
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان:

گراف مقسوم علیه صفر از گونای یک

استاد راهنما:

دکتر کریم سامعی

پژوهشگر:

ثریا فتحی

شهریور ماه ۱۳۸۸

تقدیم به فرزندم:

سارو جان

قدردانی

با نام و یاد خداوندی سخن را آغاز می‌کنم که نبودم و هستی‌ام بخشید.

نهایت سپاس و قدردانی را از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر کریم سامعی برای تلاش‌های بی‌وقفه و بی‌شائبه در تهیه و تدوین این رساله کوچک اعلام می‌دارم.

همچنین از استاد گرانقدر سرکار خانم دکتر دانشخواه که در طول تحصیل اینجانب را یاری نموده‌اند، تقدیر و تشکر می‌نمایم.

بی‌نهایت قدردانی و سپاس را تقدیم می‌دارم به خانواده بی‌همتایم، پدر تکیه‌گاهم، مادر اسطوره عشقم، همسرم همراه مهربانم و مشوقین دلسوزم، خواهر و برادرانم.

نهایتا زحمات دلسوزانه آقای نصراللهی و خانم داودی را ارج می‌نهم که منت بر من نهاده و در تکمیل و ارائه این پایان نامه مرا یاری و مساعدت نمودند.

از خداوند منان توفیق روز افزون برای همگی آرزومندم.

دانشگاه بوعلی سینا

مشخصات پایان نامه تحصیلی

عنوان:

گراف مقسوم علیه صفر از گونای یک

نام نویسنده: ثریا فتحی

نام استاد راهنما: دکتر کریم سامعی

دانشکده : علوم پایه	**گروه آموزشی: ریاضی**	
رشته تحصیلی: ریاضی	**گرایش تحصیلی: جبر**	**مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد**
تاریخ تصویب: ۱۳۸۶/۶/۱	**تاریخ دفاع: ۱۳۸۸/۶/۲۵**	**تعداد صفحات: ۹۰**

چکیده:

برای حلقه های تعویض پذیر و یکدار R گراف مقسوم علیه صفر حلقه R ، که با $\Gamma(R)$ نشان داده می شود، گرافی ساده است که رأس های آن همه مقسوم علیه های صفر نا صفر R هستند و دو رأس متمایز x و y مجاور هستند اگر و تنها اگر $xy=0$ در این پایان نامه حلقه هایی به شکل $Z_{p_1}^{\alpha_1} \times \cdots \times Z_{p_n}^{\alpha_n}$، که گونای یک دارند را بررسی می‌کنیم.همچنین برای هر حلقه موضعی P از مرتبه ۳۲ که میدان نیست تعیین می کنیم آیا $\Gamma(R)$ یک گراف مسطح است؟

واژه‌های کلیدی: گراف مقسوم علیه صفر،گونای گراف، گراف مسطح

فهرست مندرجات

مقدمه

طی سالیان گذشته علاقهٔ خاص ریاضی‌دانان به تحقیق و پژوهش در مقوله‌های ترکیبی ریاضی، مانند مباحث ترکیبی جبر، آنالیز و توپولوژی، ترکیب آنالیز و نظریهٔ احتمالات و هم‌چنین جبر مجرد و نظریهٔ گراف، باعث بوجود آمدن مباحث جدید و متنوعی در این زمینه گردید. ایدهٔ برقراری ارتباط بین حلقه‌های تعویض‌پذیر و نظریهٔ گراف برای اولین بار در سال ۱۹۸۸ توسط بک [۱] طی مقالهٔ

I. Beck, coloring of commutative rings. J. Algebra 116 (1988). pp. 208-226

مطرح شد. علاقهٔ این ریاضی‌دان بیشتر در زمینهٔ رنگ‌آمیزی بود. بک همهٔ عناصر حلقه را به عنوان رئوس گراف در نظر گرفت. در این گراف دو رأس متمایز x و y مجاور بودند، اگر و تنها اگر $xy = 0$. این گراف الزاماً همبند نبود و رأس صفر در آن با همهٔ رئوس دیگر مجاور بود.

این مطالعه توسط ریاضی‌دانان متعددی ادامه یافت، تا اینکه در سال ۱۹۹۹ اندرسون [۲] و

---

[۱] Beck

[۲] Anderson

لیوینگستون [۳] طی مقالهٔ

D. F. Anderson, ‘P. S . Livingston, The zero-divisor graph of commutative ring. J. Algebra 217 (1999). pp. 434-447.

تعریف جدیدی برای گراف مقسوم‌علیه‌های وابسته به حلقهٔ تعویض‌پذیر آوردند. در این تعریف رئوس گراف، مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر ناصفر حلقه هستند و دو رأس متمایز x و y مجاور هستند، اگر و تنها اگر $xy = ۰$. در همین مقاله ثابت می‌شود که این گراف، گرافی همبند است.

