

سنة الفجر



دانشگاه حکیم سبزواری

دانشگاه حکیم سبزواری
دانشکده علوم پایه - گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

گرایش جبر و توپولوژی

عنوان

پوشش از سیستم های دوری روی تکواره ها

استاد راهنما

دکتر غلامرضا مقدسی

استاد مشاور

دکتر لیلا شریفان

پژوهشگر

رسول رشیدی

زمستان ۹۱

تقدیم بہ

پیشگاہ پاک و مقدس حضرت ولی عصر (عج)

تقدیم بہ

حامی نخط نخطی زندگی ام پدر بزرگوارم
کہ ہمیشہ وجودش باعث آرامش جسم و روحم است
پدری کہ ایستادن و حرکت را برای خود ساختن بہ من آموخت.

تقدیم بہ

اسوہی ایثار و فداکاری، مادر مہربانم
کہ موفقتم را دیون دعای خیر و صبر بی پایانش میدانم
مادری کہ زندگی کنونی خویش را دیون فداکاری ما، زحمات و تلاش های بی وقفہ می وی
می دانم.

تقدیم به

همسر مهربانم

کسی که آفتاب مهرش در قلمم پابرجاست و
هرگز غروب نخواهد کرد.

تقدیم به

تامی معلم از آغاز تا کنون

آنان که از پای نشستند تا پای بگیرم

و

تقدیم به

آنهایی که دوستان دارم

به پاس همه‌ی محبت‌هایی که جبرانش بر ایم ممکن نیست دست‌ان‌شان رامی بوسم.

سپاس

خداوند منان را شکرگزارم که فرصتی عطا فرمود تا این ناچیز را به پایان برسانم.

* از پدر و مادر عزیزم کمال سپاس و قدردانی را دارم. من تمام موفقیت‌های زندگی، به خصوص دوران تحصیلم را مدیون بی‌خوابی‌های شبانه و دل‌نگرانی‌های روزانه‌ی آن‌ها هستم. بر پیشانی مادرم و دستان پرمهر پدرم بوسه می‌زنم.

* از استاد راهنمای گرامی‌ام، جناب آقای دکتر غلامرضا مقدسی، که زحمت راهنمایی این پایان‌نامه به دوش ایشان بود، کمال تشکر را دارم.

* از خانم دکتر لیلا شریفان که زحمت مشاوره‌ی این کار را بر عهده داشتند، بسیار سپاسگزارم.

* جادارد از تمامی اساتید گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم سبزوار کمال تشکر را داشته باشم که این اجازه را به بنده دادند تا در طول مدت تحصیلم، به عنوان تدریس‌یار نیز در کنارشان مشغول به کار باشم.

* در پایان، یک‌بار دیگر از تمامی اعضای خانواده‌ام که دوری مرا صبر فرمودند و دعای خیرشان را بدرقه‌ی راهم کردند بسیار بسیار سپاسگزارم.

امیدوارم که پذیرا باشند.

رسول رشیدی

چکیده

در سال ۱۹۷۱، بیکن^۱، بشیر^۲ و ایناچ^۳ یک قضیه بسیار مهم در مورد مدولها بیان کردند که بر اساس آن تمامی مدولهای روی حلقه های یکانی دارای پوشش هموار هستند. ولی در مورد پوششهای هموار از سیستمها مطلبی بیان نشده است. در این پایان نامه پوششهای سیستمهای دوری و بخصوص پوشش قویاً هموار و پوشش شرط P (P -پوشش) را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

یک شرط لازم و کافی برای تکواریهایی که تمام سیستمهای دوری روی این تکواریها دارای پوشش قویاً هموار و پوشش شرط P هستند را به دست می‌آوریم. به علاوه شرط لازم و کافی جدیدی برای سیستمهای دوری که دارای پوشش تصویری هستند بیان می‌کنیم.

