\sqrt{I}, M)$.

برهان. [۴، نتیجه ۱۷-۸]. □

حکم ۱۱.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. فرض کنید P ایده‌آل اولی از R باشد به‌طوری‌که $P \in Supp(M)$. برای هر ایده‌آل I از R که $I \subseteq P$ ، $depth(I,M) \leq depth(I_P, M_P)$. در حالت کلی ممکن است نامساوی اکید باشد، اما برای هر ایده‌آل I، ایده‌آل بیشین $P \in Supp(M)$ موجود است به‌طوری‌که $depth(I,M) = depth(I_P, M_P)$. بویژه اگر P ایده‌آل بیشینی از R باشد، آن‌گاه $depth(P,M) = depth(P_P, M_P)$.*

برهان. [۴، لم ۱۸-۱]. □

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنید P ایده‌آل اولی از حلقه R باشد. در این صورت ارتفاع P را برابر کوچکترین کران بالای مجموعه طول‌های زنجیرهای

$$P_0 \subseteq P_1 \subseteq \cdots \subseteq P_n = P$$

از ایده‌آل‌های اول R تعریف می‌کنیم مشروط بر این‌که این مجموعه کوچکترین کران بالا داشته باشد و در غیر این‌صورت آن را ∞ قرار می‌دهیم. ارتفاع P را با $ht(P)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه R باشد. در این‌صورت ارتفاع I را با $ht(I)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت $ht(I) = \inf\limits_{P \supseteq I} ht(P)$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱۳.۲.۱. *(قضیه ایده‌آل اصلی تعمیم یافته) فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و I ایده‌آلی از R باشد که توسط n عضو تولید می‌شود. در این صورت به‌ازای هر ایده‌آل اول کمین I چون P، $ht(P) \leq n$.*

برهان. [۱۰، قضیه ۱۵-۴]. □

حکم ۱۴.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. اگر I یک ایده‌آل از R شامل $ann_R(M)$ باشد ، آن‌گاه $depth(I,M)$ از طول هر زنجیر بیشین نزولی از ایده‌آل‌های اول که با یک ایده‌آل اول شامل I شروع و به یک ایده‌آل اول در $Ass(M)$ ختم می‌شود، کوچکتر یا مساوی است. بویژه $depth(I,R) \leq ht(I)$.*

برهان. [۴، حکم ۱۸-۲]. □

حکم ۱۵.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. دراین‌صورت $pd_R(M) \geq depth(ann_R(M))$.*

برهان. [۴، نتیجه ۱۸-۵]. □

حکم ۱۶.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه و $x \in R$ یک عنصر غیر یکه و ناشمارنده صفر باشد. فرض کنید $\bar{R} = R/(x)$ و M یک $\bar{R}$-مدول باشد. اگر $pd_{\bar{R}}(M) < \infty$، آن‌گاه $pd_R(M) = pd_{\bar{R}}(M) + 1$.*

برهان. [۹، گزاره ۸-۳۹]. □

قضیه ۱۷.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری و I ایده‌آلی از R باشد که توسط یک دنباله منظم تولید می‌شود. دراین‌صورت $pd_R(R/I) = depth(I)$.*

برهان. حکم را با استقرا روی $n = depth(I)$ ثابت می‌کنیم. ابتدا به راحتی دیده می‌شود که اگر I توسط دنباله‌ای منظم از طول r تولید شود، آن‌گاه $depth(I) = r$. فرض کنید I توسط یک دنباله منظم از طول 1 تولید شود، یعنی $I =< x >$ که x یک ناشمارنده صفر است. پس $0 \longrightarrow R \xrightarrow{x} R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$ یک تجزیه آزاد برای R/I است. لذا $pd_R(R/I) = 1$. حال نشان می‌دهیم که برای حالت $n = ۲$ برقرار است. اگر $I =< x_1, x_2 >$ که x_1, x_2 یک دنباله منظم در R است، آن‌گاه

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}} R^2 \xrightarrow{(x_1, x_2)} R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

یک تجزیه آزاد برای R/I است. لذا طبق حکم ۱۵.۲.۱، $pd_R(R/I) = ۲$. حال فرض کنید $I =< x_1, \ldots, x_n >$ که $x_1, \ldots, x_n$ دنباله‌ای منظم است. به آسانی دیده می‌شود که

$depth(I/<x_1>, R/<x_1>) = n-1$. لذا طبق فرض استقرا

$pd_{R/<x_1>}(R/I) = n-1$. حال بنا به حکم ۱۶.۲.۱، $pd_R(R/I) = n-1+1 = n$.

