بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه حکیم سبزواری
دانشکده علوم پایه - گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

گرایش جبر و توپولوژی

عنوان

پوشش از سیستم های دوری روی تکواره ها

استاد راهنما

دکتر غلامرضا مقدسی

استاد مشاور

دکتر لیلا شریفان

پژوهشگر

رسول رشیدی

زمستان ۹۱

تقدیم به

پیشگاه پاک و مقدس **حضرت ولی عصر (عج)**

****

تقدیم به

حامی لحظه لحظه ی زندگی ام **پدر بزرگوارم**

که همیشه وجودش باعث آرامش جسم و روحم است

پدری که ایستادن و حرکت را برای خود ساختن به من آموخت.

****

تقدیم به

اسوه ی ایثار و فداکاری، **مادر مهربانم**

که موفقیتم را مدیون دعای خیر و صبر بی پایانش میدانم

مادری که زندگی کنونی خویش را مدیون فداکاری ها، زحمات و تلاش های بی وقفه ی وی می دانم.

****

تقدیم به

همسر مهربانم

کسی که آفتاب مهرش در قلبم پابرجاست و

هرگز غروب نخواهد کرد.

****

تقدیم به

تمامی معلمانم از آغاز تاکنون

آنان که از پای ننشستند تا پای بگیرم

****

و

تقدیم به

آن هایی که دوستشان دارم

به پاس همه ی محبت هایی که جبرانش برایم ممکن نیست دستانشان را می بوسم.

******

سپاس

خداوند منان را شکرگزارم که فرصتی عطا فرمود تا این ناچیز را به پایان برسانم.

* از **پدر و مادر عزیزم** کمال سپاس و قدردانی را دارم. من تمام موفقیت‌های زندگی، به خصوص دوران تحصیلم را مدیون بی‌خوابی‌های شبانه و دل‌نگرانی‌های روزانه‌ی آن‌ها هستم. بر پیشانی مادرم و دستان پرمهر پدرم بوسه می‌زنم.

* از استاد راهنمای گرامی‌ام، جناب آقای دکتر غلامرضا مقدسی، که زحمت راهنمایی این پایان‌نامه به دوش ایشان بود، کمال تشکر را دارم.

* از خانم دکتر لیلا شریفان که زحمت مشاوره‌ی این کار را بر عهده داشتند، بسیار سپاسگزارم.

* جادارد از تمامی اساتید گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم سبزوار کمال تشکر را داشته باشم که این اجازه را به بنده دادند تا در طول مدت تحصیلم، به عنوان تدریس‌یار نیز در کنارشان مشغول به کار باشم.

* در پایان، یک‌بار دیگر از **تمامی اعضای خانواده‌ام** که دوری مرا صبر فرمودند و دعای خیرشان را بدرقه‌ی راهم کردند بسیار بسیار سپاسگزارم.

امیدوارم که پذیرا باشند.

رسول رشیدی

چکیده

در سال ۱۹۷۱، بیکن [۱] ، بشیر [۲] و ایناچ [۳] یک قضیه بسیار مهم در مورد مدولها بیان کردند که بر اساس آن تمامی مدول‌های روی حلقه های یکانی دارای پوشش هموار هستند. ولی درمورد پوشش‌های هموار از سیستم‌ها مطلبی بیان نشده است. در این پایان نامه پوشش‌های سیستم‌های دوری و بخصوص پوشش قویاً هموار و پوشش شرط P (P-پوشش) را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

یک شرط لازم وکافی برای تکوارههایی که تمام سیستم‌های دوری روی این تکواره‌ها دارای پوشش قویاً هموار و پوشش شرط P هستند را به دست می‌آوریم. به علاوه شرط لازم وکافی جدیدی برای سیستم‌های دوری که دارای پوشش تصویری هستند بیان می‌کنیم.