^۱Bican

^۲Bashir

^۳Enoch

کلمات کلیدی

۱. نیم گروه
۲. تکواره
۳. S -سیستم
۴. پوشش
۵. هموار
۶. شرط P
۷. تصویری
۸. قویاً هموار
۹. سیستم دوری
۱۰. S -سیستم مرتب جزئی

پیشگفتار

در سال ۱۹۷۱، بیکن، بشیر و ایناچ در [۱]، قضیه‌ای بسیار مهم در مورد مدولها بیان کردند که بر اساس آن تمامی مدول‌های روی حلقه‌های یکانی دارای پوشش هموار هستند. ولی در مورد پوشش‌های هموار از سیستم‌ها مطلبی بیان نشده است. در این پایان نامه پوشش‌های سیستم‌های دوری و بخصوص پوشش قویاً هموار و پوشش شرط P (P -پوشش) را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

ایده اصلی این پایان‌نامه از مقاله خانم دکتر محمودی و رنشاو^۴ تحت عنوان «پوشش سیستم‌های دوری رو تکواره‌ها» و مقاله دکتر ارشاد و دکتر خسروی تحت عنوان «قویاً هموار و شرط P در S -سیستم‌های مرتب جزئی» گرفته شده است.

در فصل اول، تعاریف و قضایایی را بیان می‌کنیم که در فصل‌های بعد به ما کمک می‌کنند. فصل دوم شامل سه بخش است. در بخش اول مفهوم پوشش و بروریختی هم اساسی را بیان کرده و سپس قضیه‌ی بسیار مهم، ۱۰۰۲، در مورد بروریختی‌های هم اساسی از کلاس‌های همنهشتی و روشی از ساختن پوشش برای تکواره‌های یکانی چپ را بیان می‌کنیم. در بخش دوم پوشش قویاً هموار را بیان کرده و شرط لازم و کافی برای سیستم‌هایی که دارای پوشش قویاً هموار هستند را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که لازم نیست تمام سیستم‌ها دارای پوشش قویاً هموار باشند. در ادامه کلاسی از تکواره‌ها را بیان می‌کنیم که تمام سیستم‌های دوری روی این تکواره‌ها دارای پوشش قویاً هموار هستند. در بخش سوم نتایجی مشابه به آنچه در بخش قبل مطرح شد را برای پوشش شرط P (P -پوشش) بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که پوشش شرط P (P -پوشش) یکتا نیست.

در فصل سوم شرط لازم و کافی جدیدی برای سیستم‌های دوری که دارای پوشش تصویری هستند را

بیان می‌کنیم.

^۴James Renshaw

و نهایتاً در فصل چهارم، پوشش شرط P و پوشش قویاً هموار در S -سیستم‌های مرتب جزئی را بیان کرده و شرط لازم و کافی برای سیستم‌های مرتب جزئی که دارای پوشش شرط P و پوشش قویاً هموار هستند را ارائه می‌کنیم.

فهرست مطالب

| | |
|----|---|
| ۱ | فصل ۱: پیش نیازها |
| ۲ | ۱.۱ مفاهیم و قضایای مقدماتی |
| ۱۷ | فصل ۲: پوشش سیستم‌ها |
| ۱۸ | ۱.۲ پوشش و بروریختی هم‌اساسی |
| ۲۶ | ۲.۲ پوشش قویاً هموار |
| ۳۱ | ۳.۲ P -پوشش |
| ۳۶ | فصل ۳: پوشش تصویری و P -پوشش |
| ۳۷ | ۱.۳ پوشش تصویری |
| ۴۰ | ۲.۳ P -پوشش |
| ۴۳ | ۳.۳ نتیجه‌گیری |
| ۴۵ | فصل ۴: پوشش قویاً هموار و پوشش شرط P در سیستم‌های مرتب جزئی |
| ۴۶ | ۱.۴ پوشش قویاً هموار و پوشش شرط P در سیستم‌های مرتب جزئی |
| ۶۱ | فصل آ: واژه‌نامه انگلیسی به فارسی |
| ۶۵ | فصل ب: واژه‌نامه فارسی به انگلیسی |
| ۶۹ | مراجعه |

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل تعاریف و قضایایی را که نقش مهمی در فهم بهتر مطالب دارند، یادآور می‌شویم. فرض ما بر این است که خواننده با مفاهیم جبر جامع آشنایی دارد.