□

قضیه ۱۸.۲.۱. *(فرمول آوسلندر- بوخسباوم) فرض کنید (R,m) یک حلقه موضعی بوده و M یک R- مدول باتولید متناهی باشد به‌طوری‌که $pd_R(M) < \infty$. دراین‌صورت*

$$pd_R(M) = depth(m,R) - depth(m,M).$$

برهان. [۴، قضیه ۱۹-۹]. □

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنید (R,m) یک حلقه موضعی و نوتری با بعد d باشد. اگر m یک مجموعه مولد کمین با d عنصر داشته باشد، آن‌گاه R یک حلقه موضعی منظم نامیده می‌شود.

قضیه ۲۰.۲.۱. *فرض کنید (R,m) یک حلقه موضعی و نوتری باشد. دراین‌صورت R موضعی منظم است اگر و تنها اگر m توسط یک دنباله منظم تولید شود.*

برهان. [۵، نتیجه ۹-۱-۱]. □

تعریف ۲۱.۲.۱. حلقه نوتری R یک حلقه منظم نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر ایده‌آل اول P، R_P یک حلقه موضعی منظم باشد.

حکم ۲۲.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه موضعی و نوتری باشد به‌طوری‌که $gldim(R) < \infty$ و $a \in m - m^2$ یک عنصر ناشمارنده صفر باشد. دراین‌صورت $gldim(R/<a>) < \infty$.*

برهان. [۵، نتیجه ۹-۲-۵]. □

قضیه ۲۳.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه موضعی و نوتری باشد. دراین‌صورت R یک حلقه موضعی منظم است اگر و تنها اگر $gldim(R) < \infty$.*

برهان. [۴، قضیه ۱۹-۱۲]. □

قضیه ۲۴.۲.۱. *هر حلقه موضعی منظم یک دامنه تجزیه یکتا (UFD) است.*

برهان. [۴، قضیه ۱۹-۱۹]. □

۳.۱ حلقه‌های ارزیابی گسسته و دامنه‌های ددکیند

تعریف ۱.۳.۱. زیر حلقه R از میدان K یک حلقه ارزیابی از K نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $0 \neq \alpha \in K$ داشته باشیم $\alpha \in R$ یا $\alpha^{-1} \in R$.

قضیه ۲.۳.۱. *فرض کنید R یک حلقه ارزیاب از میدان K باشد. دراین‌صورت*

۱) *K میدان کسرهای حلقه R است.*

۲) *R یک حلقه موضعی است.*

۳) *R به طور صحیح در میدان کسرهای خود (یعنی K) بسته است.*

برهان. [۵، حکم ۵-۱-۳]. □

تعریف ۳.۳.۱. گروه آبلی G یک گروه آبلی مرتب نامیده می‌شود، هرگاه G با رابطه ترتیب $\leq$ یک مجموعه کلاً مرتب بوده و به‌ازای هر $\alpha, \beta, \gamma \in G$ اگر $\alpha \leq \beta$ آن‌گاه $\alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$ و $-\beta \leq -\alpha$. اگر G یک گروه آبلی مرتب باشد، گیریم $G^{*} = G \cup \{\infty\}$ و به‌ازای هر $\alpha \in G$ تعریف می‌کنیم $\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty$ و $\infty + \infty = \infty$ و $\alpha < \infty$.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنیم K یک میدان و G یک گروه آبلی مرتب باشد. یک ارزیاب روی K نگاشتی مانند $\nu : K \longrightarrow G^{*}$ است به‌قسمی‌که

۱) $\nu(a) = \infty$ اگر و تنها اگر $a = 0$.

۲) $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$، برای هر $a, b \in K$.

۳) $\nu(a+b) \geq min\{\nu(a), \nu(b)\}$، برای هر $a, b \in K$.

گروه G را گروه مقادیر تابع ارزیاب ν می‌نامیم.