در سال ۲۰۰۶، **اچ. جیوانگ** [۴] در مقالهٔ

Hsin-Ju wang, Zero- divisor graphs of genus, J. Algebra 304(2006).pp.666-678.

گراف مقسوم‌علیه صفر را از گونای یک و بیشتر از یک مورد بررسی قرار داد.

هدف اصلی این پایان‌نامه نیز تحلیل و بررسی این مطلب است که در فصل سوم به طور کامل مورد بررسی می‌گیرد.

ازآن‌جایی‌که مطلب مورد بحث ترکیبی از حلقه‌های تعویض‌پذیر گراف است، لذا فصل اول این پایان‌نامه مشتمل بر ۳ بخش است. بخش اول شامل مفاهیم و تعاریف مقدماتی از نظریهٔ گراف است که برگرفته از مرجع [۱۲] است. در دو بخش بعدی نیز تعاریف، قضایا و نتایجی را از نظریهٔ حلقه‌های تعویض‌پذیر و حلقهٔ کسرها می‌آوریم. مراجع‌این بخش برگرفته از مرجع [۱۳] می‌باشند که عنوان آن‌ها به‌طور کامل در پیوست ذکر شده است. بیشتر نمادگذاری‌های این فصل برگرفته از کتاب گام‌هایی در جبر تعویض‌پذیر نوشتهٔ رودنی شارپ می‌باشد. در فصل دوم گراف مقسوم‌علیه‌های صفر

[۳] Livingston

[۴] Hsin- Ju wang

حلقه‌های تعویض‌پذیر معرفی و بررسی شده و مثال‌ها و قضایای اساسی ارائه شده است. در بخش دوم نیز قضایای مقدماتی از گونای گراف را بیان می‌کنیم. مطالب این فصل بر اساس مراجع [۳]، [۸]، [۱۱]، [۱۲] تنظیم شده است و بالاخره فصل سوم که براساس مرجع [۱۰] تنظیم شده‌است، مشتمل بر ۲ بخش است بررسی می‌کنیم. در بخش اول مثال‌هایی از گونای گراف را بیان می‌کنیم و بخش دوم قضایای بنیادی در این زمینه را مورد تحلیل قرار می‌دهیم.

فصل ۱

مباحث مقدماتی

آخرین چیزی که یک نویسنده کشف می‌کند، این است که از کجا شروع کند.

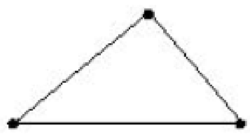
در فصل اول مفاهیم، اصطلاحات و قضایایی را ارائه می دهیم که ابزارهای اساسی ما در فصل‌های بعد می‌باشند. از آن‌جایی‌که برای مطالعه و تحقیق در این مقوله نیاز است که با مفاهیم و تعاریفی از نظریهٔ گراف آشنایی مختصری داشته باشیم، لذا این فصل را در قالب ۳ بخش می‌آوریم. در بخش اول برخی از مفاهیم ابتدایی در نظریهٔ گراف را بیان می‌کنیم. بخش دوم شامل مفاهیم و قضایایی از نظریهٔ حلقه‌های تعویض‌پذیر می‌باشد و در بخش آخر به تعریف و بررسی حلقهٔ کسرها می‌پردازیم.

۱—۱ مفاهیمی در نظریه گراف

از آن‌جایی‌که برخی مفاهیم مقدماتی در نظریهٔ گراف از اساسی‌ترین ابزار لازم در بررسی ساختار گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌های تعویض‌پذیر می‌باشند، لذا در این بخش مختصراً به بیان مفاهیم

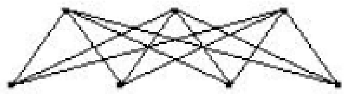
مقدماتی از نظریهٔ گراف می‌پردازیم.

۱ — ۱ تعریف. گراف سادهٔ G را به صورت زوج $(V(G), E(G))$ تعریف می‌کنیم، به‌طوری‌که $V(G)$ یک مجموعهٔ ناتهی از عناصری به نام رأس و $E(G)$ خانواده‌ای از زوج‌های نامرتب از عناصر $V(G)$ موسوم به یال است. توجه می‌کنیم که گراف ساده، طوقه و یال تکراری ندارد. در گراف ساده، دو رأس v و w را مجاور می‌گوییم، هرگاه یک یال بین آن‌ها موجود باشد و با vw یا $v-w$ نشان می‌دهیم.