۱.۱ مفاهیم و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱. هر رسته^۱ رده‌ای است مانند A از اشیاء (که با A, B, C, \dots نمایش داده می‌شوند) با این ویژگی که

۱. به ازای هر دو شیء مانند A و B ، مجموعه‌ای متناظر می‌شود که با $Mor_A(A, B)$ نشان می‌دهیم و هر عضو آن را ریخت^۲ می‌نامیم. به علاوه، دارای این خاصیت است که به ازای هر چهار شیء مانند A, B, C و D که $(A, B) \neq (C, D)$ ،

$$Mor_A(A, B) \cap Mor_A(C, D) = \emptyset.$$

۲. به ازای هر سه شیء A, B و C و تابع

$$: Mor_A(B, C) \times Mor_A(A, B) \longrightarrow Mor_A(A, C)$$

$$(g, f) \longmapsto g \cdot f$$

موجود است که

(آ) به ازای هر چهار شیء A, B, C و D اگر $f \in Mor_A(A, B)$ و $g \in Mor_A(B, C)$ و

$$h \in Mor_A(C, D) \text{ آنگاه } h(gf) = (hg)f$$

(ب) به ازای هر شیء مانند A ، عضوی از $Mor_A(A, A)$ مثل 1_A موجود است که به ازای

هر عضو از $Mor_A(A, B)$ مثل f و هر عضو از $Mor_A(C, A)$ مثل g ، $f \cdot 1_A = f$ و

$$1_A \cdot g = g$$

^۱Category

^۲Morphism

تعریف ۲.۱. اگر $Ob A$ ، نشان دهنده کلاس اشیاء رسته A باشد، رسته B ، زیر رسته از رسته A نامیده می‌شود اگر شرایط زیر برقرار باشد:

$$Ob B \subseteq Ob A. \quad ۱.$$

۲. برای هر $A, B \in Ob B$ ،

$$Mor_B(A, B) \subseteq Mor_A(A, B)$$

۳. ترکیب ریخت‌ها در B تحدیدی از ترکیب ریخت‌ها در A باشد.

تبصره ۳.۱. اگر برای هر $A, B \in Ob B$ ، $Mor_B(A, B) = Mor_A(A, B)$ باشد، آنگاه B را زیر رسته کامل می‌نامیم.

تعریف ۴.۱. فرض کنید S یک تکواره^۳ و A یک مجموعه ناتهی باشد اگر نگاشت

$$\mu : A \times S \longrightarrow A$$

با تعریف

$$(a, s) \longmapsto as := \mu(a, s)$$

به قسمی موجود باشد که $a1 = a$ و برای هر $a \in A$ و $s, t \in S$ ، $a(st) = (as)t$ ، آنگاه به A یک S -سیستم راست یا یک S -سیستم می‌گوییم و آن را با A_S نمایش می‌دهیم. به صورت مشابه S -سیستم چپ نیز تعریف می‌شود.

تبصره ۵.۱. چنانچه S یک نیم‌گروه باشد تنها بررسی شرط دوم کافی است، زیرا ممکن است نیم‌گروه دارای ۱ نباشد. در این حالت به A_S ، سیستم نیم‌گروهی می‌گویند.

تعریف ۶.۱. اگر C رسته S -سیستم‌ها باشد، در این رسته شیء‌های آن S -سیستم‌ها هستند و ریخت‌های آن به ازای دو شیء A و B ، نگاشت $f : A \longrightarrow B$ یک ریخت است اگر برای هر $s \in S$ و $a \in A$ ، $f(as) = f(a)s$.

^۳monoid

که به این ریخت‌ها هم‌ریختی یا S -هم‌ریختی می‌گویند.