تعریف ۵.۳.۱. اگر $\nu : K \longrightarrow G^*$ یک ارزیاب روی میدان K باشد، آن‌گاه واضح است که $V = \{a \in K : \nu(a) \geq 0\}$ یک حلقه ارزیاب از K است که آن‌را حلقه ارزیاب متناظر با ν می‌نامیم.

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنیم K یک میدان باشد. ارزیاب ν روی میدان K، گسسته نامیده می‌شود، هرگاه ν پوشا بوده و گروه مقادیر آن $\mathbb{Z}$ (مجموعه اعداد صحیح) باشد. حلقه ارزیاب متناظر با ارزیاب گسسته را یک حلقه ارزیاب گسسته (DVR) می‌نامیم.

قضیه ۷.۳.۱. *فرض کنید R یک دامنه موضعی و نوتری با ایده‌آل بیشین $m \neq 0$ و میدان کسرهای K باشد. دراین‌صورت شرایط زیر معادلند.*

۱) *R حلقه ارزیاب گسسته است.*

۲) *R دامنه ایده‌آل اصلی است.*

۳) *m ایده‌آل اصلی است.*

۴) *R به‌طور صحیح بسته و هر ایده‌آل اول ناصفرش بیشین است.*

۵) *هر ایده‌آل ناصفر R توانی از m است.*

برهان. [۵، قضیه ۵-۲-۲]. □

تعریف ۸.۳.۱. دامنه صحیح نوتری R یک دامنه ددکیند نامیده می‌شود، هرگاه R به‌طور صحیح بسته بوده و هر ایده‌آل اول غیرصفر آن بیشین باشد.

قضیه ۹.۳.۱. *فرض کنید R یک دامنه ددکیند و I ایده‌آل ناصفری از R باشد. دراین‌صورت هر ایده‌آل حلقه R/I اصلی است.*

برهان. [۵، نتیجه ۵-۳-۱]. □

قضیه ۱۰.۳.۱. *فرض کنید R دامنه ددکیند و I ایده‌آل ناصفری از R باشد. دراین‌صورت I حداکثر توسط ۲ عنصر تولید می‌شود.*

برهان. [۵، نتیجه ۵-۳-۲]. □

تعریف ۱.۳.۱۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. $T(M)$، زیر مدول تابی M، از تمامی عناصری تشکیل شده است که توسط یک عنصر منظم R پوچ شوند. همچنین برای $r \in R$، $T_r(M)$ را چنین تعریف می‌کنیم.

$$T_r(M) = \{x \in M : rx = 0\}.$$

اگر $T(M) = 0$، آن‌گاه M را فارغ از تاب و اگر $T(M) = M$، آن‌گاه M را مدول تابی می‌گوییم.

قضیه ۱.۳.۱۲. *فرض کنید R یک دامنه ددکیند و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. دراین‌صورت*

۱)*اگر M تابی باشد، آن‌گاه اعداد صحیح مثبت n_i و ایده‌آل‌های اول p_i، $1 \leq i \leq t$، موجودند به‌طوری‌که M به‌طور یکتایی با $\bigoplus_{i=1}^{n}(R/p_i^{n_i})$ یکریخت است.*

۲)*اگر M فارغ از تاب باشد، آن‌گاه عدد صحیح مثبت n و ایده‌آل ناصفر I از R موجودند به‌طوری‌که M به‌طور یکتایی با $R^n \oplus I$ یکریخت است.*

برهان. [۲، گزاره ۷-۴-۱۰-۲۳]. □

۱.۴ ایده‌آل‌های فیتینگ

در این بخش R یک حلقه نوتری است.

تعریف ۱.۴.۱. کمپلکس

$$\mathcal{F}: \cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

روی حلقه موضعی (R,P) کمپلکس کمین نامیده می‌شود، هرگاه کلیه نگاشت‌ها در $\mathcal{F} \otimes_R R/P$ صفر باشند. یعنی برای هر n، $Im\varphi_n \subseteq PF_{n-1}$.

در حالتی‌که $\mathcal{F}$ یک کمپلکس از مدول‌های آزاد است، تعریف فوق بدین معناست که در هر نمایش ماتریسی φ_n، همه درآیه‌ها در P هستند.