[۱] Bican
[۲] Bashir
[۳] Enoch

کلمات کلیدی

۱. نیم‌گروه

۲. تکواره

۳. S- سیستم

۴. پوشش

۵. هموار

۶. شرط P

۷. تصویری

۸. قویاً هموار

۹. سیستم دوری

۱۰. S-سیستم مرتب جزئی

پیشگفتار

در سال ۱۹۷۱، بیکن، بشیر و ایناچ در [۱]، قضیه‌ای بسیار مهم در مورد مدولها بیان کردند که بر اساس آن تمامی مدول‌های روی حلقه های یکانی دارای پوشش هموار هستند. ولی درمورد پوشش‌های هموار از سیستم‌ها مطلبی بیان نشده است. در این پایان نامه پوشش‌های سیستم‌های دوری و بخصوص پوشش قویاً هموار و پوشش شرط P (P-پوشش) را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

ایده اصلی این پایان‌نامه از مقاله خانم دکتر محمودی و رنشاو [۴] تحت عنوان «پوشش سیستم های دوری رو تکواره‌ها» و مقاله دکتر ارشاد و دکتر خسروی تحت عنوان «قویاً هموار و شرط P در S-سیستم‌های مرتب جزئی» گرفته شده است.

در فصل اول، تعاریف و قضایایی را بیان می‌کنیم که در فصل‌های بعد به ما کمک می‌کنند.

فصل دوم شامل سه بخش است. در بخش اول مفهوم پوشش و بروریختی هم اساسی را بیان کرده و سپس قضیه‌ی بسیار مهم، ۱۰.۲ ، در مورد بروریختی‌های هم اساسی از کلاس‌های همنهشتی و روشی از از ساختن پوشش برای تکواره‌های یکانی چپ را بیان می‌کنیم. در بخش دوم پوشش قویاً هموار را بیان کرده و شرط لازم و کافی برای سیستم‌هایی که دارای پوشش قویاً هموار هستند را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که لازم نیست تمام سیستم‌ها دارای پوشش قویا هموار باشند. در ادامه کلاسی از تکواره‌ها را بیان می‌کنیم که تمام سیستم‌های دوری روی این تکواره‌ها دارای پوشش قویاً هموار هستند. در بخش سوم نتایجی مشابه به آنچه در بخش قبل مطرح شد را برای پوشش شرط P (P-پوشش) بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که پوشش شرط P (P-پوشش) یکتا نیست.

در فصل سوم شرط لازم وکافی جدیدی برای سیستم‌های دوری که دارای پوشش تصویری هستند را بیان می‌کنیم.

[۴] James Renshaw

و نهایتاً در فصل چهارم، پوشش شرط P و پوشش قویاً هموار در S-سیستم‌های مرتب جزئی را بیان کرده و شرط لازم و کافی برای سیستم‌های مرتب جزئی که دارای پوشش شرط P و پوشش قویاً هموار هستند را ارائه می‌کنیم.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل تعاریف و قضایایی را که نقش مهمی در فهم بهتر مطالب دارند، یادآور می‌شویم. فرض ما بر این است که خواننده با مفاهیم جبر جامع آشنایی دارد.

۱.۱ مفاهیم و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱. هر رسته [۱] رده‌ای است مانند $\mathcal{A}$ از اشیاء (که با $A, B, C, ...$ نمایش داده می‌شوند) با این ویژگی که

۱. به ازای هر دو شیء مانند A و B، مجموعه‌ای متناظر می‌شود که با $Mor_{\mathcal{A}}(A,B)$ نشان می‌دهیم و هر عضو آن را ریخت [۲] می‌نامیم. به علاوه، دارای این خاصیت است که به ازای هر چهار شیء مانند A، B، C و D که $(A,B) \neq (C,D)$،

$$Mor_{\mathcal{A}}(A,B) \cap Mor_{\mathcal{A}}(C,D) = \emptyset.$$

۲. به ازای هر سه شیء A، B و C و تابع

$$.: Mor_{\mathcal{A}}(B,C) \times Mor_{\mathcal{A}}(A,B) \longrightarrow Mor_{\mathcal{A}}(A,C)$$

$$(g,f) \longmapsto g.f$$

موجود است که

(آ) به ازای هر چهار شیء A، B، C و D اگر $f \in Mor_{\mathcal{A}}(A,B)$، $g \in Mor_{\mathcal{A}}(B,C)$ و $h \in Mor_{\mathcal{A}}(C,D)$، آنگاه $h(gf) = (hg)f$.

(ب) به ازای هر شیء مانند A، عضوی از $Mor_{\mathcal{A}}(A,A)$ مثل 1_A موجود است که به ازای هر عضو از $Mor_{\mathcal{A}}(A,B)$ مثل f و هر عضو از $Mor_{\mathcal{A}}(C,A)$ مثل g، $f1_A = f$ و $1_A g = g$.