تعریف ۷.۱. فرض کنید $f : A \rightarrow B$ ریختی در رسته C باشد. f را درون بری^۴ گوئیم هرگاه f دارای معکوس راست باشد یعنی $g \in \text{Mor}(B, A)$ موجود باشد به طوری که $fg = 1_B$. به علاوه گوئیم B درون بر A است.

تعریف ۸.۱. فرض کنیم $\rho \subseteq S \times S$ یک رابطه هم‌ارزی روی S باشد. در این صورت ρ یک رابطه هم‌نهشتی^۵ چپ (راست) روی S است هرگاه برای هر $s, t, u \in S$ آنگاه $(su)\rho(tu)$ یا $(us)\rho(ut)$.
 ρ را یک رابطه هم‌نهشتی گوئیم هرگاه هم رابطه هم‌نهشتی راست و هم رابطه هم‌نهشتی چپ باشد. همچنین کلاس $a \in S$ نسبت به این رابطه هم‌ارزی را با $\rho(a)$ یا $[a]_\rho$ یا $[a]$ نشان می‌دهیم. اگر ρ یک رابطه هم‌نهشتی روی S باشد، $\frac{S}{\rho}$ با تعریف ضرب $[s]_\rho[t]_\rho = [st]_\rho$ برای هر $s, t \in S$ یک نیم‌گروه است که نیم‌گروه خارج قسمتی نامیده می‌شود.

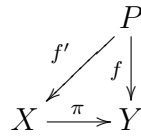
تعریف ۹.۱. فرض کنید C رسته سیستم‌ها و I یک مجموعه و F یک شیء از رسته C باشد آنگاه F را روی I آزاد^۶ گوئیم اگر تابع $\sigma : I \rightarrow F$ موجود باشد به طوری که برای هر شیء A از C و تابع $\varphi : I \rightarrow A$ ، هم‌ریختی منحصربه‌فرد $\varphi^* : F \rightarrow A$ موجود باشد به طوری که $\varphi^* \sigma = \varphi$. یا به عبارت دیگر دیاگرام زیر جابجایی است:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\sigma} & F \\ & \searrow \varphi & \swarrow \varphi^* \\ & & A \end{array}$$

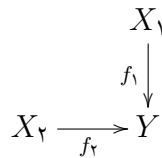
که F را به صورت $F[I]$ و σ را به صورت $\sigma[I]$ نمایش می‌دهیم و I را پایه F می‌گوئیم.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنید C رسته سیستم‌ها و P یک شیء از رسته C باشد. P را تصویری^۷ گوئیم هرگاه برای هر هم‌ریختی پوشای $\pi : X \rightarrow Y$ و هم‌ریختی $f : P \rightarrow Y$ ، هم‌ریختی $f' : P \rightarrow X$ موجود باشد به طوری که $\pi f' = f$ یا به عبارت دیگر دیاگرام زیر جابجا شود.

^۴retraction
^۵congruence
^۶free
^۷Projective



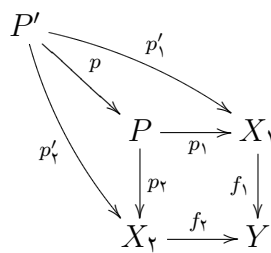
تعریف ۱۱.۱. فرض کنید C رسته S -سیستمها و X_1, X_2, Y سه شیء و f_1, f_2 دو ریخت از رسته C باشند به طوریکه:



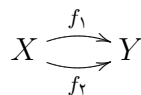
باشد. زوج $(P, (p_1, p_2))$ که همریختی‌های X_i $p_i : P \rightarrow X_i$ $i = 1, 2$ است را عقب‌بر^۸ زوج (f_1, f_2) گویند. اگر:

$$f_1 p_1 = f_2 p_2 \quad .1$$

۲. برای هر زوج $(P', (p'_1, p'_2))$ که $p'_i : P' \rightarrow X_i$ $i = 1, 2$ و $f_1 p'_1 = f_2 p'_2$ همریختی یکتایی مانند $p : P' \rightarrow P$ موجود باشد به طوریکه $p_i p = p'_i$ برای $i = 1, 2$. یا دیاگرام زیر جابجایی باشد.