شکل ۱ — ۱

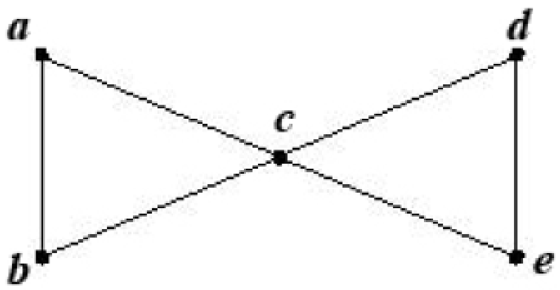
۱ — ۲ تعریف. فرض کنیم مجموعهٔ رئوس یک گراف ساده را بتوان به‌صورت دو مجموعهٔ مجزای $V_۱$ و $V_۲$ افراز کرد، به‌طوری‌که هر رأس از $V_۱$ با همهٔ رئوس $V_۲$ مجاور باشد و هر دو رأس در $V_۱$ و نیز هر دو رأس در $V_۲$ با هم مجاور نباشند، دراین‌صورت G را یک گراف دوبخشی کامل‌می‌گوییم و با $K_{r,\, s}$ نشان می‌دهیم، به‌طوری‌که r و s به ترتیب تعداد رئوس در $V_۱$ و $V_۲$ است. یک گراف دوبخشی کامل به‌صورت $K_{۱,\, s}$ را یک گراف ستاره‌ای می‌نامیم. در شکل ۱ − ۲(a) و ۱ − ۲(b) به‌ترتیب گراف دوبخشی کامل $K_{۳,\, ۴}$ و گراف ستاره‌ای $K_{۱,\, ۳}$ را مشاهده می‌کنیم.



شکل ۱ — ۲ (a)

شکل ۱ — ۲ (b)

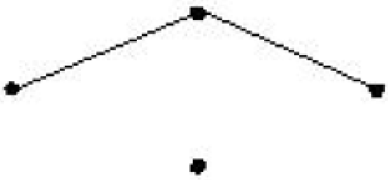
۱ — ۳ **تعریف.** در گراف سادهٔ G، هر دنبالهٔ متناهی از یال‌ها را یک گشت می‌گوییم. تعداد یال‌ها در یک گشت را طول گشت می‌نامیم. گشتی را که تمامی یال‌های آن مجزا باشند را یک گذر می‌نامیم. اگر رئوسی را که در یک گذر از آن عبور می‌کنیم مجزا باشند، آن‌گاه گذر را یک مسیر می‌گوییم. مسیر بسته‌ای را که حداقل دارای یک یال باشد، مدار می‌نامیم. به‌عنوان مثال در گراف شکل ۱ — ۳ گذر ed، ce، bc یک مسیر به طول ۳ بین دو رأس d و b است و مسیر بسته de، cd، ec یک مدار است.



شکل ۱ — ۳

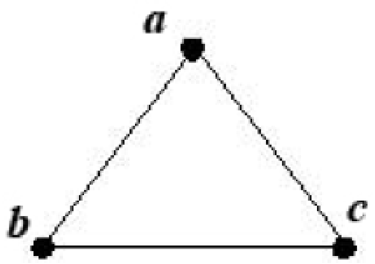
۱—۴ **تعریف.** گراف G را همبند می‌گوییم، هرگاه بین هر دو رأس مجزای آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. اگر گراف G همبند نباشد، آن‌گاه می‌گوییم G ناهمبند است.

مثال ۱. گراف‌های شکل‌های ۱ − ۲ (a) و ۱ − ۲ (b) و ۱ − ۳ همبند هستند، ولی گراف شکل ۱ − ۴ ناهمبند است.

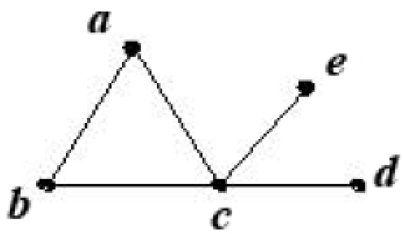


شکل ۱—۴

۱—۵ **تعریف.** یک زیرگراف از گراف G خود یک گراف است که تمامی رئوس آن به $V(G)$ تعلق دارد و تمامی یال‌های آن عضو $E(G)$ است. مثلاً در گراف شکل ۱ − ۵ (a) زیرگراف، گراف شکل ۱ − ۵(b) است.