[۱] Category
[۲] Morphism

تعریف ۲.۱. اگر $Ob\,\mathcal{A}$، نشان دهنده کلاس اشیاء رسته $\mathcal{A}$ باشد، رسته $\mathcal{B}$، زیر رسته از رسته $\mathcal{A}$ نامیده می‌شود اگر شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $Ob\,\mathcal{B} \subseteq Ob\,\mathcal{A}$.

۲. برای هر $A, B \in Ob\,\mathcal{B}$،

$$Mor_{\mathcal{B}}(A, B) \subseteq Mor_{\mathcal{A}}(A, B)$$

۳. ترکیب ریخت‌ها در $\mathcal{B}$ تحدیدی از ترکیب ریخت‌ها در $\mathcal{A}$ باشد.

تبصره ۳.۱. اگر برای هر $A, B \in Ob\,\mathcal{B}$، $Mor_{\mathcal{B}}(A, B) = Mor_{\mathcal{A}}(A, B)$ باشد، آنگاه $\mathcal{B}$ را زیر رسته کامل می‌نامیم.

تعریف ۴.۱. فرض کنید S یک تکواره [۳] و A یک مجموعه ناتهی باشد اگر نگاشت

$$\mu : A \times S \longrightarrow A$$

با تعریف

$$(a, s) \longmapsto as := \mu(a, s)$$

به قسمی موجود باشد که $a1 = a$ و برای هر $a \in A$ و $s, t \in S$ ، $a(st) = (as)t$، آنگاه به A یک S-سیستم راست یا یک S-سیستم می‌گوییم و آن را با A_S نمایش می‌دهیم. به صورت مشابه S-سیستم چپ نیز تعریف می‌شود.

تبصره ۵.۱. چنانچه S یک نیم‌گروه باشد تنها بررسی شرط دوم کافی است، زیرا ممکن است نیم گروه دارای $\underline{1}$ نباشد. در این حالت به A_S، سیستم نیم‌گروهی می‌گویند.

تعریف ۶.۱. اگر C رسته S-سیستم ها باشد، در این رسته شیءهای آن S-سیستم ها هستند و ریخت‌های آن به ازای دو شیء A و B، نگاشت $f : A \longrightarrow B$ یک ریخت است اگر برای هر $s \in S$ و $a \in A$، $f(as) = f(a)s$.

[۳] monoid

که به این ریخت‌ها همریختی یا S-همریختی می‌گویند.

تعریف ۷.۱. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ ریختی در رسته $\mathcal{C}$ باشد. f را درون بری [۴] گوییم هرگاه f دارای معکوس راست باشد یعنی $g \in Mor(B, A)$ موجود باشد به طوری که $fg = 1_B$. به علاوه گوییم B درون بر A است.

تعریف ۸.۱. فرض کنیم $\rho \subseteq S \times S$ یک رابطه هم ارزی روی S باشد. در این صورت ρ یک رابطه همنهشتی [۵] چپ (راست) روی S است هرگاه برای هر $s, t, u \in S$، $s\rho t$ آنگاه $(us)\rho(ut)$ ($(su)\rho(tu)$).

ρ را یک رابطه همنهشتی گویند هرگاه هم رابطه همنهشتی راست و هم رابطه همنهشتی چپ باشد. همچنین کلاس $a \in S$ نسبت به این رابطه هم ارزي را با $\rho(a)$ یا $[a]_\rho$ یا $[a]$ نشان می‌دهیم. اگر ρ یک رابطه همنهشتی روي S باشد، $\dfrac{S}{\rho}$ با تعریف ضرب $[s]_\rho[t]_\rho = [st]_\rho$ برای هر $s, t \in S$ یک نیم گروه است که نیم گروه خارج قسمتی نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۱. فرض کنید C رسته سیستم ها و I یک مجموعه و F یک شیء از رسته C باشد آنگاه F را روی I آزاد [۶] گویند اگر تابع $\sigma : I \longrightarrow F$ موجود باشد به طوری که برای هر شیء A از C و تابع $\varphi : I \longrightarrow A$، همریختی منحصربه فرد $\varphi^* : F \longrightarrow A$ موجود باشد به طوریکه $\varphi^*\sigma = \varphi$. یا به عبارت دیگر دیاگرام زیر جابجایی است:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & F \arrow[dl, "\varphi^*"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

که F را به صورت $F[I]$ و σ را به صورت $\sigma[I]$ نمایش می‌دهیم و I را پایه F می‌گوییم.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنید C رسته سیستم‌ها و P یک شیء از رسته C باشد. P را تصویری [۷] گویند هرگاه برای هر همریختی پوشای $\pi : X \longrightarrow Y$ و همریختی $f : P \longrightarrow Y$، همریختی $f' : P \longrightarrow X$ موجود باشد به طوریکه $\pi f' = f$ یا به عبارت دیگر دیاگرام زیر جابجا شود.