تعریف ۱۲.۱. فرض کنید C یک رسته و X, Y دو شیء و f_1, f_2 دو ریخت از رسته C باشند به طوریکه



باشد. آنگاه به زوج (E, e) که ریخت X $e : E \rightarrow X$ را برابر ساز^۹ f_1, f_2 گویند اگر:

^۸pullback
^۹equalizer

$$.f_1 e = f_2 e .1$$

۲. برای هر ریخت $h : H \rightarrow X$ که $f_1 h = f_2 h$ ، ریخت یکتایی مانند $h' : H \rightarrow E$ موجود

باشد به طوریکه $h = eh'$ یا دیاگرام زیر جابجایی باشد.

$$\begin{array}{ccc} H & & \\ \downarrow h' & \searrow h & \\ E & \xrightarrow{e} & X \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \xleftarrow{f_2} \end{array} Y \end{array}$$

تعریف ۱۳.۱. اگر A یک S -سیستم راست و M یک S -سیستم چپ باشد و Y یک مجموعه باشد

تابع $\beta : A \times M \rightarrow Y$ باشد. در این صورت β را S -تنسوری^{۱۰} گویند هرگاه برای هر $a \in A$ و

$m \in M$ و $s \in S$ داشته باشیم:

$$\beta(as, m) = \beta(a, sm)$$

تعریف ۱۴.۱. فرض کنید A یک S -سیستم راست و B یک S -سیستم چپ باشد. آنگاه T را

حاصلضرب تانسوری A و B گویند هرگاه S -تنسوری، $\mathcal{T} : A \times B \rightarrow T$ موجود باشد به طوریکه

به ازای هر مجموعه مانند Y و هر تابع $\beta : A \times B \rightarrow Y$ ، تابع منحصر به فرد $\beta' : T \rightarrow Y$ موجود

باشد به طوریکه $\beta = \beta' \mathcal{T}$.

یا به عبارت دیگر دیاگرام زیر جابجا شود.

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\beta} & Y \\ & \searrow \mathcal{T} & \nearrow \beta' \\ & T & \end{array}$$

نکته ۱۵.۱. فرض کنیم A یک S -سیستم راست و B یک S -سیستم چپ و $A \times B$ حاصل ضرب

دکارتی A و B باشد. قرار می دهیم $H = \{(as, b), (a, sb) \mid a \in A, b \in B, s \in S\}$ و فرض کنیم

$\rho = \rho(H)$ همنهشتی تولید شده توسط H روی $A \times B$ باشد در این صورت حاصل ضرب $\frac{A \times B}{\rho}$

تانسوری A و B روی S نامیده می شود و با $A \otimes B$ نشان می دهیم. همچنین برای هر $a \in A$ و $b \in B$

^{۱۰}S-tensorial

کلاس هم ارزی (a, b) در $A \otimes B$ را با $a \otimes b$ نشان می دهیم. با توجه به تعریف برای هر $a \in A$ و $b \in B$ داریم:

$$as \otimes b = a \otimes sb.$$

تعریف ۱۶.۱. فرض کنید C و D دو رسته باشند. تابعگون همورد ^{۱۱} T از C به D که با $D : C \rightarrow D$ نمایش داده می شود، تابعی است که به شی C از C شیئی مانند $T(C)$ از D را نسبت می دهد و به ریخت $C' : C \rightarrow C'$ از C ریختی مانند $T(C') : T(C) \rightarrow D$ از D را نسبت می دهد به طوری که

$$1. \text{ به ازای هر ریخت همانی } C \rightarrow C \text{ از } C, T(1_C) = 1_{T(C)},$$

$$2. \text{ به ازای هر دو ریخت } f \text{ و } g \text{ از } C \text{ که ترکیب } gf \text{ تعریف شده باشد, } T(gf) = T(g)T(f).$$

مثال ۱۷.۱. فرض کنید C رسته S -سیستمها باشد. $Act - S \rightarrow Set$ با تعریف $(A \otimes -)(f) = 1_A \otimes f$ یک تابعگون همورد است. که $f : B \rightarrow C$ یک همریختی سیستمی است و $1_A \otimes f : A \otimes B \rightarrow A \otimes C$ است.