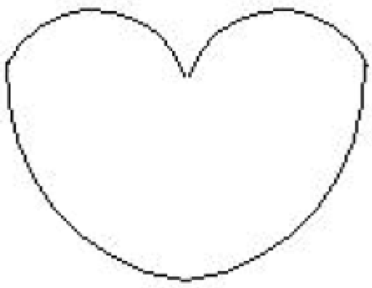


شکل ۱—۵ (a)



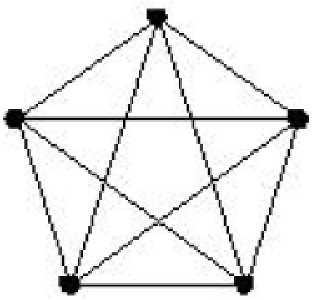
شکل ۱—۵ (b)

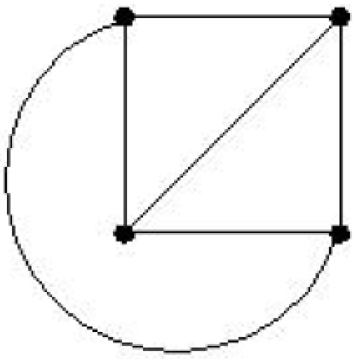
۱—٦ **تعریف.** یک خم ژوردان در صفحه، یک خم پیوسته است که خودش را قطع نمی‌کند. یک خم بستهٔ ژوردان، خمی است که نقاط انتهایی آن بر هم منطبق باشند و به همین ترتیب می‌توان خم‌های ژوردان را روی فضای سه بعدی و یا روی اشکالی مانند کره و سطوح دوار تعریف کرد. شکل ۱ − ٦ یک خم بستهٔ ژوردان را نشان می‌دهد.



شکل ۱ — ۶

۱ — ۷ **تعریف.** گراف مسطح، گرافی است که بتوان آن را در صفحه چنان رسم کرد که یال‌ها یکدیگر را جز در رئوسی که از آن‌ها می گذرند، قطع نکنند. هر گرافی که با یک گراف مسطح شده یکریخت باشد، گراف مسطح می گویند. یا به عبارتی ساده یک گرافی، مسطح است که قابل نشان دادن در صفحه باشد. مثلاً شکل ۱ — ۷ (a) گراف مسطح است، اما شکل ۱ — ۷ (b) گراف مسطح نیست.

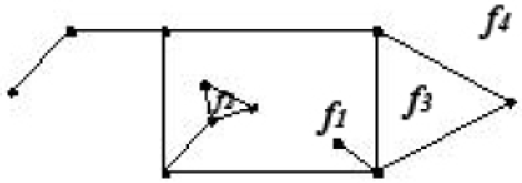




شکل ۱ — ۷ (b) شکل ۱ — ۷ (a)

۱ — ۸ **تعریف.** قبل از آن‌که مفهوم وجه را تعریف کنیم، یادآور می‌شویم که نقطهٔ x را از گراف G مجزا گویند، هرگاه x نه به یک رأس از G و نه روی هیچ یک از یال‌های آن واقع باشد. اگر x نقطه‌ای از صفحه و از G مجزا باشد، وجه شامل x عبارت است از مجموعه نقاطی از صفحه که آن‌ها

را بتوان با یک خم ژوردان که تمام نقاط آن از G مجزا هستند، به آن وصل کرد. توجه کنیم که یکی از وجوه بی‌کران است و آن را وجه نامتناهی می‌گوییم. مثلاً شکل ۱ — ۸ چهار وجه دارد که f_4 وجه نامتناهی است.

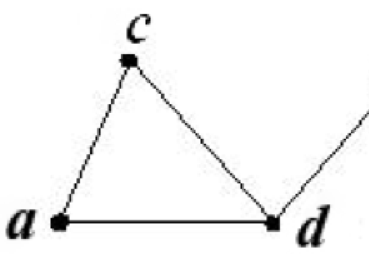


شکل ۱ — ۸

۱ — ۹ **تعریف.** یک سطح را از گونای g می‌گویند، هرگاه با کره‌ای که g دسته دارد، یکریخت توپولوژیکی باشد. هر گرافی که بتوان آن را بدون تقاطع روی یک سطح از گونای g، نه گونای $g-1$ رسم کرد، یک گراف از گونای g می‌گویند. پس گونای یک کره، صفر و گونای یک چنبره، یک است. (چنبره، کره‌ای است که یک دسته دارد.)