---
[۴] retraction
[۵] congruence
[۶] free
[۷] Projective

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "f'"'] \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "\pi"] & Y \end{tikzcd}$$

تعریف ۱۱.۱. فرض کنید C رسته S–سیستم‌ها و X_1, X_2, Y سه شیء و f_1, f_2 دو ریخت از رسته C باشند به طوریکه:

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[d, "f_1"'] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

باشد. زوج $(P, (p_1, p_2))$ که همریختی‌های $p_i : P \longrightarrow X_i$، $i = 1, 2$ است را عقب‌بر [8] زوج (f_1, f_2) گویند. اگر :

۱. $f_1 p_1 = f_2 p_2$.

۲. برای هر زوج $(P', (p'_1, p'_2))$ که $p'_i : P' \longrightarrow X_i$ ، $i = 1, 2$ و $f_1 p'_1 = f_2 p'_2$، همریختی یکتایی مانند $p : P' \longrightarrow P$ موجود باشد به طوریکه $p_i p = p'_i$ برای $i = 1, 2$. یا دیاگرام زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, "p"] \arrow[drr, bend left, "p'_1"] \arrow[ddr, bend right, "p'_2"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & X_1 \arrow[d, "f_1"'] \\ & X_2 \arrow[r, "f_2"] & Y \end{tikzcd}$$

تعریف ۱۲.۱. فرض کنید C یک رسته و X, Y دو شیء و f_1, f_2 دو ریخت از رسته C باشند به طوریکه

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

باشد. آنگاه به زوج (E, e) که ریخت $e : E \longrightarrow X$، را برابر ساز [9] f_1, f_2 گویند اگر :

[8] pullback
[9] equlizer

۱. $f_1e = f_2e$.

۲. برای هر ریخت $h : H \longrightarrow X$ که $f_1h = f_2h$، ریخت یکتایی مانند $h' : H \longrightarrow E$ موجود باشد به طوریکه $h = eh'$ یا دیاگرام زیر جابجایی باشد.

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[d, "h'"] \arrow[dr, "h"] & & \\
E \arrow[r, "e"] & X \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right, "f_2"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

تعریف ۱۳.۱. اگر A یک S-سیستم راست و M یک S-سیستم چپ باشد و Y یک مجموعه باشد تابع $\beta : A \times M \longrightarrow Y$ باشد. در این صورت β را S-تنسوری [10] گویند هرگاه برای هر $a \in A$ و $m \in M$ و $s \in S$ داشته باشیم:

$$\beta(as, m) = \beta(a, sm)$$

تعریف ۱۴.۱. فرض کنید A یک S-سیستم راست و B یک S-سیستم چپ باشد. آنگاه T را حاصلضرب تانسوری A و B گویند هرگاه S-تنسوری $\mathcal{T} : A \times B \longrightarrow T$ ، موجود باشد به طوریکه به ازای هر مجموعه مانند Y و هر تابع $\beta : A \times B \longrightarrow Y$، تابع منحصربه فرد $\beta' : T \longrightarrow Y$ موجود باشد به طوریکه $\beta = \beta'\mathcal{T}$.

یا به عبارت دیگر دیاگرام زیر جابجا شود.

$$
\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\mathcal{T}"'] & & Y \\
& T \arrow[ur, "\beta'"'] &
\end{tikzcd}
$$

نکته ۱۵.۱. فرض کنیم A یک S-سیستم راست و B یک S-سیستم چپ و $A \times B$ حاصل ضرب دکارتی A و B باشد. قرار می دهیم $H = \{((as, b), (a, sb)) | a \in A, b \in B, s \in S\}$ و فرض کنیم $\rho = \rho(H)$ همنهشتی تولید شده توسط H روی $A \times B$ باشد در این صورت $\dfrac{A \times B}{\rho}$ حاصل ضرب تانسوری A و B روی S نامیده می‌شود و با $A \otimes B$ نشان می‌دهیم. همچنین براي هر $a \in A$ و $b \in B$