تعریف ۱۸.۱. S -سیستم A_S را هموار ^{۱۲} گویند هرگاه تابعگون $A_S \otimes -$ ، تکریختی را حفظ کند. یا به عبارت دیگر اگر $f : X \rightarrow Y$ یک به یک باشد آنگاه $A_S \otimes X \rightarrow A_S \otimes Y$ نیز یک به یک باشد.

تعریف ۱۹.۱. S -سیستم A_S عقب بر هموار ^{۱۳} است اگر تابعگون $A_S \otimes -$ عقب بر را حفظ کند.

تعریف ۲۰.۱. S -سیستم A_S برابر ساز هموار ^{۱۴} است اگر تابعگون $A_S \otimes -$ برابر ساز را حفظ کند.

تعریف ۲۱.۱. S -سیستم A_S قویاً هموار ^{۱۵} است اگر تابعگون $A_S \otimes -$ عقب بر و برابر ساز را حفظ کند.

^{۱۱}Covariant functor

^{۱۲}flat

^{۱۳}pullback flat

^{۱۴}equalizer flat

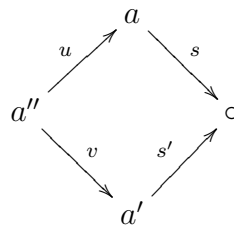
^{۱۵}strongly flat

تعریف ۲۲.۱. S -سیستم A_S را هموار ضعیف^{۱۶} گویند هرگاه $A_S \otimes -$ نشاندهنده ایده‌الهای چپ S را در S حفظ کند. یا به عبارت دیگر اگر K یک ایده‌ال چپ از S باشد و $j: K \hookrightarrow S$ یک نشاندهنده باشد، $1 \otimes j: A_S \otimes K \hookrightarrow A_S \otimes S$ نیز یک نشاندهنده باشد.

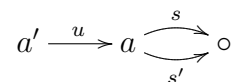
تعریف ۲۳.۱. S -سیستم A_S را هموار ضعیف اصلی^{۱۷} گویند هرگاه $A_S \otimes -$ نشاندهنده ایده‌الهای اصلی چپ S را در S حفظ کند. یا به عبارت دیگر اگر Ss که $s \in S$ یک ایده‌ال اصلی چپ از S باشد و $j: Ss \hookrightarrow S$ یک نشاندهنده باشد، $1 \otimes j: A_S \otimes Ss \hookrightarrow A_S \otimes S$ نیز یک نشاندهنده باشد.

تعریف ۲۴.۱. S -سیستم A_S را بی تاب^{۱۸} گویند هرگاه برای هر $x, y \in A$ و عضو حذف پذیر راست $c \in S$ ، تساوی $xc = yc$ نتیجه دهد که $x = y$.

تعریف ۲۵.۱. S -سیستم A در شرط P صدق می‌کند اگر برای هر $a, a' \in A$ و $s, s' \in S$ که $as = a's'$ ، عناصر $u, v \in S$ و $a'' \in A$ موجود باشند به طوری که $a = a''u$ و $a' = a''v$ و $us = vs'$ یا به عبارت دیگر:



تعریف ۲۶.۱. S -سیستم A در شرط E صدق می‌کند اگر برای هر $a \in A$ و $s, s' \in S$ که $as = as'$ ، عناصر $u \in S$ و $a' \in A$ موجود باشند به طوری که $a = a'u$ و $us = us'$. یا به عبارت دیگر:



لم ۲۷.۱. هر S -سیستم آزاد یک S -سیستم تصویری است.