۱ — ۱۰ **تعریف.** اگر e یک یال گراف G باشد. منظور از $G-e$ گراف حاصل از حذف یال e از G است و در حالت کلی اگر F مجموعه‌ای از یال‌های G باشد، گراف حاصل از حذف یال‌های F را با $G-F$ نشان می‌دهیم. به‌همین ترتیب اگر v یک رأس G باشد، منظور از $G-v$ گراف حاصل از حذف رأس v و یال‌های ماربر v است. در حالت کلی‌تر اگر S یک مجموعه از رئوس G باشد، $G-S$ نشان‌گر گراف حاصل از حذف رئوس در S و تمام یال‌هایی که از آن رئوس می‌گذرند.

۱—۱۱ **تعریف.** هر رأس درجهٔ ۱ را یک رأس پایانی گویند. در شکل ۱ − ۹ رأس b، رأس پایانی گراف است.



شکل ۱ —۹

۱—۲ مفاهیمی در نظریهٔ حلقه‌های تعویض‌پذیر

دراین بخش به طور مختصر به بیان مفاهیم و تعاریفی از نظریهٔ حلقه‌های تعویض‌پذیر می‌پردازیم و قضایای مهمی را در باب ساختار مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر یک حلقه بررسی می‌کنیم.

۱—۱۲ **تعریف.** فرض کنیم R یک حلقهٔ تعویض‌پذیر باشد. مجموعهٔ تمام ایدآل‌های اول R را طیف اول R می‌نامیم و با $\mathrm{Spec}(R)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲. اگر R دامنهٔ صحیح باشد، آن‌گاه $(\circ) \in \mathrm{Spec}(R)$. به عنوان مثال در حلقهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$، $(\circ)$ ایده‌آل اول است. به‌علاوه به‌ازای هر عدد اول p، $p\mathbb{Z}$ نیز ایدآل اول است.

۱—۱۳ **لم و تعریف.** فرض کنیم R یک حلقهٔ تعویض‌پذیر و I ایدآلی از حلقهٔ R باشد. دراین‌صورت،

$$\sqrt{I} = \{r \in R |\ r^n \in I, \ \text{که } n \text{ای متعلق به } \mathbb{N} \text{ موجود باشد}\}$$

ایدآلی از R است که I را شامل می‌شود، و رادیکال I نام دارد.

اثبات. لم و تعریف ۳—۴۶ از مرجع [۱۳] را ببینید.

۱—۱۴ لم و نماد گذاری. فرض کنیم I ایدآل حلقهٔ تعویض‌پذیر R باشد. واریتهٔ I که را با نماد $\mathrm{Var}(I)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت: $\mathrm{Var}(I) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subseteq P\}$ تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت،

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in \mathrm{Var}(I)} P.$$

اثبات. لم ۳—۴۸، در مرجع [۱۳] را ببینید.

۱—۱۵ قضیه و تعریف. فرض کنیم I ایدآل سره حلقهٔ R باشد. دراین‌صورت $\mathrm{Var}(I)$، حداقل یک عضو مینیمال نسبت به رابطهٔ مشمولیت دارد. عضوهای مینیمال $\mathrm{Var}(I)$ را ایدآل‌های اول‌مینیمال I می‌نامیم و با $\min(I)$ نشان می‌دهیم. اگر R ناصفر باشد، ایدآل‌های اول‌مینیمال ایدآل صفر را ایدآل‌های اول‌مینیمال R می‌نامیم و با $\min(R)$ نمایش می‌دهیم.

اثبات. لم ۳—۵۲، از مرجع [۱۳] را ببینید.

۱—۱۶ نتیجه. فرض کنیم I ایدآل سره حلقهٔ تعویض‌پذیر R باشد. دراین‌صورت:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in \mathrm{Min}(I)} P.$$

اثبات. لم ۳—۵۴، از مرجع [۱۳] را ببینید.

۱—۱۷ نتیجه. فرض کنیم R حلقهٔ تعویض‌پذیر باشد، دراین‌صورت مجموعهٔ عناصر پوچ‌توان R را با $\mathrm{Nil}(R)$ نمایش می‌دهیم که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند.

$$\mathrm{Nil}(R) = \sqrt{\circ} = \bigcap_{P \in \mathrm{Min}(\circ)} P.$$

۱—۱۸ تعریف. فرض کنیم R حلقهٔ تعویض‌پذیر باشد، می‌گوییم $a \in R$ مقسوم‌علیه صفر در R است، اگر $b \in R$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $b \neq 0$، $ab = 0$.

مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر حلقهٔ R را با $\mathrm{Z}(R)$ نمایش می‌دهیم.

۱—۱۹ نکته. فرض کنیم R یک حلقهٔ تعویض‌پذیر و دامنه صحیح باشد. ازاین رو $\mathrm{Z}(R) = \{0\}$.

مثال ۳. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_8$. دراین‌صورت $\mathrm{Z}(R) = \{0, 2, 4, 6\}$.

اگر $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$، آن‌گاه $\mathrm{Z}(R) = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$.

۱—۲۰ تعریف. فرض کنیم I و J ایدآل‌های حلقهٔ تعویض‌پذیر R باشند، حاصل تقسیم یا خارج قسمت $(I : J)$ به‌صورت $(I : J) = \{a \in R : a.J \subseteq I\}$ تعریف می‌کنیم. با توجه به این تعریف روشن است که $(I : J)$ ایدآلی از R شامل I است. چنان‌چه $I = 0$، مجموعهٔ

$$(0 : J) = \{a \in R : aJ = 0\} = \{a \in R : ab = 0, b \in J \text{ به ازای هر } \}$$

را پوچ‌ساز J می‌نامیم و با $\mathrm{Ann}(J)$ نمایش می‌دهیم.

۱—۲۱ لم. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویض‌پذیر R باشد و $m \in M$. در این صورت یک یکریختی R ـ مدولی چون

$$f : R/\mathrm{Ann}(M) \to Rm$$

وجود دارد که به‌ازای هر $r \in R$، $f(r + (0 : m)) = rm$.

اثبات. روشن است که نگاشت $g : R \to Rm$ با تعریف $g(r) = rm$، به ازای هر $r \in R$، R ـ بروریختی از R به روی زیرمدولی Rm از M است و چون $kerg = \{r \in R : rm = 0\} = (0 : m)$، پس از قضیه اول یکریختی حکم ثابت می‌شود. ■

۱—۲۲ لم و تعریف. فرض کنید R حلقهٔ تعویض‌پذیر و $a \in R$. دراین‌صورت مجموعهٔ $aR = \{ar : r \in R\}$ ایدآل R است و ایدآل اصلی تولید شده توسط a نامیده می‌شود و نمادهای دیگر aR عبارت‌اند از (a) و Ra.

۱—۲۳ تعریف. فرض کنید M ایدآلی از حلقهٔ تعویض‌پذیر R باشد. می‌گوییم M ایدآل ماکسیمال R است، اگر

۱) $M \subset R$. یعنی M ایدآل سرهٔ R باشد و

۲) اگر M' ایدآلی دیگر از R و $M \subseteq M'$ باشد، آن‌گاه $M = M'$. مجموعهٔ تمام ایدآل‌های ماکسیمال R را **طیف ماکسیمال** حلقهٔ R می‌نامیم و با $\mathrm{Max}(R)$ نمایش می‌دهیم.

۱—۲۴ نکته. هر ایدآل ماکسیمال از حلقهٔ R، ایدآل اول R نیز است، یعنی $\mathrm{Max}(R) \subseteq \mathrm{Spec}(R)$.

ولی عکس آن همواره درست نیست. به‌عنوان مثال ایدآل صفر در حلقهٔ اعداد صحیح، ایدآل اولی است که ماکسیمال نیست.

۱—۲۵ تعریف. هر حلقهٔ تعویض‌پذیر R را که دقیقاً یک ایدآل ماکسیمال چون M دارد، شبه‌موضعی می‌گوییم. در این حالت R/M را هیأت مانده‌ای R می‌نامیم.

منظور از حلقهٔ موضعی حلقه‌ای تعویض‌پذیر و نوتری است که شبه‌موضعی باشد.

مثال ۴. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_{۱۶}$، دراین‌صورت R یک حلقهٔ شبه‌موضعی با ایدآل ماکسیمال منحصربه‌فرد $M = \{۰, ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴\}$ است.

۱—۲۶ لم. فرض کنید R حلقهٔ تعویض‌پذیر باشد و $r \in R$، دراین‌صورت $r \in Jac(R)$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $a \in R$، $۱ - ra$ عضو وارون‌پذیر R باشد.

اثبات. فرض کنید $r \in \mathrm{Jac}(R)$. فرض کنید به ازای عضوی چون $a \in R$، $۱ - ra$ عضو وارون‌پذیر