[10] S-tensorial

کلاس هم ارزی (a,b) در $A\otimes B$ را با $a\otimes b$ نشان می دهیم. با توجه به تعریف برای هر $a\in A$ و $b\in B$ و $s\in S$ داریم:

$$as\otimes b=a\otimes sb.$$

تعریف ۱.۱۶. فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. تابعگون هموردا [۱۱] T از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$ که با $T:\mathcal{C}:\longrightarrow\mathcal{D}$ نمایش داده می‌شود، تابعی است که به شی C از $\mathcal{C}$ شیئی مانند $T(C)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد و به ریخت $f:C\longrightarrow C'$ از $\mathcal{C}$ ریختی مانند $T(f):T(C)\longrightarrow T(C')$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد به طوری که

۱. به ازای هر ریخت همانی $1:C\longrightarrow C$ از $\mathcal{C}$، $T(1_C)=1_{T(C)}$.

۲. به ازای هر دو ریخت f و g از $\mathcal{C}$ که ترکیب gf تعریف شده باشد، $T(gf)=T(g)T(f)$.

مثال ۱.۱۷. فرض کنید $\mathcal{C}$ رسته S-سیستم‌ها باشد. $A\otimes -\ :\ Act-S\longrightarrow Set$ با تعریف $(A\otimes -)(f)=1_A\otimes f$ یک تابعگون هموردا است. که $f:B\longrightarrow C$ یک همریختی سیستمی است و $1_A\otimes f:A\otimes B\longrightarrow A\otimes C$ است.

تعریف ۱.۱۸. S-سیستم A_S را هموار [۱۲] گویند هرگاه تابعگون $A_S\otimes -$، تکریختی را حفظ کند. یا به عبارت دیگر اگر $f:X\longrightarrow Y$ یک به یک باشد آنگاه $i\otimes f:A_S\otimes X\longrightarrow A_S\otimes Y$ نیز یک به یک باشد.

تعریف ۱.۱۹. S -سیستم A_S عقب‌بر هموار [۱۳] است اگر تابعگون $A_S\otimes -$ عقب‌بر را حفظ کند.

تعریف ۱.۲۰. S -سیستم A_S برابرساز هموار [۱۴] است اگر تابعگون $A_S\otimes -$ برابرساز را حفظ کند.

تعریف ۱.۲۱. S -سیستم A_S قویاً هموار [۱۵] است اگر تابعگون $A_S\otimes -$ عقب بر و برابرساز را حفظ کند.

[۱۱] Covariant functor
[۱۲] flat
[۱۳] pullback flat
[۱۴] equlizer flat
[۱۵] strongly flat

تعریف ۲۲.۱. S-سیستم A_S را هموار ضعیف [۱۶] گویند هرگاه $A_S \otimes -$ نشاندن ایده‌الهای چپ S را در S حفظ کند. یا به عبارت دیگر اگر K یک ایده‌ال چپ از S باشد و $j : K \hookrightarrow S$ یک نشاندن باشد، $۱ \otimes j : A_S \otimes K \hookrightarrow A_S \otimes S$ نیز یک نشاندن باشد.

تعریف ۲۳.۱. S-سیستم A_S را هموار ضعیف اصلی [۱۷] گویند هرگاه $A_S \otimes -$ نشاندن ایده‌الهای اصلی چپ S را در S حفظ کند. یا به عبارت دیگر اگر Ss که $s \in S$ یک ایده‌ال اصلی چپ از S باشد و $j : Ss \hookrightarrow S$ یک نشاندن باشد، $۱ \otimes j : A_S \otimes Ss \hookrightarrow A_S \otimes S$ نیز یک نشاندن باشد.

تعریف ۲۴.۱. S-سیستم A_S را بی تاب [۱۸] گویند هرگاه برای هر $x, y \in A$ و عضو حذف پذیر راست $c \in S$، تساوی $xc = yc$ نتیجه دهد که $x = y$.

تعریف ۲۵.۱. S -سیستم A در شرط P صدق می کند اگر برای هر $a, a' \in A$ و $s, s' \in S$ که $as = a's'$، عناصر $a'' \in A$ و $u, v \in S$ موجود باشند به طوریکه $a = a''u$ و $a' = a''v$ و $us = vs'$.
یا به عبارت دیگر:

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dr, "s"] & \\ a'' \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & \circ \\ & a' \arrow[ur, "s'"'] & \end{tikzcd}$$

تعریف ۲۶.۱. S -سیستم A در شرط E صدق می کند اگر برای هر $a \in A$ و $s, s' \in S$ که $as = as'$، عناصر $a' \in A$ و $u \in S$ موجود باشند به طوریکه $a = a'u$ و $us = us'$. یا به عبارت دیگر:

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[r, "u"] & a \arrow[r, bend left, "s"] \arrow[r, bend right, "s'"'] & \circ \end{tikzcd}$$

لم ۲۷.۱. هر S-سیستم آزاد یک S-سیستم تصویری است.