^{۱۶}Weakly flat

^{۱۷}principally weakly flat

^{۱۸}torsion free

- اثبات. به مرجع [۵] قضیه ۲.۳.۴ مراجعه شود.
- لم ۲۸.۱. یک S -سیستم قویاً هموار است اگر و تنها اگر عقب بر هموار باشد.
- اثبات. به مرجع [۵] قضیه ۳.۱۶.۵ مراجعه شود.
- لم ۲۹.۱. هر S -سیستم تصویری یک S -سیستم قویاً هموار است.
- اثبات. به مرجع [۵] قضیه ۳.۱۷.۵ مراجعه شود.
- لم ۳۰.۱. هر S -سیستم عقب بر هموار در شرط P صدق می‌کند.
- اثبات. به مرجع [۵] قضیه ۳.۱۶.۲ مراجعه شود.
- لم ۳۱.۱. هر S -سیستم قویاً هموار در شرط (P) صدق می‌کند.
- اثبات. با توجه به تعریف سیستم قویاً هموار، هر سیستم قویاً هموار، سیستم عقب بر هموار است. همچنین طبق لم ۳۰.۱، هر سیستم عقب بر هموار در شرط P صدق می‌کند. پس هر سیستم قویاً هموار در شرط P صدق می‌کند.
-
- لم ۳۲.۱. هر S -سیستم که در شرط (P) صدق کند هموار است.
- اثبات. به مرجع [۵]، قضیه ۳.۱۳.۳ مراجعه شود.
- لم ۳۳.۱. هر S -سیستم هموار یک S -سیستم هموار ضعیف است.
- اثبات. با توجه به تعریف سیستم هموار و هموار ضعیف واضح است.
- لم ۳۴.۱. هر S -سیستم هموار ضعیف اصلی یک S -سیستم بی‌تاب است.
- اثبات. به مرجع [۵] قضیه ۳.۱۰.۳ مراجعه شود.
- لم ۳۵.۱. هر S -سیستم هموار ضعیف یک S -سیستم بی‌تاب است.

اثبات. با توجه به تعریف هموار ضعیف و هموار ضعیف اصلی، هر سیستم هموار ضعیف یک سیستم هموار ضعیف اصلی است. و همچنین با توجه به لم ۳۴.۱، هر سیستم هموار ضعیف اصلی، یک سیستم بی‌تاب است. پس هر سیستم هموار ضعیف، یک سیستم بی‌تاب است.

□

لم ۳۶.۱. S -سیستم A قویاً هموار است اگر و تنها اگر در شرط P و E صدق کند.

□

اثبات. به لم ۲۸.۱ و قضیه مرجع ۳.۱۶.۶ مرجع [۵]، مراجعه شود.

قضیه ۳۷.۱. فرض کنید ρ یک همنهستی راست از تکواره S باشد. در این صورت $\frac{S}{\rho}$ در شرط

P صدق می‌کند اگر و تنها اگر برای هر $s, t \in S$ که spt ، $u, v \in S$ موجود باشد به طوری که

$$.us = vt \text{ و } up \setminus pv$$

□

اثبات. به قضیه ۳.۱۳.۴ مرجع [۵]، مراجعه شود.

لم ۳۸.۱. فرض کنید ρ همنهستی راست از تکواره S باشد. در این صورت S -سیستم $\frac{S}{\rho}$ در

شرط E صدق می‌کند اگر و تنها اگر برای هر $s, t \in S$ که spt ، $u \in S$ موجود باشد به طوری

$$.us = ut \text{ و } \setminus \rho u$$

اثبات. به قضیه ۳.۱۴.۸ مرجع [۵]، مراجعه شود.

□

لم ۳۹.۱. هر S -سیستم برابر ساز هموار در شرط E صدق می‌کند.

اثبات. به قضیه ۳.۱۵.۳ مرجع [۵]، مراجعه شود.

□

لم ۴۰.۱. فرض کنید ρ همنهستی راست از تکواره S باشد. در این صورت S -سیستم $\frac{S}{\rho}$ برابر ساز

هموار است اگر و تنها اگر $\frac{S}{\rho}$ در شرط E صدق کند.