[۱۶] Weakly flat
[۱۷] principally weakly flat
[۱۸] torsian free

اثبات. به مرجع [۵] قضیه ۲.۳.۴ مراجعه شود. □

لم ۲۸.۱. یک S-سیستم قویاً هموار است اگر و تنها اگر عقب بر هموار باشد.

اثبات. به مرجع [۵] قضیه ۳.۱۶.۵ مراجعه شود. □

لم ۲۹.۱. هر S-سیستم تصویری یک S-سیستم قویاً هموار است.

اثبات. به مرجع [۵] قضیه ۳.۱۷.۵ مراجعه شود. □

لم ۳۰.۱. هر S-سیستم عقب بر هموار در شرط P صدق می‌کند.

اثبات. به مرجع [۵] قضیه ۳.۱۶.۲ مراجعه شود. □

لم ۳۱.۱. هر S-سیستم قویاً هموار درشرط (P) صدق می‌کند.

اثبات. با توجه به تعریف سیستم قویاً هموار، هر سیستم قویاً هموار، سیستم عقب بر هموار است. همچنین طبق لم ۳۰.۱ ، هر سیستم عقب بر هموار در شرط P صدق می‌کند. پس هر سیستم قویاً هموار در شرط P صدق می‌کند. □

لم ۳۲.۱. هر S-سیستم که در شرط(P) صدق کند هموار است.

اثبات. به مرجع [۵]، قضیه ۳.۱۳.۳ مراجعه شود. □

لم ۳۳.۱. هر S-سیستم هموار یک S-سیستم هموار ضعیف است.

اثبات. با توجه به تعریف سیستم هموار و هموار ضعیف واضح است. □

لم ۳۴.۱. هر S-سیستم هموار ضعیف اصلی یک S-سیستم بی‌تاب است.

اثبات. به مرجع [۵] قضیه ۳.۱۰.۳ مراجعه شود. □

لم ۳۵.۱. هر S-سیستم هموار ضعیف یک S-سیستم بی‌تاب است.

اثبات. با توجه به تعریف هموار ضعیف و هموار ضعیف اصلی، هر سیستم هموار ضعیف یک سیستم هموار ضعیف اصلی است. و همچنین با توجه به لم ۳۴.۱ ، هر سیستم هموار ضعیف اصلی، یک سیستم بی‌تاب است. پس هر سیستم هموار ضعیف، یک سیستم بی‌تاب است. □

لم ۳۶.۱. S -سیستم A قویاً هموار است اگر وتنها اگر درشرط P و E صدق کند.

اثبات. به لم ۲۸.۱ و قضیه مرجع ۳.۱۶.۶ مرجع [۵]، مراجعه شود. □

قضیه ۳۷.۱. فرض کنید ρ یک همنهشتی راست از تکواره S باشد. در این صورت $\frac{S}{\rho}$در شرط P صدق می کند اگر و تنها اگر برای هر $s,t \in S$ که $s\rho t$، $u,v \in S$ موجود باشد به طوری که $u\rho 1\rho v$ و $us = vt$.

اثبات. به قضیه ۳.۱۳.۴ مرجع [۵]، مراجعه شود. □

لم ۳۸.۱. فرض کنید ρ همنهشتی راست از تکواره S باشد. در این صورت S–سیستم $\frac{S}{\rho}$ در شرط E صدق می کند اگر و تنها اگر برای هر $s,t \in S$ که $s\rho t$، $u \in S$ موجود باشد به طوری که $1\rho u$ و $us = ut$.

اثبات. به قضیه ۳.۱۴.۸ مرجع [۵]، مراجعه شود.

□

لم ۳۹.۱. هر S–سیستم برابرساز هموار در شرط E صدق می کند.

اثبات. به قضیه ۳.۱۵.۳ مرجع [۵]، مراجعه شود.

□

لم ۴۰.۱. فرض کنید ρ همنهشتی راست از تکواره S باشد. در این صورت S–سیستم $\frac{S}{\rho}$ برابرساز هموار است اگر و تنها اگر $\frac{S}{\rho}$ در شرط E صدق کند.